

Brückenkurs Mathematik

– Lösungen zu den Übungsaufgaben –

Hochschule Heilbronn

8. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik	3
2	Mengen	5
3	Terme	7
4	Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz	8
5	Bruchrechnen	10
6	Potenzrechnen	12
7	Logarithmen	18
8	Gleichungen	21
9	Polynomdivision	27
10	Ungleichungen	29
11	Summen	32
12	Binomialkoeffizienten	35
13	Funktionen	38
14	Zusammengesetzte Funktionen	39
15	Umkehrfunktion	40
16	Trigonometrie	45
17	Differentialrechnung	52
18	Integralrechnung	57

1 Aussagenlogik

Lösung 1.

F	G	$\neg G$	$F \rightarrow G$	$(F \rightarrow G) \rightarrow \neg G$
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w

Lösung 2.

F	G	$F \rightarrow G$	$\neg F$	$\neg F \vee G$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Lösung 3.

F	G	$F \wedge G$	$F \vee (F \wedge G)$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	f
f	f	f	f

Lösung 4.

F	G	$F \vee G$	$(F \vee G) \rightarrow F$	$F \vee \neg G$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	f	f
f	f	f	w	w

Lösung 5.

F	G	H	$F \wedge G$	$(F \wedge G) \vee H$	$F \vee H$	$G \vee H$	$(F \vee H) \wedge (G \vee H)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w	f
f	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f

Lösung 6.

$$\begin{aligned}
F \rightarrow (F \wedge G) &= \neg F \vee (F \wedge G) \\
&= (\neg F \vee F) \wedge (\neg F \vee G) \\
&= \mathbf{w} \wedge (\neg F \vee G) \\
&= \neg F \vee G \\
&= F \rightarrow G.
\end{aligned}$$

F	G	$F \wedge G$	$F \rightarrow (F \wedge G) \rightarrow F$	$F \rightarrow G$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

Lösung 7.

$$\begin{aligned}
\neg(F \rightarrow G) &= \neg(\neg F \vee G) \\
&= \neg\neg F \wedge \neg G \\
&= F \wedge \neg G.
\end{aligned}$$

F	G	$F \rightarrow G$	$\neg(F \rightarrow G)$	$\neg G$	$F \wedge \neg G$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	f	f
f	f	w	f	w	f

2 Mengen

Lösung 8.

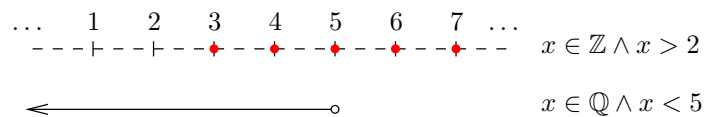
$$\begin{aligned}\{2, 3\} \cup \{5, 3, 1\} &= \{1, 2, 3, 5\} \\ \{1, 2\} \cap \{2, 3, 1\} &= \{1, 2\} \\ \{1, 5, 2\} \setminus \{3, 1\} &= \{5, 2\}.\end{aligned}$$

Lösung 9.

$$\begin{aligned}\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 3\} \cap \{y \mid y \in \mathbb{Q} \wedge y \leq 5\} \\ &= \{x \mid \underbrace{x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{Q}}_{x \in \mathbb{Q}} \wedge \underbrace{x > 3 \wedge x \leq 5}_{3 < x \leq 5}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge 3 < x \leq 5\}.\end{aligned}$$

Dies ist die Menge aller rationaler Zahlen im Intervall $]3, 5]$.

Lösung 10.



$$\begin{aligned}\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2\} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 5\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2 \wedge \neg(x \in \mathbb{Q} \wedge x < 5)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2 \wedge (x \notin \mathbb{Q} \vee x \geq 5)\} \\ &= \{x \mid \underbrace{(x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2 \wedge x \notin \mathbb{Q})}_{\text{immer falsch da } \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}} \vee (x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2 \wedge x \geq 5)\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 2 \wedge x \geq 5\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 5\} \\ &= \{5, 6, 7, \dots\}.\end{aligned}$$

Lösung 11.

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q} &= \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \\ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q} &= \{x \mid (x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z}) \vee x \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x \mid (x \in \mathbb{R} \vee x \in \mathbb{Q}) \wedge \underbrace{(x \notin \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{Q})}_{\text{immer wahr da } \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \vee x \in \mathbb{Q}\} \\ &= \mathbb{R} \cup \mathbb{Q} \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Lösung 12.

$$\begin{aligned} B \cap (A \setminus B) &= \{x \mid x \in B\} \cap \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \mid \underbrace{x \in B \wedge x \in A \wedge x \notin B}_{\text{immer falsch}}\}. \end{aligned}$$

Da es kein x gibt mit $x \in B$ und $x \notin B$, ist

$$B \cap (A \setminus B) = \emptyset.$$

Lösung 13.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A\} \cup \{x \mid x \in B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \cap \{x \mid x \in A \vee x \in C\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Lösung 14.

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge (x \notin \mathbb{Z} \vee x \in \mathbb{N})\} \\ &= \{x \mid (x \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Z}) \vee (x \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{N})\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Z}\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{N}\} \\ &= (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3 Terme

Lösung 15.

Konstantensymbole: $1, 3$

Variablensymbole: x, y

Funktionssymbole: $\sqrt{}$ (einstellig), $+$ (zweistellig), $-$ (zweistellig), $/$ (zweistellig).

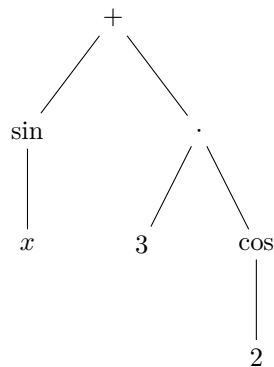
Lösung 16.

$$1, 3, x, y, y - 3, x + 1, e, \ln(x), e^{x+1}, \ln(x) + e^{x+1}, \frac{\ln(x) + e^{x+1}}{y - 3}.$$

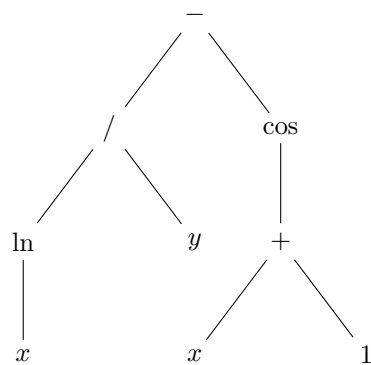
Lösung 17.

$$\frac{x}{2} (1 + \sin(y)).$$

Lösung 18.



Lösung 19.



4 Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz

Lösung 20.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= aa+ab+ac + ba+bb+bc + ca+cb+cc \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

Lösung 21.

$$(a+b+c)(x+y) = ax+ay+bx+by+cx+cy.$$

Lösung 22.

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x-y)(x-y)(x-y) \\ &= (x^2-2xy+y^2)(x-y) \\ &= x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+y^2x-y^3 \\ &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.\end{aligned}$$

Lösung 23.

$$3x^2y^3u-27xy^2u^2+6(xu)^4y^2 = 3xy^2u(xy-9u+2x^3u^3).$$

Lösung 24.

$$\begin{aligned}(ax)^2+9b^2+6abx &= (ax)^2+2(3axb)+(3b)^2 \\ &= (ax+3b)^2.\end{aligned}$$

Lösung 25.

$$\begin{aligned}&(x+1-(2x+3)(-x+1))(3-x) \\ &= (x+1-(-2x^2+2x-3x+3))(3-x) \\ &= (x+1+2x^2-2x+3x-3)(3-x) \\ &= (2x-2+2x^2)(3-x) \\ &= (2x-2+2x^2)(3-x) \\ &= 2(x^2+x-1)(3-x) \\ &= 2(3x^2+3x-3-x^3-x^2+x) \\ &= 2(2x^2+4x-3-x^3) \\ &= -2x^3+4x^2+8x-6.\end{aligned}$$

Lösung 26. Mit der Binomischen Formel

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

und der Substitution

$$a = 3x - 1$$

$$b = 3x + 1$$

gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{(3x-1)^2}_a - \underbrace{(3x+1)^2}_b &= \underbrace{(3x-1-3x-1)}_{a-b} \underbrace{(3x-1+3x+1)}_{a+b} \\ &= -2 \cdot 6x = -12x. \end{aligned}$$

Lösung 27.

$$\begin{aligned} (F \rightarrow G) \rightarrow (G \rightarrow F) &= (\neg F \vee G) \rightarrow (\neg G \vee F) \\ &= \neg(\neg F \vee G) \vee (F \vee \neg G) \\ &= (\neg\neg F \wedge \neg G) \vee (F \vee \neg G) \\ &= (F \wedge \neg G) \vee (F \vee \neg G) \\ &= (F \vee (F \wedge \neg G)) \wedge (\neg G \vee F \vee \neg G) \\ &= (F \vee \neg G) \wedge (F \vee \neg G) \\ &= F \vee \neg G \\ &= G \rightarrow F. \end{aligned}$$

5 Bruchrechnen

Lösung 28.

$$\begin{aligned}\frac{6}{3x+6} + \frac{4x+2}{2x+4} - 1 &= \frac{2}{x+2} + \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \\ &= \frac{2+2x+1-x-2}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}.\end{aligned}$$

Lösung 29.

$$\begin{aligned}\frac{6}{2x-4} + \frac{x}{2-x} + \frac{2x-4}{x^2-4x+4} &= \frac{3}{x-2} - \frac{x}{x-2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3}{x-2} - \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{3-x+2}{(x-2)} = \frac{5-x}{x-2}.\end{aligned}$$

Lösung 30. Erweitert man den Bruch mit a , erhält man

$$\frac{\frac{a+b}{\frac{b}{a}+1}} = \frac{a(a+b)}{b+a} = a.$$

Lösung 31.

$$\frac{a^2-4}{a^2-2a} = \frac{(a-2)(a+2)}{a(a-2)} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a}.$$

Lösung 32.

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{1}{x-1}}{x} &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x-1+1}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Lösung 33.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} - \frac{2ab}{ab} = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Lösung 34.

$$\begin{aligned}1+x + \frac{x-1}{1-\frac{x}{x+1}} &= 1 + \frac{x-1}{\frac{x+1-x}{x+1}} = 1+x + \frac{x-1}{\frac{1}{x+1}} \\ &= 1+x + (x-1)(x+1) = (x+1)(1+x-1) \\ &= x(x+1).\end{aligned}$$

Lösung 35.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} &= \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{h} \\&= \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right) \frac{1}{h} \\&= \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \frac{1}{h} \\&= -\frac{h}{x(x+h)} \frac{1}{h} \\&= -\frac{1}{x(x+h)}.\end{aligned}$$

Wenn h gegen Null geht, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

falls $x \neq 0$.

6 Potenzrechnen

Lösung 36. Der Faktor, um den die Höhe des Modells kleiner ist als das Original, ist

$$\frac{32\text{cm}}{320\text{m}} = \frac{32 \times 1\text{cm}}{320 \times 1\text{m}} = \frac{32 \times 1\text{cm}}{320 \times 100\text{cm}} = \frac{1}{1000}.$$

Würde der Eiffelturm nur in der Höhe geschrumpft, nicht aber in Länge und Breite, wäre er um Faktor 1000 leichter. Die Schrumpfung in den anderen beiden Dimensionen bewirkt aber jeweils nochmal einen Faktor 1000, so dass insgesamt ein Faktor 1000^3 entsteht. Damit ist das Gewicht des Modells

$$\frac{10\,000 \times 1\text{t}}{1000^3} = \frac{10 \times 1000\text{kg}}{1000^2} = \frac{10 \times 1\text{kg}}{1000} = 10\text{g}.$$

Lösung 37. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Weiterhin ist

$$|x| = -x$$

genau dann wenn $x \leq 0$, d.h.

$$\{x \mid \sqrt{x^2} = -x\} = \mathbb{R}_0^-.$$

Lösung 38.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{16} - \sqrt{72} &= 5\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} + 4 - \sqrt{36 \cdot 2} \\ &= 5\sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{16}\sqrt{2} + 4 - \sqrt{36}\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 - 6\sqrt{2} \\ &= (10 - 4 - 6)\sqrt{2} + 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Lösung 39.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{1} + \sqrt{6}) &= (\sqrt{16} + \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{9})(1 + \sqrt{6}) \\ &= (4 + \sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 3)(1 + \sqrt{6}) \\ &= (1 - \sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) \\ &= 1 - 6 \\ &= -5. \end{aligned}$$

Lösung 40.

$$\begin{aligned}
 (a^n)^m &= \underbrace{a^n a^n \cdots a^n}_m = \underbrace{\underbrace{aa \cdots a}_n \underbrace{aa \cdots a}_n \cdots \underbrace{aa \cdots a}_n}_m = \underbrace{aa \cdots a}_{nm} \\
 &= a^{nm}
 \end{aligned}$$

Lösung 41. Für $x = -1$, $y = 2$ und $z = 1/2$ erhält man

$$\begin{aligned}
 (x^y)^z &= (-1^2)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \\
 x^{yz} &= (-1)^1 = -1.
 \end{aligned}$$

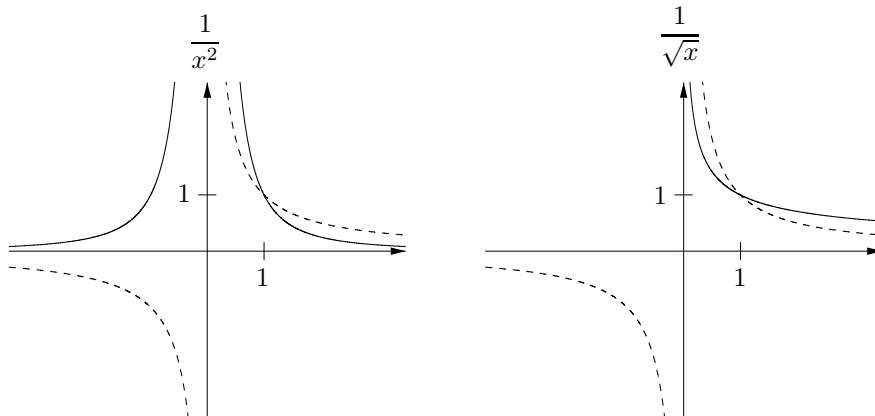
Lösung 42. Es gilt

$$\begin{aligned}
 x^{-1} &= \frac{1}{x} \\
 x^{-2} &= \frac{1}{x^2} \\
 x^{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

Alle Funktionen haben an der Stelle $x = 1$ den Funktionswert 1 und einen Pol an der Stelle $x = 0$. Weiter gilt

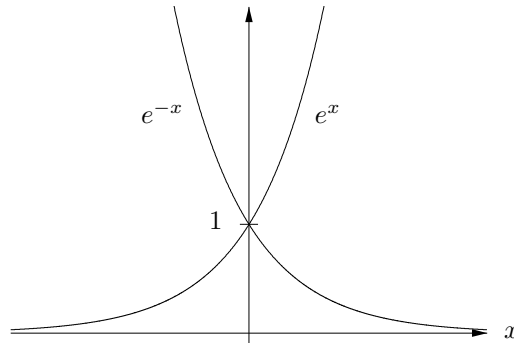
$$\begin{aligned}
 1/x^2 &> 0 && \text{für alle } x \neq 0 \\
 1/x^2 &< 1/x && \text{für } x > 1 \\
 1/x^2 &> 1/x && \text{für } 0 < x < 1 \\
 1/\sqrt{x} &> 1/x && \text{für } x > 1 \\
 1/\sqrt{x} &< 1/x && \text{für } 0 < x < 1
 \end{aligned}$$

Die Funktion $1/\sqrt{x}$ ist nur für $x > 0$ definiert. Die Funktion $1/x$ ist im nachfolgenden Bild gestrichelt dargestellt.



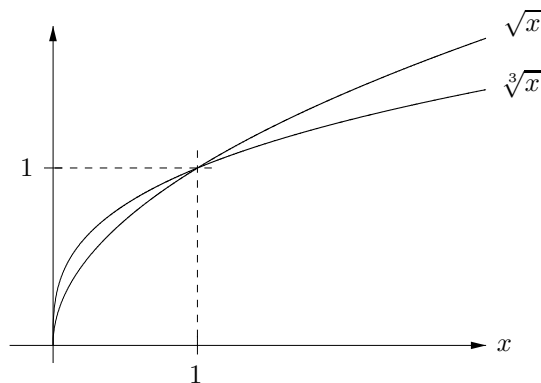
Lösung 43. Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist streng monoton steigend und $e^0 = 1$. Weiterhin gilt $e^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$.

Die Funktion e^{-x} erhält man aus e^x durch Spiegelung an der y -Achse.



Lösung 44. Beide Funktionen sind streng monoton steigend und nur für $x \geq 0$ definiert.

- Für $x > 1$ gilt $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$.
- Für $x < 1$ gilt $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$.
- Für $x = 1$ gilt $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = 1$.
- Für $x = 0$ gilt $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = 0$.



Lösung 45.

$$\frac{a^3 + a^4}{a^2 - 1} = \frac{a^3(1 + a)}{(a - 1)(a + 1)} = \frac{a^3}{a - 1}$$

Lösung 46.

$$\sqrt{\frac{a}{2}} \sqrt[4]{\frac{2}{a}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{a}\right)^{1/4} = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{2}\right)^{-1/4} = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}$$

Lösung 47. In der Aufgabe treten die Terme $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a-1}$ auf. Daher ist

$$\begin{aligned} a &\geq 0 \\ a-1 &\geq 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a} \sqrt{a} \\ a-1 &= \sqrt{a-1} \sqrt{a-1}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{a}}{a\sqrt{a-1}} &= \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{a}}{a\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a^2} - 1)}{a\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a}(a-1)}{a\sqrt{a-1}} \\ &= \frac{\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a-1}{a}} \end{aligned}$$

Lösung 48. Erweitern mit $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y} \end{aligned}$$

Lösung 49.

$$\frac{\sqrt{5x^5}}{5\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{5x^5}{25x^3}} = \sqrt{\frac{x^2}{5}} = \frac{|x|}{\sqrt{5}}.$$

Lösung 50. Alle negativen Zahlen. Zum Beispiel für $x = -3$ gilt

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq x.$$

Lösung 51.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{40} &= \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{5} = 2 \sqrt[3]{5} \\ \sqrt[3]{135} &= \sqrt[3]{27 \cdot 5} = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{5} = 3 \sqrt[3]{5}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \sqrt[4]{\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}} &= \sqrt[4]{2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5}} \\
 &= \sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}} \\
 &= \sqrt[4]{5} \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} \\
 &= \sqrt[4]{5} \left(5^{1/3}\right)^{1/4} \\
 &= 5^{1/4} 5^{1/12} \\
 &= 5^{1/4 + 1/12} \\
 &= 5^{4/12} \\
 &= 5^{1/3} \\
 &= \sqrt[3]{5}.
 \end{aligned}$$

Lösung 52. Die Taktfrequenz ist 3×10^9 Hz. Ein Takt dauert somit

$$\frac{1}{3 \times 10^9} \text{ s.}$$

Damit kommt das Licht in einer Sekunde

$$\begin{aligned}
 300.000 \text{ km/s} \times \frac{1}{3 \times 10^9} \text{ s} &= 3 \times 10^5 \times 10^3 \times \frac{1}{3} 10^{-9} \text{ m} \\
 &= 10^8 \times 10^{-9} \text{ m} \\
 &= 10^{-1} \text{ m} \\
 &= 10 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Lösung 53.

$$\begin{aligned}
 \frac{20^{40}}{40^{20}} &= \frac{20^{2 \times 20}}{40^{20}} \\
 &= \frac{(20^2)^{20}}{40^{20}} \\
 &= \left(\frac{20^2}{40}\right)^{20} \\
 &= \left(\frac{20}{40} \times 20\right)^{20} \\
 &= 10^{20}.
 \end{aligned}$$

Lösung 54.

$$\begin{aligned}\sqrt{0.65^2 - 0.16^2} &= \sqrt{\left(\frac{65}{100}\right)^2 - \left(\frac{16}{100}\right)^2} \\&= \sqrt{\frac{1}{100^2} (65^2 - 16^2)} \\&= \frac{1}{10} \sqrt{65^2 - 16^2} \\&= \frac{1}{10} \sqrt{(65 - 16)(65 + 16)} \\&= \frac{1}{10} \sqrt{49 \times 81} \\&= \frac{1}{10} \sqrt{49} \times \sqrt{81} \\&= \frac{1}{10} \times 7 \times 9 \\&= \frac{63}{10} \\&= 0.63\end{aligned}$$

7 Logarithmen

Lösung 55.

$$\begin{aligned}
 \ln(1) &= 0 \\
 \ln(e) &= 1 \\
 \ln(e^2) &= 2 \\
 \ln(\sqrt{e}) &= \frac{1}{2} \\
 \ln(1/e) &= -1 \\
 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) &= \ln(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Lösung 56.

$$\begin{aligned}
 \log_2(2) &= 1 \\
 \log_3(9) &= 2 \\
 \log_5(\sqrt{5}) &= \frac{1}{2} \\
 \log_{1/7}(7) &= -1 \\
 \log_2(\sqrt{32}) &= \frac{\ln(\sqrt{2^5})}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^{5/2})}{\ln(2)} = \frac{\frac{5}{2}\ln(2)}{\ln(2)} = \frac{5}{2} \\
 \log_{1/3}(\sqrt{3}) &= \log_{1/3}(3^{1/2}) = \log_{1/3}(1/3^{-1/2}) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Man hätte die letzte Aufgabe auch so lösen können:

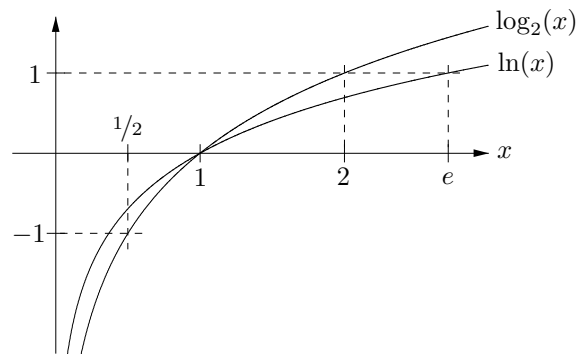
$$\log_{1/3}(\sqrt{3}) = \frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(1/3)} = \frac{1/2 \ln(3)}{-\ln(3)} = -\frac{1}{2}.$$

Lösung 57. Da

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \approx 1.44 \ln(x)$$

erhält man den Graph von $\log_2(x)$ aus dem Graph von $\ln(x)$ durch eine Streckung um Faktor 1.44 in y -Richtung. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
 \ln(1) &= \log_2(1) = 0 \\
 \ln(e) &= \log_2(2) = 1 \\
 \log_2(1/2) &= -1.
 \end{aligned}$$



Lösung 58.

$$\begin{aligned}\ln(x) - \ln(xy) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) &= \ln(x) - (\ln(x) + \ln(y)) + \ln(y^{-1}) \\ &= \ln(x) - \ln(x) - \ln(y) - \ln(y) = -2\ln(y).\end{aligned}$$

Lösung 59.

$$\ln\left(\frac{x^2}{e^{u+1}}\right) = \ln(x^2) - \ln(e^{u+1}) = 2\ln(x) - (u+1) = 2\ln(x) - u - 1.$$

Lösung 60.

$$\log_5\left(\sqrt[3]{5}\right) = \frac{\ln(\sqrt[3]{5})}{\ln(5)} = \frac{\ln(5^{1/3})}{\ln(5)} = \frac{\frac{1}{3}\ln(5)}{\ln(5)} = \frac{1}{3}.$$

Lösung 61.

$$\begin{aligned}\log_a\left(\sqrt{\frac{e}{a^3}}\right) &= \log_a\left(\sqrt{e}\sqrt{a^{-3}}\right) = \log_a\left(e^{1/2}a^{-3/2}\right) \\ &= \frac{\ln(e^{1/2}a^{-3/2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(e^{1/2}) + \ln(a^{-3/2})}{\ln(a)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(a)}{\ln(a)} = \frac{1}{2\ln(a)} - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Lösung 62.

$$\begin{aligned}\ln(a^2 - b^2) - \ln(a - b) &= \ln((a - b)(a + b)) - \ln(a - b) \\ &= \ln(a - b) + \ln(a + b) - \ln(a - b) = \ln(a + b).\end{aligned}$$

Lösung 63.

$$\log_a \left(x^{\ln(a)} \right) = \frac{\ln \left(x^{\ln(a)} \right)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a) \ln(x)}{\ln(a)} = \ln(x).$$

Lösung 64. Unter Verwendung der Identität $e^{\ln(x)} = x$ gilt

$$\begin{aligned} u^{\ln(3)} &= e^{\ln(u^{\ln(3)})} = e^{\ln(3) \ln(u)} \\ 3^{\ln(u)} &= e^{\ln(3^{\ln(u)})} = e^{\ln(u) \ln(3)}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$u^{\ln(3)} - 3^{\ln(u)} = 0.$$

Lösung 65.

$$\begin{aligned} \ln(a^3) + \ln(2\sqrt{a}) + 2 \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= 3 \ln(a) + \ln(2) + \ln(a^{1/2}) + 2 \ln(a^{-1}) \\ &= 3 \ln(a) + \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(a) - 2 \ln(a) \\ &= \left(3 + \frac{1}{2} - 2\right) \ln(a) + \ln(2) \\ &= \frac{3}{2} \ln(a) + \ln(2). \end{aligned}$$

8 Gleichungen

Lösung 66. Rechte Seite mit x erweitern ergibt

$$\frac{x}{x+1} = x.$$

Beide Seiten mit $x+1$ multiplizieren.

$$\begin{aligned}x &= x(x+1) \\x &= x^2 + x \\x^2 &= 0.\end{aligned}$$

Damit ist die einzige Lösung $x = 0$. Die linke Seite der Gleichung ist bei $x = 0$ jedoch nicht definiert, folglich hat die Gleichung keine Lösung.

Lösung 67. Bei der Lösung wird vorausgesetzt, dass $x \neq \pm 3$, da die beiden Seiten sonst nicht definiert sind.

Zunächst bringt man die linke Seite auf den Hauptnenner.

$$\frac{x(x+3) + 4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 - 9}.$$

Vereinfachen und Zusammenfassen ergibt

$$\frac{x^2 + 7x - 12}{x^2 - 9} = \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 - 9}.$$

Da $x^2 - 9 \neq 0$ kann man beide Seiten mit $x^2 - 9$ multiplizieren ohne die Lösungsmenge zu ändern.

$$\begin{aligned}x^2 + 7x - 12 &= 2x^2 + 3x - 9 \\x^2 - 4x + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel erhält man die beiden Lösungen

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \\x_1 &= 3 \\x_2 &= 1.\end{aligned}$$

Da laut Voraussetzung $x \neq 3$ ist, bleibt nur die eine Lösung $x = 1$.

Lösung 68. Nullstellen des Nenners.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \\x_1 &= 1 \\x_2 &= -3.\end{aligned}$$

Diese beiden Werte sind folglich keine Lösungen und können ausgeschlossen werden.

Mit der Faktorisierung des Nenners

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$$

erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x-1} &= x \left(1 + \frac{x+3}{(x-1)(x+3)} \right) \\ \frac{2x-1}{x-1} &= x \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)\end{aligned}$$

Da laut Annahme $x - 1 \neq 0$ kann auf beiden Seiten mit $x - 1$ multipliziert werden ohne die Lösungsmenge zu ändern.

$$\begin{aligned}2x - 1 &= x(x - 1 + 1) \\ 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Diese Lösung wurde jedoch ausgeschlossen, da die Gleichung für $x = 1$ nicht definiert ist. Folglich ist die Lösungsmenge leer.

Lösung 69.

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}.$$

Um die Wurzel zu eliminieren, werden beide Seiten quadriert. Da die Quadratfunktion nicht injektiv ist, können hierbei "falsche" Lösungen dazukommen. Daher muss am Ende die Probe durch Einsetzen gemacht werden.

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 &= 3x^2 - 4x + 2 \\ 4x^2 - 4x + 1 &= 3x^2 - 4x + 2 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1.\end{aligned}$$

- Einsetzen von $x = -1$ in die gegebene Gleichung. Auf der linken Seite erhält man -2 , auf der rechten

$$1 + \sqrt{3 + 4 + 2} = 1 + \sqrt{9} = 4.$$

Folglich ist $x = -1$ keine Lösung.

- Einsetzen von $x = 1$ in die gegebene Gleichung. Auf der linken Seite erhält man 2 , auf der rechten

$$1 + \sqrt{3 - 4 + 2} = 1 + \sqrt{1} = 2.$$

Folglich ist $x = 1$ die einzige Lösung der Gleichung.

Lösung 70.

$$\begin{aligned}
\ln(2x-1) - \ln(x+3) &= 1 \\
\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) &= 1 \\
\frac{2x-1}{x+3} &= e \\
2x-1 &= e(x+3) \\
(2-e)x &= 3e+1 \\
x &= \frac{3e+1}{2-e}.
\end{aligned}$$

Lösung 71. Logarithmieren auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned}
\ln(a^{2x-3}) &= \ln(5b^{x+1}) \\
(2x-3)\ln(a) &= \ln(5) + (x+1)\ln(b) \\
2\ln(a)x - 3\ln(a) &= \ln(5) + \ln(b)x + \ln(b) \\
x(2\ln(a) - \ln(b)) &= \ln(5) + \ln(b) + 3\ln(a) \\
x &= \frac{\ln(5) + \ln(b) + 3\ln(a)}{2\ln(a) - \ln(b)} = \frac{\ln(5a^3b)}{\ln\left(\frac{a^2}{b}\right)}.
\end{aligned}$$

Lösung 72.

$$\begin{aligned}
\ln(e^x + 2) + x &= \ln(3) \\
\ln(e^x + 2) &= \ln(3) - x \\
e^x + 2 &= e^{\ln(3)-x} \\
e^x + 2 &= e^{\ln(3)}e^{-x} \\
e^x + 2 &= 3e^{-x} \\
(e^x)^2 + 2e^x &= 3.
\end{aligned}$$

Substitution $u = e^x$ ergibt

$$\begin{aligned}
u^2 + 2u &= 3 \\
u^2 + 2u - 3 &= 0 \\
u_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \\
u_1 &= 1 \\
u_2 &= -3
\end{aligned}$$

Rücksubstitution. Für $u_1 = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 \\
x &= 0.
\end{aligned}$$

Für $u_2 = -3$ erhält man

$$e^x = -3.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{0\}.$$

Lösung 73.

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x-1} + 2^{x+1} &= 7 \\ 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x &= 7 \\ 2^x \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \right) &= 7 \\ 2^x \cdot \frac{7}{2} &= 7 \\ 2^x &= \frac{14}{7} = 2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Lösung 74.

$$\begin{aligned} 2 \ln(x+1) - \ln(x) &= \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \\ \ln((x+1)^2) &= \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) + \ln(x) \\ \ln((x+1)^2) &= \ln \left(\left(1 + \frac{3}{x} \right) x \right) \\ (x+1)^2 &= \left(1 + \frac{3}{x} \right) x \\ x^2 + 2x + 1 &= x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Der Wert $x_2 = -2$ ist keine Lösung, da dieser zu undefinierten Werten auf der linken Seite der Gleichung führt. Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{1\}.$$

Lösung 75.

$$\begin{aligned}
e^2 8^x &= \sqrt[5]{e^4} \\
e^2 8^x &= e^{4/5} \\
8^x &= e^{4/5} e^{-2} \\
8^x &= e^{4/5-2} \\
8^x &= e^{-6/5} \\
\ln(8^x) &= -\frac{6}{5} \\
x \ln(8) &= -\frac{6}{5} \\
x &= -\frac{6}{5 \ln(8)}
\end{aligned}$$

Lösung 76. Zunächst formt man um:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3})^{x+4} &= (3^{1/2})^{x+4} \\
&= 3^{(x+4)/2} \\
&= 3^{4/2} 3^{x/2} \\
&= 9 (3^x)^{1/2} \\
&= 9\sqrt{3^x}.
\end{aligned}$$

Damit wird aus der Gleichung

$$3^x - 9\sqrt{3^x} + 20 = 0.$$

Substitution $u = \sqrt{3^x}$ ergibt

$$\begin{aligned}
u^2 - 9u + 20 &= 0 \\
u_{1,2} &= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \\
u_1 &= 5 \\
u_2 &= 4.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution. Für $u_1 = 5$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sqrt{3^x} &= 5 \\
3^x &= 25 \\
x \ln(3) &= \ln(25) \\
x &= \frac{\ln(25)}{\ln(3)} = \log_3(25) = 2 \log_3(5).
\end{aligned}$$

Für $u_2 = 4$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sqrt{3^x} &= 4 \\
3^x &= 16 \\
x \ln(3) &= \ln(16) \\
x &= \frac{\ln(16)}{\ln(3)} = \log_3(16) = 2 \log_3(4).
\end{aligned}$$

Lösung 77.

$$\begin{aligned}2^{(9^x)} &= 2((3^2)^x) = 2(3^{2x}) \\8^{(3^x)} &= (2^3)^{(3^x)} = 2^{(3 \cdot 3^x)}.\end{aligned}$$

Damit wird aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{2^{(3^{2x})}}{2^{(3 \cdot 3^x)}} &= \frac{1}{4} \\2^{(3^{2x} - 3 \cdot 3^x)} &= 2^{-2} \\3^{2x} - 3 \cdot 3^x &= -2 \\(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x &= -2\end{aligned}$$

Substitution $u = 3^x$ ergibt

$$\begin{aligned}u^2 - 3u &= -2 \\u^2 - 3u + 2 &= 0 \\u_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 82}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \\u_1 &= 2 \\u_2 &= 1.\end{aligned}$$

Rücksubstitution. Für $u_1 = 2$ erhält man

$$\begin{aligned}3^x &= 2 \\x \ln(3) &= \ln(2) \\x &= \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \log_3(2).\end{aligned}$$

Für $u_2 = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}3^x &= 1 \\x \ln(3) &= \ln(1) \\x \ln(3) &= 0 \\x &= 0.\end{aligned}$$

9 Polynomdivision

Lösung 78.

$$\frac{1+x}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1}.$$

$$\begin{array}{rcl} x+1 : x-1 & = & 1 + \frac{2}{x-1} \\ \frac{x-1}{2} & & \end{array}$$

Damit ist

$$\frac{1+x}{1-x} = -\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = -1 + \frac{2}{1-x}.$$

Lösung 79.

$$\begin{array}{rcl} 2x^4 - x^3 + 6x^2 - x - 1 : 2x - 1 & = & x^3 + 3x + 1 \\ \underline{2x^4 - x^3} & & \\ 6x^2 - x - 1 & & \\ \underline{6x^2 - 3x} & & \\ 2x - 1 & & \\ \underline{2x - 1} & & \\ 0. & & \end{array}$$

Lösung 80.

$$\begin{array}{rcl} 2x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2 : x^2 - 3x + 1 & = & 2x^3 + x^2 + 3x + 4 + \frac{4x-2}{x^2-3x+1} \\ \underline{2x^5 - 6x^4 + 2x^3} & & \\ x^4 - 4x^2 - 5x + 2 & & \\ \underline{x^4 - 3x^3 + x^2} & & \\ 3x^3 - 5x^2 - 5x + 2 & & \\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} & & \\ 4x^2 - 8x + 2 & & \\ \underline{4x^2 - 12x + 4} & & \\ 4x - 2 & & \end{array}$$

Lösung 81.

$$\begin{array}{rcl} 8x^6 : 2x^2 - 1 & = & 4x^4 + 2x^2 + 1 + \frac{1}{2x^2-1} \\ \underline{8x^6 - 4x^4} & & \\ 4x^4 & & \\ \underline{4x^4 - 2x^2} & & \\ 2x^2 & & \\ \underline{2x^2 - 1} & & \\ 1 & & \end{array}$$

Lösung 82. Man kann die Aufgabe ohne Polynomdivision lösen.

$$\begin{aligned} 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 3 &= x^2(3x^3 + x^2 - 2x - 7) + x - 3 \\ &= 3x^2 \frac{3x^3 + x^2 - 2x - 7}{3} + x - 3. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 3}{3x^2} = \frac{3x^3 + x^2 - 2x - 7}{3} + \frac{x - 3}{3x^2}.$$

10 Ungleichungen

Lösung 83. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}4x &> 3 \\ x &> 3/4.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{L} = \{x \mid x > 3/4\}.$$

Lösung 84. Umformen ergibt

$$x^2 + x - 6 \geq 0.$$

Berechnen der Nullstellen.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3.\end{aligned}$$

Der führende Koeffizient der Parabel ist positiv, daher ist diese nach oben geöffnet. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist folglich

$$\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -3 \vee x \geq 2\}.$$

Lösung 85. Fallunterscheidung.

- Fall 1:

$$\begin{aligned}3x + 2 &\geq 0 \\ 3x &\geq -2 \\ x &\geq -2/3.\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung

$$\begin{aligned}3x + 2 &< 7 \\ 3x &< 5 \\ x &< 5/3.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1 &= \{x \mid x \geq -2/3 \wedge x < 5/3\} \\ &= \{x \mid -2/3 \leq x < 5/3\}.\end{aligned}$$

- Fall 2:

$$\begin{aligned}3x + 2 &< 0 \\ 3x &< -2 \\ x &< -2/3.\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} -(3x+2) &< 7 \\ 3x+2 &> -7 \\ 3x &> -9 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 &= \{x \mid x < -2/3 \wedge x > -3\} \\ &= \{x \mid -3 < x < -2/3\}. \end{aligned}$$

Die gesamte Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \mid -3 < x < 5/3\}.$$

Schnellerer Rechenweg:

$$\begin{aligned} |3x+2| &< 7 \\ |x+2/3| &< 7/3 \\ |x-(-2/3)| &< 7/3. \end{aligned}$$

Somit muss der Abstand zwischen x und $-2/3$ kleiner als $7/3$ sein, d.h. x muss größer als

$$-2/3 - 7/3 = -3$$

und kleiner als

$$-2/3 + 7/3 = 5/3$$

sein. Damit ist

$$\mathbb{L} = \{x \mid -3 < x < 5/3\}.$$

Lösung 86. Fallunterscheidung.

- Fall 1:

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -1. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} x+1 &> 3x-1 \\ 2 &> 2x \\ x &< 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{L}_1 = \{x \mid x \geq -1 \wedge x < 1\}$$

- Fall 2:

$$\begin{aligned}x + 1 &< 0 \\x &< -1.\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Ungleichung

$$\begin{aligned}-(x + 1) &> 3x - 1 \\-x - 1 &> 3x - 1 \\0 &> 4x \\x &< 0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{L}_2 = \{x \mid x < -1 \wedge x < 0\} = \{x \mid x < -1\}.$$

Die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist folglich

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \mid x < 1\}.$$

11 Summen

Lösung 87.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^4 \frac{(-1)^{i+1}}{2^i} &= \underbrace{\frac{(-1)^1}{2^0}}_{i=0} + \underbrace{\frac{(-1)^2}{2^1}}_{i=1} + \underbrace{\frac{(-1)^3}{2^2}}_{i=2} + \underbrace{\frac{(-1)^4}{2^3}}_{i=3} + \underbrace{\frac{(-1)^5}{2^4}}_{i=4} \\
 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \\
 &= \frac{-16 + 8 - 4 + 2 - 1}{16} \\
 &= -\frac{11}{16}.
 \end{aligned}$$

Lösung 88.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2^1} &= \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
 \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
 \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.
 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$S = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Da

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

Lösung 89.

$$\begin{aligned}
 (e^x)' &= \left(1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right)' \\
 &= 0 + \frac{1}{1} + \frac{2x^1}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\
 &= 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\
 &= e^x.
 \end{aligned}$$

Lösung 90. Sei

$$S = 1 + x + x^2 + x^2 + x^4 + x^5.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} xS &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\ S - xS &= 1 + x + x^2 + x^2 + x^4 + x^5 - (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 + x^4 + x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 \\ &= 1 - x^6 \\ S(1 - x) &= 1 - x^6 \\ S &= \frac{1 - x^6}{1 - x}. \end{aligned}$$

Sei

$$S = \sum_{i=0}^n x^i.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} xS &= x \sum_{i=0}^n x^i = \sum_{i=0}^n x x^i = \sum_{i=0}^n x^{i+1} \\ &= x^1 + x^2 + \dots + x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \\ S - xS &= \sum_{i=0}^n x^i - \sum_{i=1}^{n+1} x^i = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \\ S(1 - x) &= 1 - x^{n+1} \\ S &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Lösung 91.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i} &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^i \\ &= \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} \\ &= \frac{1 - 1/3^{n+1}}{2/3} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Da

$$\frac{1}{3^{n+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{2}.$$

Lösung 92.

$$\begin{aligned} & -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^i}{2^i} \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^i \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^i \\ &= - \frac{1}{1 - (-1/2)} \\ &= - \frac{1}{1 + 1/2} \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

12 Binomialkoeffizienten

Lösung 93.

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n} &= (n-1)! \\ (n-1)!n &= n! \\ k!(k+1) &= (k+1)! \\ \frac{k+1}{(k+1)!} &= \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Lösung 94.

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10!}{2!8!} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Lösung 95. Es ist leichter, die 4 Spieler auszuwählen, die nicht in die Mannschaft kommen.

- Für die Auswahl des ersten Spielers hat man 15 Möglichkeiten.
- Für die Auswahl des zweiten Spielers hat man 14 Möglichkeiten.
- Für die Auswahl des dritten Spielers hat man 13 Möglichkeiten.
- Für die Auswahl des vierten Spielers hat man 12 Möglichkeiten.

Somit gibt es

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$

Möglichkeiten für die Auswahl der 4 Spieler. Allerdings spielt bei dieser Form der Auswahl die Reihenfolge eine Rolle. Die Auswahl der Spieler

$$13, 2, 7, 9 \text{ bzw. } 2, 9, 7, 13$$

wird als 2 Möglichkeiten gezählt, obwohl die gleichen Spieler gewählt wurden. Da es $4!$ Möglichkeiten gibt, die 4 ausgewählten Spieler anzuordnen, ist die tatsächliche Anzahl der Möglichkeiten, 4 Spieler (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen, nur

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = 1365.$$

Erweitert man mit $11!$ erhält man

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{4! 11!} = \frac{15!}{4! 11!} = \binom{15}{4} = \binom{15}{11}.$$

Lösung 96.

- Für jeden Streifen gibt es 7 Möglichkeiten, daher sind $7^3 = 343$ Flaggen möglich.

- Da die drei Streifen unterschiedliche Farben haben müssen, gibt es für den ersten Streifen 7 Möglichkeiten, für den zweiten 6 und für den dritten noch 5 Möglichkeiten. Damit gibt es $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Möglichkeiten.
- Hat ein Land 3 unterschiedliche Farben ausgewählt, gibt es $3!$ Möglichkeiten, diese anzuordnen. Diese sind nun jedoch nicht mehr zulässig. Damit reduzieren sich die bisher erlaubten Möglichkeiten um Faktor $3!$. Somit gibt es nun noch

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! 4!} = \frac{7!}{3! 4!} = \binom{7}{3} = 35$$

Möglichkeiten.

- Mit 8 Farben und 6 Streifen gibt es

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Möglichkeiten. Das reicht zwar für derzeit 27 Mitgliedsstaaten, nicht aber für die Beitrittskandidaten.

Lösung 97.

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Lösung 98. Zunächst werden die beiden Summanden vereinfacht. Ziel ist es, in beiden Summanden den Nenner $k!(n-k)!$ zu erhalten, so dass die Brüche leicht addiert werden können.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k! \frac{(n-k)!}{n-k}} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{\frac{k!}{k}(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

13 Funktionen

Lösung 99. Keine Funktion, da es ein Element aus A gibt, dem durch f kein Funktionswert zugeordnet wird.

Lösung 100. Es handelt sich um eine Funktion, da jedem Element aus A genau ein Element aus B zugeordnet wird.

Lösung 101. Es handelt sich um eine Funktion, da jedem Element aus A genau ein Element aus B zugeordnet wird.

Lösung 102. Keine Funktion, da es ein Element aus A gibt, dem durch f mehr als ein Element aus B zugeordnet wird.

14 Zusammengesetzte Funktionen

Lösung 103.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 3\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \cos\left(\frac{1}{x} + 1\right) \\ g(f(x)) &= g(3x + \cos(x)) = \frac{1}{3x + \cos(x)} + 1. \end{aligned}$$

Lösung 104.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x \sin(1/x)) = \frac{x \sin(1/x)}{x \sin(1/x) + 1} \\ g(f(x)) &= g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1} \sin\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right) = \frac{x}{x+1} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right). \end{aligned}$$

Lösung 105.

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= g\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \sin\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right) \\ f(g(h(x))) &= f\left(\sin\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)\right) = \left(\sin\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right) + 1\right)^2. \end{aligned}$$

Lösung 106. Mit

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x + 1 \\ f(x) &= \sin(x) - 3 \end{aligned}$$

gilt

$$f(g(x)) = f(2x + 1) = \sin(2x + 1) - 3 = h(x).$$

Lösung 107. Da $\sigma > 0$ ist $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Damit ist

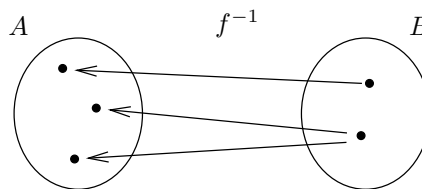
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} f_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= f_{\mu,\sigma}(x). \end{aligned}$$

15 Umkehrfunktion

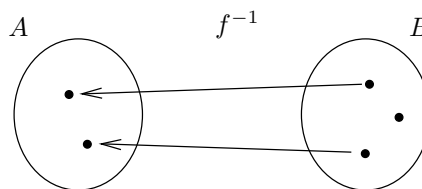
Lösung 108. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(-2) &= 3 \\ f^{-1}(4) &= 4. \end{aligned}$$

Lösung 109. Die Funktion hat keine Umkehrfunktion, da sie nicht injektiv ist. Dreht man die Pfeile um, entsteht keine Funktion von B nach A , da einem Element $y \in B$ zwei verschiedene Elemente aus A zugewiesen werden, d.h. $f^{-1}(y)$ wäre nicht eindeutig.



Lösung 110. Die Funktion hat keine Umkehrfunktion, da sie nicht surjektiv ist. Dreht man die Pfeile um, entsteht keine Funktion von B nach A , da einem Element $y \in B$ kein Element aus A zugewiesen wird, d.h. $f^{-1}(y)$ wäre nicht definiert.



Lösung 111.

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= -1 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= -2 \end{aligned}$$

Man sieht somit, dass keinen zwei unterschiedlichen $x \in \mathbb{N}$ der selbe Funktionswert zugeordnet wird, d.h. f ist injektiv.

Weiterhin gibt es zu jedem $y \in \mathbb{Z}$ ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = y$, d.h. f ist surjektiv.

Folglich ist f bijektiv. Man hat also eine 1:1 Zuordnung von Elementen aus $\mathbb{N}$ zu Elementen aus $\mathbb{Z}$ und damit sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleich mächtig.

Für die Umkehrfunktion gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= 1 \\ f^{-1}(1) &= 2 \\ f^{-1}(-1) &= 3 \\ f^{-1}(2) &= 4 \\ f^{-1}(-2) &= 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$f^{-1} \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{falls } y > 0 \\ -2y + 1 & \text{falls } y \leq 0. \end{cases}$$

Lösung 112. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in \mathbb{R}_0^-, \quad y \in \mathbb{R}_0^-$$

und

$$y = -x^2.$$

Für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$f^{-1}(y) = x.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y :

$$-y = x^2.$$

Da beide Seiten nicht negativ sind, kann die Wurzel gezogen werden.

$$\sqrt{-y} = \sqrt{x^2}.$$

Da $x \leq 0$ ist, gilt

$$\sqrt{x^2} = -x.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \sqrt{-y} &= -x \\ x &= -\sqrt{-y}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^-, \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}.$$

Lösung 113. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in \mathbb{R}_0^+, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y \geq 1$$

und

$$y = x^2 + 1.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y :

$$\begin{aligned} x^2 &= y - 1 \\ x &= \pm \sqrt{y - 1}. \end{aligned}$$

Da $y \geq 1$, ist die Wurzel definiert. Da $x \in \mathbb{R}_0^+$, gilt

$$x = \sqrt{y - 1}.$$

Damit ist

$$f^{-1} \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}.$$

Lösung 114. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^-$$

und

$$y = -3e^{1-2x}.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y :

$$-\frac{y}{3} = e^{1-2x}.$$

Da $y \in \mathbb{R}^-$, ist $-y/3$ positiv und $\ln(-y/3)$ definiert. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \ln\left(-\frac{y}{3}\right) &= 1 - 2x \\ \ln(-y) - \ln(3) &= 1 - 2x \\ 2x &= 1 + \ln(3) - \ln(-y) \\ x &= \frac{1}{2}(1 + \ln(3) - \ln(-y)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(1 + \ln(3) - \ln(-y)).$$

Lösung 115. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in \mathbb{R}_0^+, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

und

$$y = \sqrt{\ln(2x+1)}.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y . Da beide Seiten nicht-negativ sind, kann man quadrieren ohne dass sich die Lösungsmenge der Gleichung ändert und erhält

$$\begin{aligned} y^2 &= \ln(2x+1) \\ e^{(y^2)} &= 2x+1 \\ e^{(y^2)} - 1 &= 2x \\ x &= \frac{1}{2} \left(e^{(y^2)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \left(e^{(y^2)} - 1 \right).$$

Lösung 116. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 2]$$

und

$$y = 1 + \sin(\pi(x - 1/2)).$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y .

$$y - 1 = \sin(\pi(x - 1/2)).$$

Da $y - 1 \in [-1, 1]$ ist $\arcsin(y - 1)$ definiert.

Da $\pi(x - 1/2) \in [-\pi/2, \pi/2]$, ist

$$\arcsin(\sin(\pi(x - 1/2))) = \pi(x - 1/2).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \arcsin(y - 1) &= \pi(x - 1/2) \\ \frac{1}{\pi} \arcsin(y - 1) &= x - 1/2 \\ x &= \frac{1}{\pi} \arcsin(y - 1) + 1/2. \end{aligned}$$

und

$$f^{-1} \in [0, 2] \rightarrow [0, 1], \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{\pi} \arcsin(y - 1) + 1/2.$$

Lösung 117. Sei $f(x) = y$, d.h.

$$x \in]0, 1], \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

und

$$y = (\ln(x))^2.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y . Da beide Seiten der Gleichung nicht negativ sind, kann man die Wurzel ziehen.

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= \sqrt{(\ln(x))^2} \\ \sqrt{y} &= |\ln(x)|.\end{aligned}$$

Da $x \in]0, 1]$ ist $\ln(x) \leq 0$ und folglich $|\ln(x)| = -\ln(x)$. Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= -\ln(x) \\ \ln(x) &= -\sqrt{y} \\ x &= e^{-\sqrt{y}}.\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist daher

$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow]0, 1], \quad f^{-1}(y) = e^{-\sqrt{y}}.$$

Sei $g(x) = y$, d.h.

$$x \in [1, \infty[, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

und

$$y = (\ln(x))^2.$$

Berechnung von x in Abhängigkeit von y . Da beide Seiten der Gleichung nicht negativ sind, kann man die Wurzel ziehen.

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= \sqrt{(\ln(x))^2} \\ \sqrt{y} &= |\ln(x)|.\end{aligned}$$

Da $x \in [1, \infty[$ ist $\ln(x) \geq 0$ und folglich $|\ln(x)| = \ln(x)$. Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= \ln(x) \\ x &= e^{\sqrt{y}}.\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist daher

$$g^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [1, \infty[, \quad g^{-1}(y) = e^{\sqrt{y}}.$$

16 Trigonometrie

Lösung 118.

- Wenn sich das vordere Zahnrad um Winkel α_1 (im Bogenmaß) dreht, ist die Länge des entsprechenden Kreissegments $r_1\alpha_1$. Dies ist gleich der Translation der Kette, die wiederum gleich dem Kreissegment des hinteren Zahnrads ist. Somit hat man

$$\begin{aligned} r_1\alpha_1 &= r_2\alpha_2 \\ \alpha_2 &= \frac{r_1}{r_2}\alpha_1. \end{aligned}$$

- Das Drehmoment im vorderen Zahnrad ist

$$M_1 = F\ell.$$

Da dieses Moment auf die Kette übertragen wird, gilt für die Kraft F' auf der Kette

$$\begin{aligned} F\ell &= F'r_1 \\ F' &= \frac{\ell}{r_1}F. \end{aligned}$$

Diese Kraft wirkt nun tangential auf das hintere Zahnrad, so dass man dort das Drehmoment

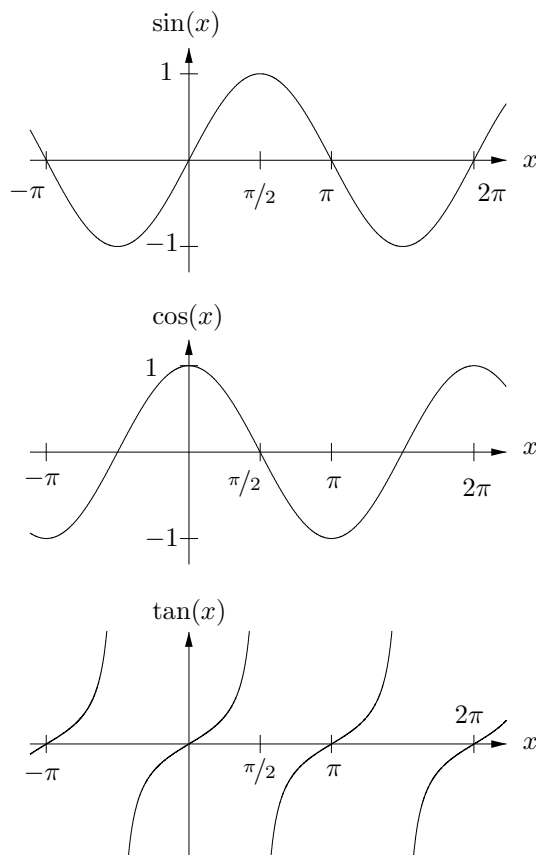
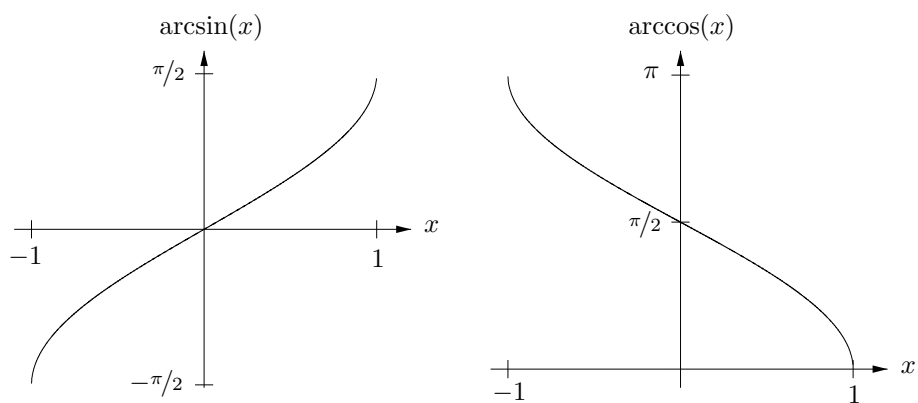
$$M_2 = F'r_2 = \ell \frac{r_2}{r_1}F$$

erhält.

- Für die Kraft F'' gilt

$$\begin{aligned} M_2 &= F''r_3 \\ F'' &= \frac{1}{r_3}M_2 = \frac{\ell r_2}{r_3 r_1}F. \end{aligned}$$

Lösung 119.

**Lösung 120.**

Lösung 121. Verschiebt man die Funktion um eine Einheit nach unten, erkennt man dass es eine negierte Sinusfunktion mit Amplitude 2 ist. Die

Periodendauer ist $T = \pi$, folglich ist die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2$.
Somit erhält man den Term

$$f(x) = -2\sin(2x) + 1.$$

Lösung 122. Es handelt sich um eine um eine Einheit nach oben und $\pi/3$ nach rechts verschobene Cosinusfunktion. Die Periodendauer ist $T = 2\pi$ und somit die Kreisfrequenz $\omega = 1$. Damit ist

$$f(x) = \cos(x - \pi/3) + 1.$$

Lösung 123. Die Cosinusfunktion hat ihre Nullstellen bei $\pi/2 + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Somit ist

$$\cos(1/x) = 0$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x &= \frac{1}{\pi/2 + k\pi} = \frac{1}{\pi(k + 1/2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösung 124.

$$\sin(x) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Lösung 125.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Lösung 126.

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Lösung 127. Es gilt

$$\sin(x) = 1$$

genau dann wenn

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

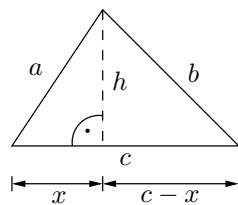
Damit ist

$$\sin(3x - 2) = 1$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3x &= 2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right). \end{aligned}$$

Lösung 128.



Mit der Hilfsgröße h gilt

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= a^2 \\ (c - x)^2 + h^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die Gleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} x^2 - (c - x)^2 &= a^2 - b^2 \\ x^2 - c^2 + 2cx - x^2 &= a^2 - b^2 \\ 2cx - c^2 &= a^2 - b^2 \\ 2cx &= a^2 - b^2 + c^2 \\ x &= \frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Lösung 129.

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{\sin^2(\alpha)} &= \sqrt{2/3} \\ |\sin(\alpha)| &= \sqrt{2/3} \\ \sin(\alpha) &= \pm \sqrt{2/3}. \end{aligned}$$

Lösung 130.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} \\
&= \sqrt{\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha)}} \\
&= \frac{1}{|\cos(\alpha)|}.
\end{aligned}$$

Lösung 131.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x) - 1} - \frac{1}{1 + \cos(x)} &= \frac{1 + \cos(x) - (\cos(x) - 1)}{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)} \\
&= \frac{1 + \cos(x) - \cos(x) + 1}{\cos^2(x) - 1} \\
&= \frac{2}{-\sin^2(x)} \\
&= -\frac{2}{\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

Lösung 132. Im Spezialfall $\alpha = \beta$ folgt aus den Additionstheoremen

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos^2(\alpha)$, erhält man

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

Lösung 133.

$$\frac{\cos(x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} = \frac{1}{2 \sin(x)}.$$

Lösung 134.

$$\begin{aligned}
& \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
&= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(-\beta) + \cos(\alpha) \sin(-\beta) \\
&= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
&= 2 \sin(\alpha) \cos(\beta).
\end{aligned}$$

Lösung 135. Mit der Substitution

$$y = x^2 - 1$$

erhält man die Gleichung

$$\cos(y) = 1.$$

Die Lösungen sind

$$y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rücksubstitution.

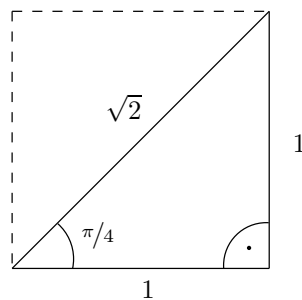
$$\begin{aligned}
x^2 - 1 &= 2k\pi \\
x^2 &= 2k\pi + 1
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat nur dann Lösungen wenn $2k\pi + 1 \geq 0$ bzw. $k \geq 0$. In diesem Fall ist

$$x = \pm \sqrt{2k\pi + 1}$$

und die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{\pm \sqrt{2k\pi + 1} \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Lösung 136.

In einem Quadrat mit Seitenlänge 1 hat die Diagonale einen Steigungswinkel $\pi/4$. Es entsteht somit ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Katheten der Länge 1. Mit dem Satz des Pythagoras hat die Hypotenuse die Länge

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

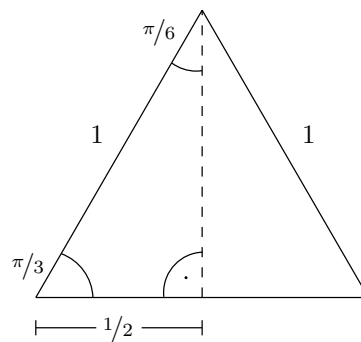
Damit gilt

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}.$$

Lösung 137. In einem gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel $\pi/3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien alle Seitenlängen gleich 1. Fällt man das Lot von einer Spitze auf die gegenüberliegende Seite, wird diese Seite halbiert und in der Spitze entstehen zwei gleich große Winkel $\pi/6$. Man erhält ein rechtwinkliges Dreieck mit

$$\cos(\pi/3) = \frac{1/2}{1} = 1/2$$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1/2}{1} = 1/2.$$



17 Differentialrechnung

Lösung 138.

$$f'(x) = e^x \cos(x) + e^x(-\sin(x)) = e^x(\cos(x) - \sin(x)).$$

Lösung 139.

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Lösung 140.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \\ f'(x) &= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Lösung 141.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-x} \right) \cos(\sqrt{x} - e^{-x}).$$

Lösung 142.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ f'(x) &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Lösung 143.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \cos^2(x) + \sin(x) 2 \cos(x) (-\sin(x)) \\ &= \cos^3(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x). \end{aligned}$$

Lösung 144.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)(e^x+1)^2 - \sin(x)2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{\cos(x)(e^x+1) - 2e^x \sin(x)}{(e^x+1)^3}. \end{aligned}$$

Lösung 145.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\sin(x) + 2)^{-3/2} \\
 f'(x) &= -\frac{3}{2}(\sin(x) + 2)^{-5/2} \cos(x) \\
 &= -\frac{3 \cos(x)}{2\sqrt{(\sin(x) + 2)^5}}.
 \end{aligned}$$

Lösung 146.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 f'(x) &= \frac{2 \sin(x) \cos(x) \cos^2(x) - \sin^2(x) 2 \cos(x) (-\sin(x))}{\cos^4(x)} \\
 &= 2 \frac{\sin(x) \cos^3(x) + \sin^3(x) \cos(x)}{\cos^4(x)} \\
 &= 2 \frac{\sin(x) \cos^2(x) + \sin^3(x)}{\cos^3(x)} \\
 &= 2 \sin(x) \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^3(x)} \\
 &= \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} \\
 &= \frac{2 \tan(x)}{\cos^2(x)}.
 \end{aligned}$$

Lösung 147.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^x \sin(x) + x(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) \\
 &= e^x \sin(x) + x e^x \sin(x) + x e^x \cos(x) \\
 &= e^x (\sin(x) + x \sin(x) + x \cos(x)).
 \end{aligned}$$

Lösung 148.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 \\
 &= \ln(x) + 1 - 1 \\
 &= \ln(x).
 \end{aligned}$$

Damit weiß man bereits, dass $x \ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$ ist.

Lösung 149.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \\
 f'(x) &= \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}.
 \end{aligned}$$

Lösung 150.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\ln(a)}{\ln(x)} \\
 f'(x) &= \frac{-\ln(a) \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = -\frac{\ln(a)}{x \ln(x)^2}.
 \end{aligned}$$

Lösung 151.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{e^{\ln(3^x)}} = \sqrt{e^{x \ln(3)}} = \left(e^{x \ln(3)}\right)^{1/2} = e^{\frac{x \ln(3)}{2}} \\
 f'(x) &= e^{\frac{x \ln(3)}{2}} \frac{\ln(3)}{2} = \sqrt{3^x} \frac{\ln(3)}{2}.
 \end{aligned}$$

Lösung 152.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\ln(2^{\sin(x)})} = e^{\sin(x) \ln(2)} \\
 f'(x) &= e^{\sin(x) \ln(2)} \ln(2) \cos(x) = 2^{\sin(x)} \ln(2) \cos(x).
 \end{aligned}$$

Lösung 153.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2 + 2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 + 2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + 2\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + 2\Delta x + 2 \\
 &= 2x + 2.
 \end{aligned}$$

Lösung 154.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

Lösung 155.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

Lösung 156. Die Funktion $f(x)$ ist 2π -periodisch. Folglich genügt es, die Extremwerte in $[-\pi, \pi]$ zu suchen. Alle weiteren befinden sich um ganzzahlige Vielfache von 2π verschoben.

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

Diese Funktion hat ihre Nullstellen dort wo $\cos(x) = 0$ ist, d.h. bei

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Im Intervall $[-\pi, \pi]$ befinden sich somit zwei stationäre Punkte

$$\begin{aligned}
x_1 &= \pi/2 \\
x_2 &= -\pi/2.
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\sin(x) \sin^2(x) + \cos(x) 2 \sin(x) \cos(x)}{\sin^4(x)} \\
&= \frac{\sin^3(x) + 2 \sin(x) \cos^2(x)}{\sin^4(x)}.
\end{aligned}$$

Auswerten bei den stationären Punkten ergibt

$$\begin{aligned}
f''(\pi/2) &= 1 \\
f''(-\pi/2) &= -1.
\end{aligned}$$

Folglich ist x_1 ein Minimum und x_2 ein Maximum. Damit hat man lokale Minima bei

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

und lokale Maxima bei

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung 157. Die Nettostromstärke, die in den See fließt, ist

$$i_{\text{zu}}(t) - i_{\text{ab}}(t).$$

Dies ist gleich der zeitlichen Änderung der Wassermenge im See, d.h. $q'(t)$.
Damit hat man

$$\begin{aligned} i_{\text{zu}}(t) - i_{\text{ab}}(t) &= q'(t) \\ i_{\text{ab}}(t) &= i_{\text{zu}}(t) - q'(t). \end{aligned}$$

18 Integralrechnung

Lösung 158.

$$F(x) = \frac{8 \sin(3-2x)}{-2} = -4 \sin(3-2x) = 4 \sin(2x-3).$$

Lösung 159.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax+b} \, dx &= \int (ax+b)^{1/2} \, dx \\ &= \frac{1}{3/2} (ax+b)^{3/2} \frac{1}{a} + C \\ &= \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C. \end{aligned}$$

Lösung 160.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x} \, dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2+1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 x \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} [x^2]_1^2 + [\ln(|x|)]_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (4-1) + \ln(2) - \ln(1) \right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Lösung 161. Substitution

$$u = 1 + e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{1}{e^x} du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx &= \int \frac{e^x}{u} \underbrace{\frac{1}{e^x} du}_{dx} \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln(|u|) \\ &= \ln(|1+e^x|) \\ &= \ln(1+e^x) \end{aligned}$$

da $1+e^x$ nie negativ ist.

Lösung 162. Die Regel der partiellen Integration besagt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ g'(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ g(x) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) &= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x)dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C. \end{aligned}$$

Lösung 163.

$$\begin{aligned} \int (2f(x-1) - g(3x+1))dx &= 2 \int f(x-1)dx - \int g(3x+1)dx \\ &= 2F(x-1) - \frac{1}{3}G(3x+1). \end{aligned}$$

Lösung 164. Substitution

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

ergibt

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2)dx &= \int x \sin(u) \underbrace{\frac{1}{2x}du}_{dx} \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(u)du \\ &= -\frac{1}{2} \cos(u) + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C. \end{aligned}$$

Lösung 165. Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)}du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}} dx &= \int \frac{\cos(x)}{e^u} \frac{1}{\cos(x)} du \\
 &= \int e^{-u} du \\
 &= -e^{-u} + C \\
 &= -e^{-\sin(x)} + C.
 \end{aligned}$$

Somit ist eine Stammfunktion

$$F(x) = -e^{-\sin(x)}.$$

Lösung 166.

- Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} du$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \int \sin(x) \cos(x) dx &= \int u \cos(x) \underbrace{\frac{1}{\cos(x)} du}_{dx} \\
 &= \int u du \\
 &= \frac{1}{2} u^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sin^2(x).
 \end{aligned}$$

- Substitution

$$u = \cos(x), \quad \frac{du}{dx} = -\sin(x), \quad dx = -\frac{1}{\sin(x)} du$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \int \sin(x) \cos(x) dx &= \int \sin(x) u \underbrace{\left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du}_{dx} \\
 &= -\int u du \\
 &= -\frac{1}{2} u^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \cos^2(x).
 \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse sind Stammfunktionen von $\sin(x) \cos(x)$ da

$$\frac{1}{2} \sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos^2(x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x).$$

Die beiden Funktionen unterscheiden sich somit nur um einen konstanten Summanden $1/2$, der beim Ableiten wegfällt.

Lösung 167. Die Funktion $1/x^3$ ist unstetig an der Stelle $x = 0$. Folglich berechnet man zuerst für ein $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx &= \int_{\varepsilon}^1 x^{-3} dx \\ &= \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

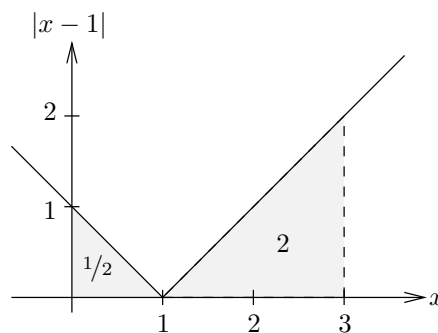
Anschließend nimmt man den Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right) = \infty.$$

Lösung 168.

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(2x^3) &= \frac{1}{3} x^3 \ln(2x^3) - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{2x^3} 6x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln(2x^3) - \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln(2x^3) - \frac{1}{3} x^3 \\ &= \frac{1}{3} x^3 (\ln(2x^3) - 1). \end{aligned}$$

Lösung 169. Am einfachsten löst man die Aufgabe mit einem Bild. Die Funktion $|x - 1|$ ist die Betragsfunktion um 1 nach rechts verschoben. Damit sieht man, dass der Flächeninhalt unter $|x - 1|$ zwischen $x = 0$ und $x = 3$ gleich $1/2 + 2$ sein muss.



Rechnerisch würde man wie folgt vorgehen: Um die Betragsstriche loszuwerden, macht man eine Fallunterscheidung. Es gilt

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Damit kann das Integral in zwei Teilintegrale zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x - 1| dx &= \int_0^1 -(x - 1) dx + \int_1^3 (x - 1) dx \\ &= -\int_0^1 (x - 1) dx + \int_1^3 (x - 1) dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 \\ &= -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{8}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} + 2. \end{aligned}$$

Lösung 170. Eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x^2}$$

erhält man mit Substitution:

$$u = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad dx = -x^2 du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\sin(u)}{x^2} \underbrace{(-x^2 du)}_{dx} \\ &= -\int \sin(u) du \\ &= \cos(u) + C \\ &= \cos(1/x) + C. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx &= [\cos(1/x)]_{1/\pi}^{\infty} \\ &= \cos(0) - \cos(\pi) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Lösung 171. Da die Funktion achsensymmetrisch zur y -Achse ist, gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Da nun $x \geq 0$ im gesamten Integrationsbereich ist, kann man die Betragsstriche weglassen und erhält

$$2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Die Funktion ist nicht stetig bei $x = 0$. Folglich wählt man ein $\varepsilon > 0$ und berechnet zunächst

$$\begin{aligned} 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= 4 [\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 \\ &= 4 (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) \\ &= 4 - 4\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Abschließend nimmt man den Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} 4 - 4\sqrt{\varepsilon} = 4.$$

Lösung 172. Die Wassermenge, die zwischen $t = t_0$ und $t = t_1$ geflossen ist, ist

$$\int_{t_0}^{t_1} i(t) dt.$$

Um die Wassermenge zwischen t_0 und dem variablen Zeitpunkt t zu bekommen, muss man t_1 durch t ersetzen. Da dann sowohl die Obergrenze als auch als Integrationsvariable t heißen würden und das verwirrend wäre, ist es üblich, die Integrationsvariable umzubenennen, z.B. in τ . Der Name spielt keine Rolle, da es sich um ein bestimmtes Integral handelt und am Ende für τ die Integrationsgrenzen eingesetzt werden. Man erhält dann

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau.$$