Brückenkurs Mathematik

– Übungsaufgaben –

Hochschule Heilbronn

8. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Aufgabe 1. Füllen Sie die folgende Wahrheitstabelle aus.

F	G	$\neg G$	$F \to G$	$(F \to G) \to \neg G$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

Aufgabe 2. Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle, dass

$$F \to G \quad = \quad \neg F \vee G.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle, dass

$$F \vee (F \wedge G) \quad = \quad F.$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle, dass

$$(F \vee G) \to F \quad = \quad F \vee \neg G.$$

Aufgabe 5. Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle, dass

$$(F \wedge G) \vee H \quad = \quad (F \vee H) \wedge (G \vee H).$$

Aufgabe 6. Unter Verwendung von Wahrheitstabellen lassen sich leicht die folgenden Gesetze für beliebige Wahrheitswerte F, G zeigen:

$$\begin{aligned} F \to G &= \neg F \vee G \\ F \vee (G \wedge H) &= (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\ \mathrm{w} \wedge F &= F \\ \neg F \vee F &= \mathrm{w}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun *unter Anwendung dieser Gesetze*, dass

$$F \to (F \wedge G) \quad = \quad F \to G.$$

Beweisen Sie dann die Aussage mit Hilfe einer Wahrheitstabelle.

Aufgabe 7. Unter Verwendung von Wahrheitstabellen lassen sich leicht die folgenden Gesetze für beliebige Wahrheitswerte F, G zeigen:

$$\begin{aligned} F \to G &= \neg F \vee G \\ \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G \\ \neg\neg F &= F. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun *unter Anwendung dieser Gesetze*, dass

$$\neg(F \to G) \quad = \quad F \wedge \neg G.$$

Beweisen Sie dann die Aussage mit Hilfe einer Wahrheitstabelle.

2 Mengen

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\{2,3\} \cup \{5,3,1\}$$
$$\{1,2\} \cap \{2,3,1\}$$
$$\{1,5,2\} \setminus \{3,1\}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie

$$\{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 3\} \cap \{y \,|\, y \in \mathbb{Q} \wedge y \leq 5\}.$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie

$$\{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2\} \setminus \{x \,|\, x \in \mathbb{Q} \wedge x < 5\}.$$

Veranschaulichen Sie die Mengen zunächst durch ein Bild und lösen Sie die Aufgabe dann unter Verwendung der Definition der Mengendifferenz und der Gesetze der Aussagenlogik.

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$(\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$$
$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 12. Beweisen Sie unter Verwendung der Definition der Schnittmenge und der Mengendifferenz, dass

$$B \cap (A \setminus B) \quad = \quad \emptyset.$$

Aufgabe 13. Für beliebige Wahrheitswerte F, G, H gilt

$$F \vee (G \wedge H) \quad = \quad (F \vee G) \wedge (F \vee H).$$

Zeigen Sie hiermit, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt

$$A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 14. Beschreiben Sie die Menge

$$M \quad = \quad \{x \,|\, x \in \mathbb{Q} \wedge (x \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{N})\}$$

unter Verwendung der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\, \mathbb{Q}$ und Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus$.

3 Terme

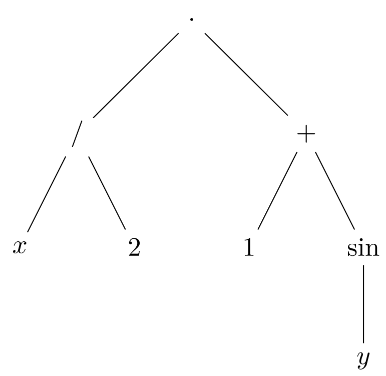
Aufgabe 15. Nennen Sie alle Konstanten-, Variablen- und Funktionssymbole in dem Term

$$\frac{\sqrt{3}}{x-y}+1.$$

Aufgabe 16. Nennen Sie alle Teilterme des Terms

$$\frac{\ln(x)+e^{x+1}}{y-3}.$$

Aufgabe 17. Stellen Sie den folgenden Baum als Term dar.



Aufgabe 18. Stellen Sie den Term

$$\sin(x)+3\cos(2)$$

als Baum dar.

Aufgabe 19. Stellen Sie den Term

$$\frac{\ln(x)}{y}-\cos(x+1)$$

als Baum dar.

4 Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz

Aufgabe 20. Multiplizieren Sie aus.

$$(a+b+c)^2.$$

Aufgabe 21. Multiplizieren Sie aus.

$$(a+b+c)(x+y).$$

Aufgabe 22. Multiplizieren Sie aus.

$$(x-y)^3$$

Aufgabe 23. Klammern Sie so viel wie möglich aus.

$$3x^2y^3u - 27xy^2u^2 + 6(xu)^4y^2.$$

Aufgabe 24. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(ax)^2 + 9b^2 + 6abx.$$

Aufgabe 25. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie Terme mit gleichem Exponent zusammen.

$$\big(x+1-(2x+3)(-x+1)\big)(3-x).$$

Aufgabe 26. Vereinfachen Sie den Term mit Hilfe der dritten Binomischen Formel.

$$(3x-1)^2 - (3x+1)^2.$$

Aufgabe 27. Vereinfachen Sie den Term

$$(F \to G) \to (G \to F)$$

unter Verwendung der Rechengesetze der Aussagenlogik.

5 Bruchrechnen

Aufgabe 28. Bringen Sie auf einen Bruch.

$$\frac{6}{3x+6}+\frac{4x+2}{2x+4}-1.$$

Aufgabe 29. Bringen Sie auf einen Bruch.

$$\frac{6}{2x-4}+\frac{x}{2-x}+\frac{2x-4}{x^2-4x+4}.$$

Aufgabe 30. Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{a+b}{\frac{b}{a}+1}.$$

Aufgabe 31. Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{a^2-4}{a^2-2a}.$$

Aufgabe 32. Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{x}.$$

Aufgabe 33. Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2.$$

Aufgabe 34. Vereinfachen Sie den Bruch

$$1+x+\frac{x-1}{1-\frac{x}{x+1}}.$$

Aufgabe 35. Vereinfachen Sie den Bruch

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}.$$

Auf welchen Wert läuft der Bruch zu wenn h gegen Null geht?

6 Potenzrechnen

Aufgabe 36. Der Eiffelturm hat eine Höhe von 320m und ein Gewicht von 10 000t. Es wird nun aus dem gleichen Material ein maßstabgetreues Modell angefertigt, das eine Höhe von 32cm hat. Welches Gewicht hat dieses Modell?

Aufgabe 37. Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$\sqrt{x^2} \quad = \quad -x.$$

Aufgabe 38. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$$5\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{16} - \sqrt{72}.$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

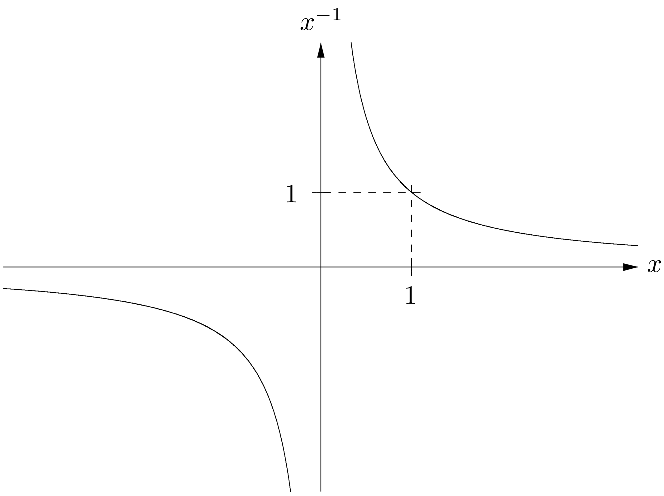
$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{1} + \sqrt{6}).$$

Aufgabe 40. Begründen Sie anschaulich, weshalb für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a^n)^m \quad = \quad a^{nm}.$$

Aufgabe 41. Finden Sie ein Beispiel für Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$, so dass $(x^y)^z$ und x^{yz} beide definiert, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 42. In nachfolgendem Bild ist die Funktion x^{-1} dargestellt. Zeichnen Sie in dieses Bild auch die Funktionen x^{-2} und $x^{-1/2}$ ein.



Aufgabe 43. Skizzieren Sie die Funktionen e^x und e^{-x} in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgabe 44. Sikzzieren Sie die Funktionen $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgabe 45. Vereinfachen Sie

$$\frac{a^3+a^4}{a^2-1}$$

Aufgabe 46. Vereinfachen Sie

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\,\sqrt[4]{\frac{2}{a}}$$

Aufgabe 47. Vereinfachen Sie

$$\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{a}}{a\sqrt{a-1}}$$

Aufgabe 48. Formen Sie so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Aufgabe 49. Vereinfachen Sie

$$\frac{\sqrt{5x^5}}{5\sqrt{x^3}}$$

Aufgabe 50. Finden Sie eine reelle Zahl x so dass

$$\sqrt{x^2} \quad \neq \quad x.$$

Aufgabe 51. Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner so weit wie möglich

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}}.$$

Aufgabe 52. Ein Computer habe die Taktfrequenz von 3 GHz. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300.000 km/s. Wie weit kommt das Licht in einem Takt?

Aufgabe 53. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ohne Taschenrechner:

$$\frac{20^{40}}{40^{20}}.$$

Aufgabe 54. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\sqrt{0.65^2-0.16^2}$$

7 Logarithmen

Aufgabe 55. Berechnen Sie

$$\ln(1), \ln(e), \ln(e^2), \ln\left(\sqrt{e}\right), \ln\left({}^1\!/_e\right), \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Aufgabe 56. Berechnen Sie

$$\log_2(2), \log_3(9), \log_5(\sqrt{5}), \log_{1/7}(7), \log_2(\sqrt{32}), \log_{1/3}(\sqrt{3}).$$

Aufgabe 57. Skizzieren Sie die Funktionen $\ln(x)$ und $\log_2(x)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Zeichnen Sie auf der x-Achse die Punkte $x = 1/2$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = e$ ein und auf der y-Achse die Punkte $y = 1$ und $y = -1$.

Aufgabe 58. Vereinfachen Sie

$$\ln(x) - \ln(xy) + \ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

Aufgabe 59. Vereinfachen Sie

$$\ln\left(\frac{x^2}{e^{u+1}}\right).$$

Aufgabe 60. Berechnen Sie

$$\log_5\left(\sqrt[3]{5}\right).$$

Aufgabe 61. Vereinfachen Sie

$$\log_a\left(\sqrt{\frac{e}{a^3}}\right).$$

Aufgabe 62. Vereinfachen Sie

$$\ln(a^2 - b^2) - \ln(a - b).$$

Aufgabe 63. Vereinfachen Sie

$$\log_a\left(x^{\ln(a)}\right).$$

Aufgabe 64. Berechnen Sie

$$u^{\ln(3)} - 3^{\ln(u)}.$$

Aufgabe 65. Vereinfachen Sie

$$\ln(a^3) + \ln\left(2\sqrt{a}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{a}\right).$$

8 Gleichungen

Aufgabe 66. Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \quad = \quad x.$$

Aufgabe 67. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x+3} \quad = \quad \frac{2x^2+3x-9}{x^2-9}.$$

Aufgabe 68. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x-1}{x-1} \quad = \quad x\left(1+\frac{x+3}{x^2+2x-3}\right).$$

Hinweis: Faktorisieren Sie zunächst den Nenner.

Aufgabe 69. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2x \quad = \quad 1+\sqrt{3x^2-4x+2}.$$

Aufgabe 70. Lösen Sie die Gleichung

$$\ln(2x-1)-\ln(x+3) \quad = \quad 1.$$

Aufgabe 71. Lösen Sie die Gleichung

$$a^{2x-3} \quad = \quad 5b^{x+1}$$

für beliebige Konstanten $a, b > 0$.

Aufgabe 72. Lösen Sie die Gleichung

$$\ln(e^x+2)+x \quad = \quad \ln(3).$$

Aufgabe 73. Lösen Sie die Gleichung

$$2^x+2^{x-1}+2^{x+1} \quad = \quad 7.$$

Aufgabe 74. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2\ln(x+1)-\ln(x) \quad = \quad \ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Aufgabe 75. Lösen Sie die Gleichung

$$e^2\, 8^x \quad = \quad \sqrt[5]{e^4}.$$

Aufgabe 76. (Schwierig!) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$3^x - \left(\sqrt{3}\right)^{x+4} + 20 \quad = \quad 0.$$

Aufgabe 77. (Schwierig!) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{2^{(9^x)}}{8^{(3^x)}} \quad = \quad \frac{1}{4}.$$

9 Polynomdivision

Aufgabe 78. Spalten Sie den ganzrationalen Teil mit Polynomdivision ab.

$$\frac{1+x}{1-x}.$$

Aufgabe 79. Berechnen Sie mit Polynomdivision.

$$\frac{2x^4 - x^3 + 6x^2 - x - 1}{2x - 1}.$$

Aufgabe 80. Spalten Sie den ganzrationalen Teil mit Polynomdivision ab.

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 1}.$$

Aufgabe 81. Spalten Sie den ganzrationalen Teil mit Polynomdivision ab.

$$\frac{8x^6}{2x^2 - 1}.$$

Aufgabe 82. Spalten Sie den ganzrationalen Teil ab.

$$\frac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 3}{3x^2}.$$

10 Ungleichungen

Aufgabe 83. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$3 - 4x \quad < \quad 0.$$

Aufgabe 84. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x^2 \quad \geq \quad 6 - x.$$

Aufgabe 85. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|3x + 2| \quad < \quad 7.$$

Aufgabe 86. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x + 1| \quad > \quad 3x - 1$$

11 Summen

Aufgabe 87. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i}.$$

Aufgabe 88. Sei

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}.$$

Berechnen Sie S für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ohne Taschenrechner. Bringen Sie die Brüche auf einen Nenner.

Stellen Sie hiermit S für beliebiges n ohne Summenzeichen dar. (Vermutung genügt).

Berechnen Sie hiermit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Aufgabe 89. Für die e-Funktion gilt

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots.$$

Beweisen Sie hier mit, dass die Ableitung der e-Funktion wieder die e-Funktion ist. Hinweis: Verwenden Sie die Summenregel der Ableitung.

Aufgabe 90. Sei $x \neq 1$ und

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

- Berechnen Sie xS und vereinfachen Sie das Ergebnis.
- Berechnen Sie $S - xS$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.
- Lösen Sie die so hergeleitete Gleichung für $S - xS$ nach S auf und zeigen Sie damit, dass

$$S = \frac{1 - x^6}{1 - x}.$$

- Sei nun

$$S = \sum_{i=0}^{n} x^i.$$

Berechnen Sie wie oben zuerst xS und dann $S - xS$ und lösen Sie nach S auf. Sie erhalten damit eine einfache Formel für S ohne Summenzeichen.

Aufgabe 91. In der letzten Aufgabe wurde gezeigt, dass

$$\sum_{i=0}^{n} x^i \quad = \quad \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Berechnen Sie hiermit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}.$$

Aufgabe 92. Stellen Sie den Term

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

als Summe dar und berechnen Sie ihn mit der Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \quad = \quad \frac{1}{1-x},$$

die für alle x mit $|x| < 1$ gilt.

12 Binomialkoeffizienten

Aufgabe 93. Vereinfachen Sie

$$\frac{n!}{n}, \quad (n-1)!n, \quad k!(k+1), \quad \frac{k+1}{(k+1)!}$$

Aufgabe 94. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$$\binom{10}{8}.$$

Aufgabe 95. Ein Fußballverein hat 15 Mitglieder. Wie viele Möglichkeiten gibt es, hiermit eine Mannschaft von 11 Spielern aufzustellen?

Aufgabe 96. Die Europäische Kommission erlässt die Vorschrift, dass die Flaggen von allen EU Mitgliedsstaaten zu vereinheitlichen sind und nur noch aus drei horizontal angeordneten Farbstreifen bestehen dürfen. Hierbei sind 7 Farben zulässig.

- Wie viele unterschiedliche Flaggen kann es damit geben?
- Nachdem sich Österreich (rot, weiß, rot) bereits freute, dass es seine Flagge behalten kann, wird die Vorschrift verschärft, dass alle Farbstreifen in einer Flagge unterschiedliche Farbe haben müssen. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
- Nachdem sich ein Land für blau, weiß, rot und eines für rot, weiß, blau entschieden hat, fühlt sich die Kommission zu einer neuen Verschärfung genötigt: Zwei Flaggen dürfen sich nicht nur in der Reihenfolge der Farben unterscheiden sondern müssen mindestens in einer Farbe differieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
- Nachdem diese Reformen ein grandioser Erfolg waren, erweitert man die Anzahl Farben aufgrund von mehr Buntheit auf 8 und verdoppelt die Anzahl Streifen auf 6. Wieso finden das Albanien, Nordmazedonien, Montenegro, Serbien und die Türkei nicht so gut?

Aufgabe 97. Das Pascal Dreieck hat eine vertikale Symmetrieachse, d.h. in der n-ten Zeile ist der Eintrag in Spalte k und Spalte $n-k$ gleich. Da die Einträge im Pascal Dreieck gleich den Binomialkoeffizienten sind, gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beweisen Sie diese Formel für $0 \leq k \leq n$. Verwenden Sie hierbei die Definition der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Aufgabe 98. (schwierig!) Man findet den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

in der n-ten Zeile und k-ten Spalte des Pascal Dreiecks. Hierbei wird vorausgesetzt, dass $n, k > 1$ und $k < n$, d.h. man befindet sich “im Innern” des Dreiecks. (An den Rändern steht immer 1 und außerhalb 0).

Nach dem Konstruktionsprinzip des Pascal Dreiecks ergibt sich ein Eintrag immer aus der Summe der schräg darüber liegenden Einträge, d.h.

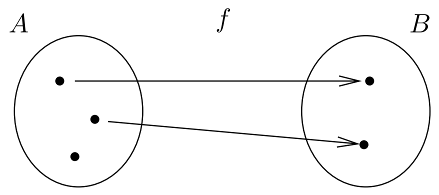
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Beweisen Sie diese Formel rechnerisch unter Verwendung der Definition der Binomialkoeffizienten

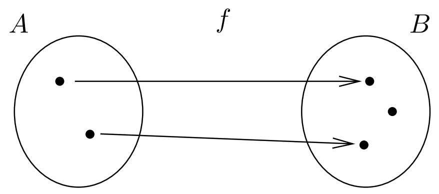
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

13 Funktionen

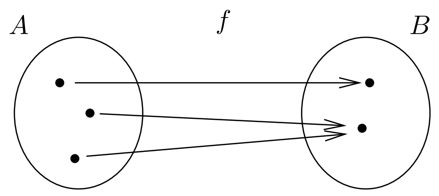
Aufgabe 99. Handelt es sich bei der unten dargestellten Zuordnung f um eine Funktion von A nach B? Begründen Sie Ihre Antwort.



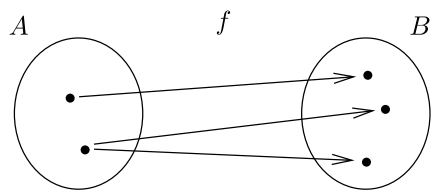
Aufgabe 100. Handelt es sich bei der unten dargestellten Zuordnung f um eine Funktion von A nach B? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 101. Handelt es sich bei der unten dargestellten Zuordnung f um eine Funktion von A nach B? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 102. Handelt es sich bei der unten dargestellten Zuordnung f um eine Funktion von A nach B? Begründen Sie Ihre Antwort.



14 Zusammengesetzte Funktionen

Aufgabe 103. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + \cos(x) \\ g(x) &= \frac{1}{x} + 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(g(x))$ und für $g(f(x))$.

Aufgabe 104. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ g(x) &= x \sin(1/x). \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(g(x))$ und für $g(f(x))$.

Aufgabe 105. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 \\ g(x) &= \sin(x-1) \\ h(x) &= \frac{1}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(g(h(x)))$.

Aufgabe 106. Sei

$$h(x) = \sin(2x+1) - 3.$$

Finden Sie Funktionen f, g so dass

$$h(x) = f(g(x)).$$

Aufgabe 107. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt die sog. Dichte der Normalverteilung mit Parametern μ und σ

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

eine wichtige Rolle, wobei $\sigma > 0$ vorausgesetzt werden kann.

Im einfachen Spezialfall $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ erhält man

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Zeigen Sie, dass man die allgemeine Normalverteilung mit Hilfe dieses Spezialfalls wie folgt ausdrücken kann:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

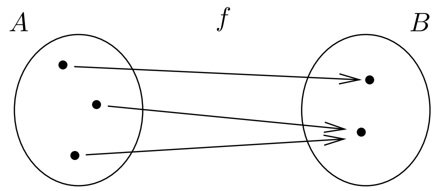
15 Umkehrfunktion

Aufgabe 108. Sei f eine Funktion mit

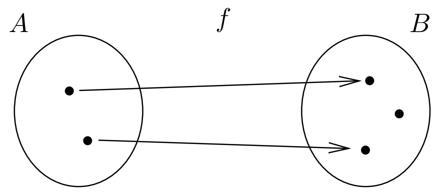
$$\begin{aligned} f(3) &= -2 \\ f(4) &= 4. \end{aligned}$$

Welche Funktionswerte der Umkehrfunktion f^{-1} von f lassen sich hiermit bestimmen?

Aufgabe 109. Hat die unten dargestellte Funktion f eine Umkehrfunktion?



Aufgabe 110. Hat die unten dargestellte Funktion f eine Umkehrfunktion?



Aufgabe 111. Sei $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ (1-x)/2 & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Funktionswerte $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$. Ist f bijektiv? Versuchen Sie einen Term für die Umkehrfunktion f^{-1} zu finden.

Aufgabe 112. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^-, \quad f(x) = -x^2$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 113. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}, \quad f(x) = x^2 + 1.$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 114. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-, \quad f(x) = -3e^{1-2x}$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 115. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \sqrt{\ln(2x+1)}$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 116. Die Funktion

$$f \in [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = 1 + \sin(\pi(x - 1/2))$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 117. Die Funktion

$$f \in]0,1] \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = (\ln(x))^2$$

ist bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

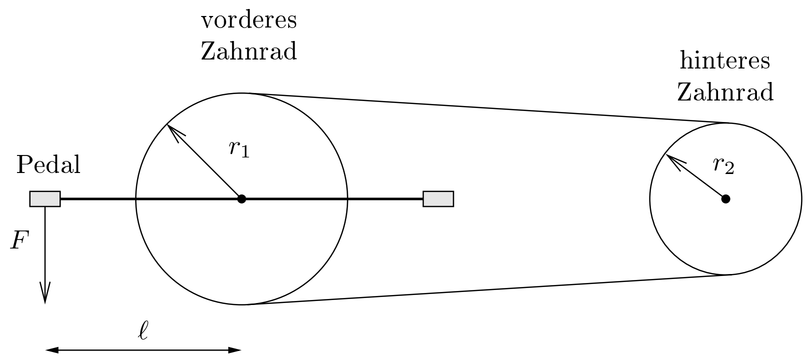
Die Funktion

$$g \in [1,\infty[\to \mathbb{R}_0^+, \quad g(x) = (\ln(x))^2$$

hat den selben Funktionsterm wie f und ist ebenfalls bijektiv. Berechnen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von g.

16 Trigonometrie

Aufgabe 118. In nachfolgendem Bild ist die Gangschaltung eines Fahrrads dargestellt.



Das vordere Zahnrad hat Radius r_1, das hintere hat Radius r_2 und die Kurbel hat Länge ℓ.

- Wenn sich das vordere Zahnrad um Winkel α_1 dreht, um welchen Winkel α_2 dreht sich dann das hintere Zahnrad?

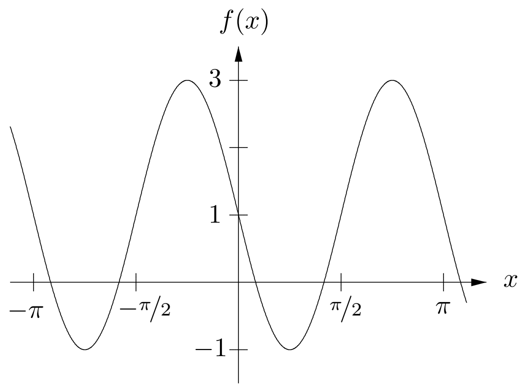
  Hinweis: Wenn das hintere Zahnrad kleiner ist als das vordere, muss es sich um einen Winkel $> \alpha_1$ drehen. Daher schält man hinten auf ein kleineres Ritzel wenn man schneller fahren möchte ohne schneller treten zu müssen.
- Das Drehmoment ist definiert als Tangentialkraft mal dem Abstand zur Drehachse. Auf das Pedal wirkt nun in der dargestellten Position eine Kraft F nach unten. Berechnen Sie hiermit das Drehomoment M_1 des vorderen Zahnrads, die Kraft F' auf die Kette und das Drehmoment M_2 des hinteren Zahnrads.

  Hinweis: Wenn das hintere Zahnrad kleiner ist als das vordere, ist hinten das Drehmoment kleiner als vorne. Deshalb schält man hinten auf ein größeres Ritzel wenn es den Berg hoch geht und man bei gleicher Pedalkraft F mehr Drehmoment M_2 braucht.
- Das nicht eingezeichnete Hinterrad sitzt auf einer gemeinsamen Achse mit dem hinteren Zahnrad und habe Radius r_3. Welche Kraft F'' wirkt somit auf das Fahrrad nach vorne?

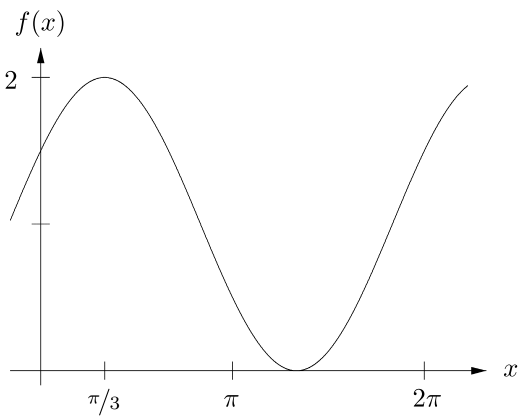
Aufgabe 119. Skizzieren Sie die Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$.

Aufgabe 120. Skizzieren Sie die Funktionen $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$.

Aufgabe 121. Nennen Sie einen Funktionsterm zu der unten dargestellten Funktion $f(x)$.



Aufgabe 122. Nennen Sie einen Funktionsterm zu der unten dargestellten Funktion $f(x)$.



Aufgabe 123. Berechnen Sie alle Nullstellen von

$$\cos(1/x).$$

Aufgabe 124. Vereinfachen Sie den Term

$$\sin(x) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}.$$

Aufgabe 125. Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie hiermit, dass die Tangensfunktion π-periodisch ist, d.h.

$$\tan(x+\pi) = \tan(x).$$

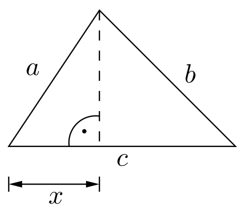
Aufgabe 126. Zeigen Sie durch Umformen, dass

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Aufgabe 127. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(3x - 2) = 1.$$

Aufgabe 128. Berechnen Sie die Länge x in Abhängigkeit der Seitenlängen a, b, c des folgenden Dreiecks.



Im Spezialfall $a = b$ muss aus Symmetriegründen $x = c/2$ sein. Damit können Sie Ihr Ergebnis verifizieren.

Aufgabe 129. Von einem Winkel α sei bekannt, dass

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Berechnen Sie $\sin(\alpha)$ mit Hilfe der Formel

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Aufgabe 130. Vereinfachen Sie den Term

$$\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}.$$

Aufgabe 131. Vereinfachen Sie den Term

$$\frac{1}{\cos(x) - 1} - \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Aufgabe 132. Die Additionstheoreme besagen, dass

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Leiten Sie hieraus eine Formel ab, mit der man $\tan(2\alpha)$ aus $\tan(\alpha)$ berechnen kann.

Aufgabe 133. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme den Term

$$\frac{\cos(x)}{\sin(2x)}.$$

Aufgabe 134. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme den Term

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

Aufgabe 135. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos(x^2-1) \quad = \quad 1.$$

Aufgabe 136. Zeigen Sie mit einer einfachen Skizze und dem Satz von Pythagoras, dass

$$\sin\left(\pi/4\right) \;=\; \cos\left(\pi/4\right) \;=\; 1/\sqrt{2}.$$

Hinweis: $\pi/4$ ist die Hälfte des rechten Winkels $\pi/2$.

Aufgabe 137. In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich. Weiterhin ist die Winkelsumme in jedem Dreick im Bogenmaß gleich π. Zeigen Sie durch eine einfache Skizze, dass hieraus folgt

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi/3\right) &= \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ \sin\left(\pi/6\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

17 Differentialrechnung

Aufgabe 138. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad e^x \cos(x).$$

Aufgabe 139. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Aufgabe 140. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \sqrt[n]{x}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Verifizieren Sie hiermit, dass im Spezialfall $n = 2$ gilt

$$\left(\sqrt{x}\right)' \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 141. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \sin\left(\sqrt{x} - e^{-x}\right).$$

Aufgabe 142. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Aufgabe 143. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \sin(x)\cos^2(x).$$

Aufgabe 144. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \frac{\sin(x)}{(e^x+1)^2}$$

Aufgabe 145. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \left(\frac{1}{\sqrt{(\sin(x)+2)}}\right)^3.$$

Aufgabe 146. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \tan^2(x).$$

Aufgabe 147. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad xe^x \sin(x).$$

Aufgabe 148. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad x\ln(x) - x.$$

Aufgabe 149. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \log_a(x).$$

Aufgabe 150. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \log_x(a).$$

Aufgabe 151. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad \sqrt{3^x}.$$

Aufgabe 152. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) \quad = \quad 2^{\sin(x)}.$$

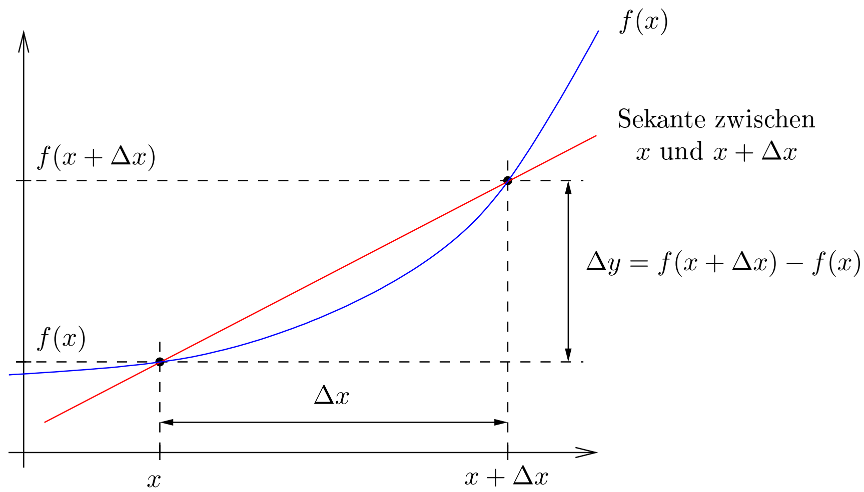
Aufgabe 153. Berechnen Sie

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2 + 2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}.$$

Aufgabe 154. Die Sekantensteigung einer Funktion f zwischen x und $x + \Delta x$ ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Dieser Wert hängt natürlich von x und Δx ab.



Die Ableitung von $f(x)$ erhält man als Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \to 0$, d.h.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Dieser Wert hängt nun nur noch von x ab, aber nicht mehr von Δx.

Berechnen Sie hiermit die Ableitung von

$$f(x) = ax.$$

Bestimmen Sie also zunächst die Sekantensteigung von f zwisch x und $x + \Delta x$ und führen Sie anschließend den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durch.

Aufgabe 155. Die Ableitung von $f(x)$ ist definiert durch

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Berechnen Sie hiermit die Ableitung von

$$f(x) = x^3.$$

Aufgabe 156. Berechnen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Geben Sie an, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 157. Die Menge Wasser in Litern in einem See zum Zeitpunkt t wird durch die Funktion $q(t)$ beschrieben, die Stromstärke im Zufluss in Liter pro Sekunde durch die Funktion $i_{\text{zu}}(t)$. Berechnen Sie hieraus die Funktion $i_{\text{ab}}(t)$ für die Stromstärke im Abfluss.

18 Integralrechnung

Aufgabe 158. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad 8\cos(3-2x).$$

Aufgabe 159. Berechnen Sie

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx.$$

Aufgabe 160. Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{2x}dx.$$

Aufgabe 161. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Aufgabe 162. Berechnen Sie

$$\int x\sin(x)dx.$$

Aufgabe 163. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$. Berechnen Sie hiermit eine Stammfunktion von

$$2f(x-1)-g(3x+1).$$

Aufgabe 164. Berechnen Sie

$$\int x\sin(x^2)dx.$$

Aufgabe 165. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}}.$$

Aufgabe 166. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$\sin(x)\cos(x).$$

Lösen Sie die Aufgabe einmal mit Substitution $u = \sin(x)$ und einmal mit Substitution $u = \cos(x)$. Sie erhalten zunächst zwei unterschiedliche Ergebnisse. Erklären Sie, weshalb beide korrekt sind.

Aufgabe 167. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx.$$

Aufgabe 168. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$x^2 \ln(2x^3).$$

Aufgabe 169. Berechnen Sie

$$\int_0^3 |x-1| dx.$$

Aufgabe 170. Berechnen Sie

$$\int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx.$$

Aufgabe 171. Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Aufgabe 172. Die Stromstärke in einem Fluss wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion $i(t)$ beschrieben. Berechnen Sie hiermit die Menge an Wasser $q(t)$, die zwischen dem Startzeitpunkt $t = t_0$ und t geflossen ist.