Brückenkurs Mathematik

Hochschule Heilbronn

Stand: 10. August 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

Der Begriff Menge wurde von Georg Cantor (1845–1918) eingeführt und gilt daher in der Mathematik immer noch als ziemlich "modern". Die enorme Bedeutung dieser Entdeckung wurde klar, als Leute wie Frege, Russel und Whitehead die *gesamte* Mathematik systematisch auf Mengen und Logik neu aufgebaut haben. Alles in der Mathematik lässt sich somit auf ganz wenige, einfache Mechanismen reduzieren und damit viel leichter verstehen.

Cantor erklärt den Begriff Menge wie folgt.

Definition 1.1 (Menge)
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung.

Der Zweck einer Definition ist die eindeutige Erklärung eines neuen Begriffs, in diesem Fall "Menge". Allerdings setzt dies voraus, dass die darin verwendeten Begriffe bereits erklärt wurden. Dies ist hier natürlich nicht der Fall: Die Begriffe "Zusammenfasung" oder "Denken" wurden nicht definiert so muss man halt hoffen, dass der Leser sich etwas darunter vorstellen kann. Tatsächlich handelt es sich hier um ein Henne-Ei Problem: Solange man noch keine Begriffe definiert hat, ist es unmögliche neue Begriffe zu definieren — also womit fängt man an?

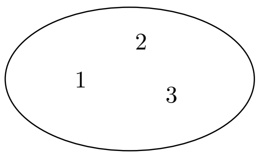
Der Ausweg ist, möglichst wenige, einfache Grundbegriffe zu finden, die hoffentlich intuitiv klar sind und mit denen dann alle weiteren Begriffe definiert werden können. Ein solcher Grundbegriff ist die Menge.

1.1 Aufzählende und beschreibende Form

Die Zahlen $1, 2$ und 3 sind zweifelsfrei Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung. Man kann sie zu einer Menge M zusammenfassen und schreibt hierfür

$$M = \{1, 2, 3\}.$$

Die Objekte, die zusammengefasst werden, werden aufgezählt, durch Komma getrennt und in geschweifte Klammern gesetzt. Man nennt diese Schreibweise daher "aufzählende Form". Man kann diese Menge auch grafisch darstellen:



Dass die Zahl 3 in dieser Zusammenfassung ist, wird mit "3 ist Element von M" ausgedrücht und durch

$$3 \in M$$

abgekürzt. Die Zahl 5 ist kein Element von M, kurz

$$5 \quad \notin \quad M.$$

Interessant sind Mengen von Zahlen.

- Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$$\mathbb{N}_0 \quad = \quad \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Dies sind alle Zahlen, die sich als Bruch von zwei ganzen Zahlen darstellen lassen. Es gilt z.B.

$$2/3 \in \mathbb{Q}, \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Dies sind alle rationalen Zahlen und alle irrationale Zahlen wie z.B. π, e, $\sqrt{2}$, usw.

Eine besonders interessante Menge ist die leere Menge, d.h. die Menge, die überhaupt keine Elemente hat. Sie wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet. Beachten Sie, dass die leere Menge nicht "nichts" ist, sondern immer noch eine Zusammenfassung. Ein leerer Korb ist ja immerhin noch ein Korb, auch wenn er nichts enthält.

Bei Mengen mit vielen (oder gar unendlich vielen) Elementen ist es problematisch, alle Elemente aufzuzählen. Nehmen wir z.B. die Menge aller Primzahlen, die größer als 100 sind. Hierfür bietet sich die beschreibende Form an:

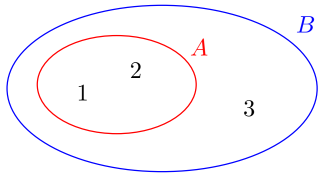
$$M \quad = \quad \{x \,|\, x \text{ ist Primzahl und } x > 100\}.$$

Man verwendet ein Variablensymbol x und eine Aussage, in der x auftritt. Alle Werte von x, für die diese Aussage wahr ist, sind die Elemente der Menge. Man liest diesen Mengenausdruck

Menge aller x für die gilt: x ist Primzahl und x ist größer 100.

1.2 Teilmengen

Beispiel 1.2 Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$.



Da jedes Element von A auch Element von B ist, sagt man A ist Teilmenge von B.

Definition 1.3 (Teilmenge)
A heißt Teilmenge von B wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Dies wird abgekürzt durch

$$A \subseteq B.$$

Für die Zahlenmengen gilt z.B.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Tatsächlich ist laut Definition 1.3 jede Menge Teilmenge von sich selbst, d.h. es gilt z.B. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$.

1.3 Mengengleichheit

Zwei Mengen heißen gleich wenn sie die selben Elemente haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Element der einen Menge auch Element der anderen ist und umgekehrt. Mit Hilfe von Teilmengen lässt sich die Mengengleichheit daher wie folgt definieren.

Definition 1.4 (Mengengleichheit)
Zwei Mengen A und B sind gleich, d.h. $A = B$ wenn

$$A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Aus Definition 1.4 folgt z.B.

$$\{1, 2, 3\} \quad = \quad \{3, 1, 2\}.$$

Mengen wurden als “Zusammenfassung” definiert. Nach der Definition der Mengengleichheit ist nun klar, dass damit eine *ungeordnete* Zusammenfassung gemeint ist, d.h. es ist keine Reihenfolge der Elemente festgelegt. Weiterhin folgt z.B.

$$\{1, 2, 2\} \quad = \quad \{1, 2\}.$$

Ein Objekt kann also nicht mehrfach in der Zusammenfassung auftreten.

1.4 Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Mengendifferenz

Es gibt drei grundlegende Rechenoperationen auf Mengen. Seien

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{3, 6\}.$$

Vereinigungsmenge. Nehmen wir alle Elemente von A und von B zusammen und erzeugen daraus eine neue Menge, erhalten wir die Vereinigungsmenge von A und B, geschrieben $A \cup B$. In unserem Beispiel ist

$$A \cup B \quad = \quad \{2, 3, 5, 6\}.$$

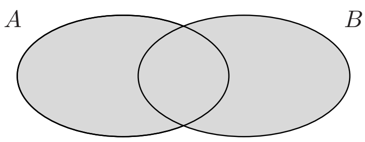
Schnittmenge. Nehmen wir nur die Elemente, die sowohl in A als auch in B sind, erhalten wir die Schnittmenge von A und B, geschrieben $A \cap B$. In unserem Beispiel ist

$$A \cap B \quad = \quad \{3\}.$$

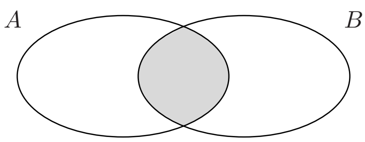
Mengendifferenz. Nehmen wir die Elemente, die zwar in A sind, aber nicht in B, derhalten wir die Mengendifferenz von A und B, geschrieben $A \setminus B$. in unserem Beispiel ist

$$A \setminus B \quad = \quad \{2, 5\}.$$

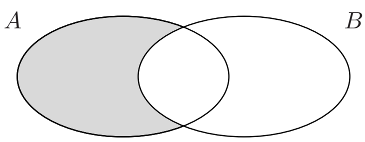
Die Mengenoperationen lassen sich durch Mengendiagramme veranschaulichen:



$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Hierbei steht $\vee$ für das aussagenlogische "oder" und $\wedge$ für das aussagenlogische "und".

Unter Verwendung der beschreibenden Form lassen sich die Mengenoperationen wie folgt definieren.

Definition 1.5 (Mengenoperationen)
Seien A, B Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.6

$$
\begin{aligned}
\{1,2\} \setminus \{2,3\} &= \{1\} \\
\{2,3\} \setminus \{1,2\} &= \{3\} \\
\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} &= \{0,-1,-2,\ldots\} \\
\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} &= \emptyset
\end{aligned}
$$

2 Terme

Terme sind die “Rechenausdrücke” mit denen wir ständig hantieren. Beispiele für Terme sind

$$
\begin{gathered}
5 \\
x \\
(5-x)y \\
\sqrt{1/2}+5 \\
\sin(\cos(e))
\end{gathered}
$$

Keine Terme sind hingegen

$$
\begin{gathered}
x+1=3 \\
2<3.
\end{gathered}
$$

In Termen sind keine Relationssymbole wie $=$ oder $<$ erlaubt. Solche Ausdrücke nennt man Formeln. Ebenfalls kein Term ist

$$\sin(x,y).$$

Bei sin handelt es sich um ein einstelliges Funktionssymbol und man darf ihm daher nicht zwei Argumente geben. Auch “sinnlose” Zeichenketten wie

$$+\sin -5$$

sind keine Terme.

Terme sind folglich Zeichenketten mit einer bestimmten Struktur. Die Zeichen, die in einem Term auftreten dürfen, können wie folgt kategorisiert werden:

Konstantensymbole sind Symbole mit einer festen Bedeutung wie 5 oder π.

Variablensymbole wirken als Platzhalter. Verwendet werden oft Buchstaben wie a, b, c, x, y, usw. Ein Variablensymbol unterscheidet sich von einem Konstantensymbol dadurch, dass es keine festgelegte Bedeutung hat.

Funktionssymbole sind z.B. sin, $+$ oder $\sqrt{\ }$. Von jedem Funktionssymbol ist festgelegt, wie viele Argumente es nimmt. So sind sin und $\sqrt{\ }$ einstellige Funktionssymbole und $+$ ein zweistelliges.

Die einfachsten Terme bestehen aus nur einem Konstanten- oder Variablensymbol. So ist z.B. 5 oder x ein Term. Mit Hilfe von Funktionssymbolen kann man Terme zu neuen Termen zusammensetzen.

Beispiel 2.1 Den Term $\sqrt{(5-x)y}$ kann man wie folgt erzeugen.

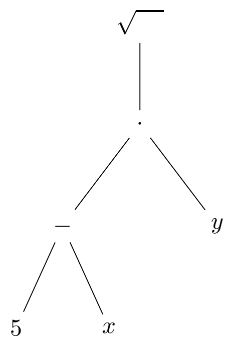
- Da 5 ein Konstantensymbol und x, y Variablensymbole sind, handelt es sich um Terme.

- Mit dem zweistelligen Funktionssymbol $-$ kann man aus 5 und x den Term
$$5 - x$$
erzeugen.
- Mit dem zweistelligen Funktionssymbol $\cdot$ kann man die Terme $5 - x$ und y zum Term
$$(5 - x)y$$
zusammensetzen. Das Multiplikationssymbol wird i.a. weggelassen. Klammern sind erforderlich, denn $5 - xy$ würde als Differenz der Terme 5 und xy interpretiert werden.
- Mit dem einstelligen Funktionssymbol $\sqrt{}$ kann aus dem vorhandenen Term $(5 - x)y$ schließlich der Term
$$\sqrt{(5 - x)y}$$
erzeugt werden.

2.1 Darstellung durch Bäume

Es ist oft hilfreich, Terme durch Bäume zu veranschaulichen. Der im vorigen Beispiel konstruierte Term sieht als Baum wie folgt aus:

$\sqrt{(5 - x)y}$:



- Die Blätter des Baums sind Konstanten- und Variablensymbole.
- Die Knoten sind Funktionssymbole.
- Die Anzahl Nachfolger eines Knotens entspricht der Stelligkeit des Funktionssymbols.
- In der Baumdarstellung sind keine Klammern erforderlich, da der Aufbau eines Terms eindeutig durch die Baumstruktur gegeben ist.

Die Teilterme eines Terms sind die Terme, die bei dessen Konstruktion aufgetreten sind. Teilterme von $\sqrt{(5 - x)y}$ sind somit
$$5,\ x,\ y,\ 5 - x,\ (5 - x)y \ \text{ und } \ \sqrt{(5 - x)y}.$$
In der Baumdarstellung erhält man die Teilterme einfach dadurch, dass man einen Knoten herausgreift und den Teilbaum ab diesem Knoten betrachtet.

2.2 Syntax und Semantik

Wie Sie sicher wissen, gilt

$$1 + 1 \quad = \quad 2.$$

Tatsächlich kann man aber auch dagegen argumentieren. Bei $1+1$ und 2 handelt es sich um Terme, die wir als Zeichenketten definiert haben. Nun besteht aber die Zeichenkette $1+1$ aus drei Zeichen, währen 2 nur aus einem Zeichen besteht. Die Zeichenketten sind somit nicht gleich und es gilt

$$1 + 1 \quad \neq \quad 2.$$

- Sofern man reine Zeichenketten betrachtet und ihre Bedeutung außer Acht lässt, spricht man von der *Syntax*.
- Andererseits kann man die Zeichen 1 und 2 auch als Zahlen eins und zwei und das Zeichen $+$ als Additionsfunktion interpretieren und stellt fest, dass die Terme $1 + 1$ und 2 den gleichen Wert zwei liefern, d.h. die gleiche Bedeutung haben. Man spricht dann von der *Semantik*.

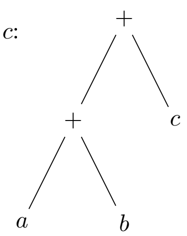
Die Terme $1 + 1$ und 2 sind damit syntaktisch unterschiedlich, aber semantisch gleich.

Bei "Rechnen" geht's um nichts anderes: Man ersetzt einen Term durch einen (syntaktisch unterschiedlichen und hoffentlich einfacheren) Term nach bestimmten Regeln, die garantieren, dass die beiden Terme semantisch gleich sind.

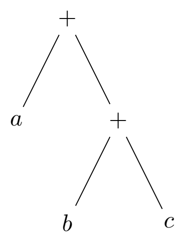
Maschinen können lediglich Zeichenketten nach festen Regeln manipulieren, d.h. arbeiten auf der rein syntaktischen Ebene. Der Mensch hingegen sucht in Zeichenketten immer sofort nach einer Bedeutung, d.h. denkt semantisch. Ein großer Teil der Informatik beschäftigt sich damit, diese Lücke zu schließen, d.h. Maschinen dazu zu bringen, wenigstens so tun tun als wären sie intelligent und würden "verstehen", was sie tun.

Beispiel 2.2 Der Term $a + b + c$ ist nicht eindeutig. Es ist nicht klar, ob $(a + b) + c$ oder $a + (b + c)$ gemeint ist. Die beiden Terme sind syntaktisch unterschiedlich.

$(a + b) + c$:



$a + (b + c)$:



Da die Bedeutung (Semantik) der Terme jedoch gleich ist, sofern man $+$ als Addition interpretiert und für a, b, c beliebige, reelle Zahlen einsetzt, sind solche Mehrdeutigkeiten unkritisch.

3 Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist definert durch

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

3.1 Rechengesetze

Zunächst betrachten wir als Funktionen auf natürlichen Zahlen nur die Addition und die Multiplikation. Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$ gelten folgende Rechengesetze:

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ ab &= ba. \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (ab)c &= a(bc). \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$(a + b)c \quad = \quad ac + bc.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1a \quad = \quad a.$$

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Reihenfolge der Ausführung von Additionen bzw. Multiplikationen irrelevant ist. Man kann somit die Klammern auch einfach weglassen und $a + b + c$ bzw. abc schreiben

Die o.g. Rechengesetze erscheinen trivial, haben aber eine enorme Bedeutung. Sie gelten nämlich nicht nur für natürliche Zahlen sondern z.B. auch für ganze, rationale, reelle und später auch für komplexe Zahlen, Polynome, Funktionen, usw. Insbesondere leiten sich auch die Regeln der Bruchrechnung vollständig aus diesen Rechengesetzen her, siehe Kapitel 5.

Richtig nützlich werden diese Rechengesetze dadurch, dass man in ihnen die Variablensymbole a, b, c durch beliebige Terme ersetzen darf und auf diese Weise unendlich viele “neue” Rechengesetze herleiten kann. Ersetzt man z.B. im Distributivgesetz

$$(a + b)c \quad = \quad ac + bc$$

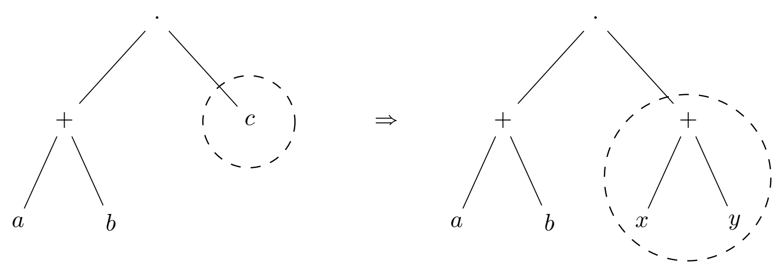
das Variablensymbol c durch den Term $x + y$, erhält man das “neue” Gesetz

$$(a + b)(x + y) \quad = \quad a(x + y) + b(x + y).$$

Wichtig ist dabei, dass man *jedes* Auftreten eines Variablensymbols durch den *selben* Term ersetzt und (falls erforderlich) diesen klammert. Hätte man in o.g. Beispiel die Klammern um $x + y$ vergessen, wäre das Ergebnis falsch:

$$(a + b)x + y \quad \neq \quad ax + y + bx + y.$$

Die Baumdarstellung ist hier vorteilhaft, da sich das Problem der Klammerung nicht stellt. Ersetzt man c in dem Term $(a+b)c$ durch den Term $x+y$ bedeutet dies, dass man an der Stelle des Blattes c den Baum $x + y$ einsetzt:



3.2 Anwenden von Rechengesetzen

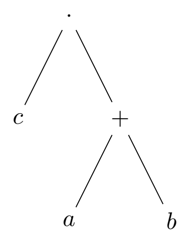
Unter dem Begriff “Rechnen” versteht man das Anwenden der Rechengesetze mit dem Ziel, Terme umzuformen und möglichst zu vereinfachen. Hierzu gibt es zwei wichtige Techniken:

Substitution. Man greift einen Teilterm heraus und ersetzt ihn durch ein neues Variablensymbol (Substitution). Auf den so vereinfachten Term können o.g. Rechengesetze oft leichter angewandt werden. Zum Schluss ersetzt man das neue Variablensymbol wieder durch den ursprünglichen Teilterm (Rücksubstitution).

Vereinfachen von Teiltermen. Man greift einen Teilterm heraus, vereinfacht ihn unter Anwendung o.g. Rechengesetze und setzt das Ergebnis wieder an der gleichen Stelle im ursprünglichen Term ein.

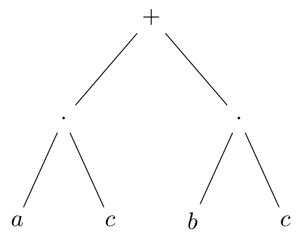
Stellt man sich Terme als Bäume vor, kann man die erste Technik als “top down” und die zweite als “bottom up” Ansatz interpretieren.

Beispiel 3.1 Gegeben sei der Term $c(a+b)$



- Substitution.

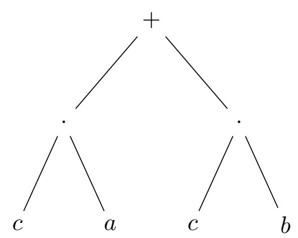
$$\begin{aligned} c(a+b) &= cu && \text{(Substitution von } a+b \text{ durch } u\text{)} \\ &= uc && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= (a+b)c && \text{(Rücksubstitution)} \\ &= ac+bc && \text{(Distributivgesetz)} \end{aligned}$$



- Der gerade konstruierte Term $ac+bc$ enthält die Teilterme ac und bc, die mit dem Kommutativgesetz umgeformt werden:

$$\begin{aligned} ac &= ca \\ bc &= cb \end{aligned}$$

Die umgeformten Teilterme setzt man wieder in den ursprünglichen Term ein und hat damit $ac+bc$ umgeformt in $ca+cb$.

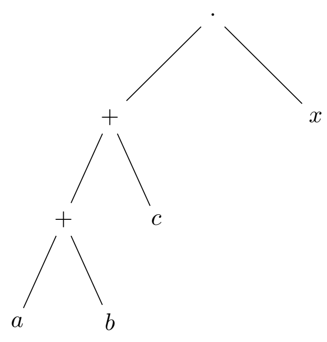


Insgesamt hat man damit das neue Gesetz

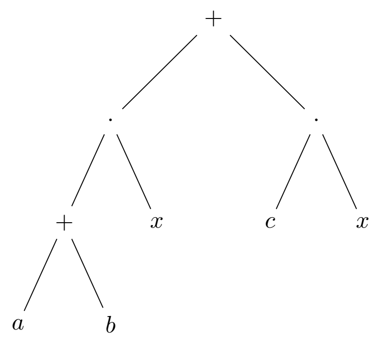
$$c(a+b) = ca+cb$$

hergeleitet. Es sieht ähnlich aus wie das Distributivgesetz $(a+b)c = ac+bc$ und besagt, dass man c auch “von links” in eine Summe multiplizieren darf. □

Beispiel 3.2 Gegeben sei der Term $(a+b+c)x$. Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man die Klammern in der Summe weglassen.



$$
\begin{aligned}
(a+b+c)x &= (u+c)x && \text{(Substitution von } a+b \text{ durch } u\text{)}\\
&= ux+cx && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= (a+b)x+cx && \text{(Rücksubstitution).}
\end{aligned}
$$



Den Teilterm $(a+b)x$ kann man mit dem Distributivgesetz umformen zu

$$(a+b)x \quad = \quad ax+bx.$$

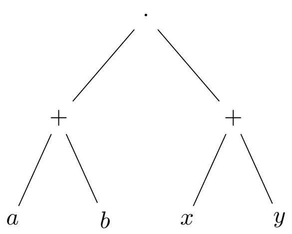
Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
(a+b)x+cx &= (ax+bx)+cx && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= ax+bx+cx && \text{(Assoziativgesetz)}
\end{aligned}
$$

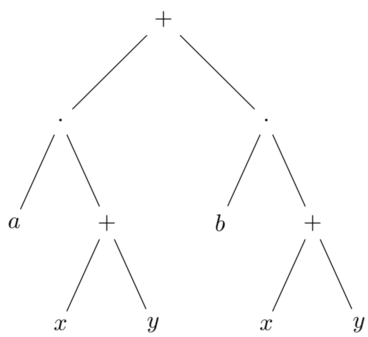
Damit haben wir das Distributivgesetz verallgemeinert auf drei Summanden. In gleicher Weise kann man es auf beliebig viele Summanden verallgemeinern und erhält

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)x \quad = \quad a_1x+a_2x+\ldots+a_nx. \ \square$$

Beispiel 3.3 Betrachten wir den Term $(a+b)(x+y)$.



$$\begin{aligned}(a+b)(x+y) &= (a+b)u && \text{(Substitution von } x+y \text{ durch } u\text{)}\\ &= au+bu && \text{(Distributivgesetz)}\\ &= a(x+y)+b(x+y) && \text{(Rücksubstitution)}\end{aligned}$$



Als nächstes greift man die Teilterme $a(x+y)$ und $b(x+y)$ heraus und wendet das Distributivgesetz aus Beispiel 3.1 an.

$$\begin{aligned}a(x+y) &= ax+ay\\ b(x+y) &= bx+by\end{aligned}$$

Setzt man diese umgeformten Teilterme wieder in den ursprünglichen Term ein, erhält man den Term

$$(ax+ay)+(bx+by).$$

Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man die Klammern weglassen. Insgesamt hat man damit ein Gesetz zum "Ausmultiplizieren von Summen" hergeleitet.

$$(a+b)(x+y) = ax+ay+bx+by. \square$$

Wenn man das Prinzip gut verstanden hat, kann man natürlich größere Schritte machen.

Beispiel 3.4 Das gerade hergeleitete Gesetz zum Ausmultiplizieren von Summen soll auf drei Faktoren $(a+b)(c+d)(e+f)$ verallgemeinert werden. Mit einer Substitution und dem Distributivgesetz erhält man

$$\begin{aligned}\underbrace{(a+b)(c+d)}_{u}(e+f) &= u(e+f)\\ &= ue+uf\\ &= (a+b)(c+d)e+(a+b)(c+d)f\end{aligned}$$

Mit Beispiel 3.3 kann man den Teilterm $(a+b)(c+d)$ umformen durch

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}&(a+b)(c+d)e+(a+b)(c+d)f\\ &\quad= (ac+ad+bc+bd)e+(ac+ad+bc+bd)f.\end{aligned}$$

Substituiert man die Produkte $ac, ad, \ldots$ durch neue Variablen und wendet das verallgemeinerte Distributivgesetz aus Beispiel 3.2 an, erhält man

$$\begin{aligned}(ac+ad+bc+bd)e+(ac+ad+bc+bd)f &= ace+ade+bce+bde\\ &+ acf+adf+bcf+bdf.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit das neue Gesetz

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= ace+ade+bce+bde\\ &+ acf+adf+bcf+bdf.\end{aligned}$$

Man kann diese Gesetze verallgemeinern um beliebige Produkte von Summen “auszumultiplizieren”. Man wählt aus jedem Faktor einen Summanden, multipliziert diese miteinander und summiert alle möglichen Kombinationen auf. Damit erhält man z.B. in einem Schritt

$$(a+b+c)(e+f) = ae+af+be+bf+ce+cf. \square$$

3.3 Die Zahl Null

Die Entdeckung der Zahl Null hat in der Geschichte der Mathematik relativ lang gedauert. Warum sollte man auch "nichts" einen Namen geben? Und wie erklärt man jemand, der nur natürliche Zahlen kennt, was Null ist? Tatsächlich werden wir noch viele weitere Zahlen erfinden, aber die Vorgehensweise ist immer gleich. Wenn man dieses Prinzip einmal verstanden hat, sind ganze Zahlen, rationale Zahlen und später komplexe Zahlen nicht mehr schwierig.

Man beginnt immer mit einem unlösbaren Problem. Die Gleichung $1 + x = 1$ hat keine Lösung in der Menge der natürlichen Zahlen. Um dies zu beheben, "erfindet" man eine neue Zahl Null, von der zunächst nichts festgelegt ist, außer dass sie die Lösung der Gleichung

$$1 + x = 1$$

ist. Es gilt somit

$$1 + 0 = 1.$$

Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null wird mit

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

bezeichnet. Da man mit der neuen Zahl Null rechnen möchte, muss man die Addition und die Multiplikiation erweitern für den Fall wenn ein Argument Null ist. Prinzipiell hat man hier zunächst völlige Freiheit und könnte z.B. $5 + 0 = 7$ festlegen. Man fordert jedoch sinnvollerweise, dass die bekannten Gesetze wie Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz und neutrales Element der Multiplikation auch auf $\mathbb{N}_0$ gelten sollen. Damit ist bereits festgelegt, dass z.B.

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 && \text{(Kommutativgesetz)} \\ 1 \cdot 0 &= 0 && \text{(neutrales Element)} \end{aligned}$$

Geht man von der Gleichung $1 + 0 = 1$ aus und addiert auf beiden Seiten 1, erhält man mit dem Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} 1 + (1 + 0) &= 1 + 1 \\ (1 + 1) + 0 &= 2 \\ 2 + 0 &= 2. \end{aligned}$$

Da man diesen Prozess beliebig oft wiederholen kann, folgt

$$a + 0 = a \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{N}.$$

Beginnen wir nochmal bei $1 + 0 = 1$ und addieren diesmal auf beiden Seiten 0. Man erhält mit dem Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (1 + 0) + 0 &= 1 + 0 \\ 1 + (0 + 0) &= 1. \end{aligned}$$

Da 0 die einzige Zahl ist, die wir zu $\mathbb{N}$ dazugenommen haben, ist 0 die einzige Lösung der Gleichung $1 + x = 1$. Somit folgt $0 + 0 = 0$. Damit gilt

$$a + 0 = a \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{N}_0.$$

Folglich hat man mit der Zahl 0 nun auch ein neutrales Element für die Addition.

Sie wissen sicher, dass $0a = 0$ gilt. Auch dies ist keine willkürliche Festlegung sondern folgt zwangsläufig aus den Rechengesetzen. Geht man von $1 + 0 = 1$ aus und multipliziert beide Seiten mit einer beliebigen Zahl $a \in \mathbb{N}_0$, erhält man mit dem Distributivgesetz und dem neutalen Element der Multiplikation

$$\begin{aligned} (1+0)a &= 1a \\ a + 0a &= a \end{aligned}$$

Da aber 0 die einzige Lösung der Gleichung $a + x = a$ ist, folgt

$$0a = 0 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zahl 0 wird daher auch absorbierendes Element der Multiplikation genannt.

4 Ganze Zahlen

Der Name “natürliche Zahlen” ist dadurch begründet, dass sie “natürlicherweise” vorkommen, wenn man Dinge zählt: 3 Äpfel, 5 Finger, usw.

Für negative Zahlen gilt dies nicht: Man kann sich nicht -1 Äpfel vorstellen. Was soll -1 also sein?

Eine Anwendung von negativen Zahlen zeigt der Blick auf’s Konto.

> *Ein Kontostand von -1 bedeutet, dass man einen Euro einzahlen muss, um nichts zu haben.*

Daraus folgt:

> -1 *ist die Zahl, zu der man* 1 *addieren muss, um* 0 *zu erhalten*

oder etwas formaler:

> -1 *ist die Lösung der Gleichung*
>
> $$x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in der Menge $\mathbb{N}_0$. Möchte man trotzdem eine Lösung haben, muss man neue Zahlen “erfinden”. So soll -1 eine neue Zahl sein, von der zunächst nichts weiter bekannt ist, als dass sie Lösung der o.g. Gleichung ist. Es gilt folglich

$$(-1) + 1 = 0.$$

Natürlich möchte man mit der neuen Zahl -1 rechnen, d.h. Terme, in denen -1, Additionen und Multiplikationen auftreten, umformen und vereinfachen. Wir fordern hierfür lediglich, dass die bekannten Rechengesetze Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz sowie die neutralen Elemente weiterhin gelten. Für negative Zahlen gelten also die gleichen Spielregeln wie für natürliche.

Beispiel 4.1 Sie wissen sicher, dass $(-1) \cdot 0 = 0$ ist. Dass das so sein muss, sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
(-1) + 1 &= 0 && \text{(Definition von } -1\text{)} \\
((-1) + 1)0 &= 0 && \text{(beide Seiten mal 0)} \\
(-1) \cdot 0 + 0 &= 0 && \text{(Distributivgesetz und } 1 \cdot 0 = 0\text{)} \\
(-1) \cdot 0 &= 0 && \text{(0 ist neutrales Element der Addition)}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.2 Sie wissen sicher, dass $(-1)(-1) = 1$ ist, aber warum muss das so sein? Bekannt ist bisher nur, dass

$$(-1) + 1 = 0.$$

Multipliziert man beide Seiten mit (-1) erhält man

$$(-1)\big((-1) + 1\big) = 0.$$

Anwendung des Distributivgesetzes liefert

$$(-1)(-1) + (-1)1 \quad = \quad 0.$$

Da 1 neutrales Element der Multiplikation ist, gilt

$$(-1)(-1) + (-1) \quad = \quad 0.$$

Addiert man auf beiden Seiten 1, erhält man

$$(-1)(-1) + (-1) + 1 \quad = \quad 1$$

und da $(-1) + 1 = 0$ und 0 das neutrale Element der Addition ist, folgt

$$(-1)(-1) \quad = \quad 1. \ \square$$

Sei nun a eine beliebige, natürliche Zahl und betrachten wir die allgemeinere Gleichung

$$x + a \quad = \quad 0.$$

Auch diese Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{N}_0$. Man kann die Lösung aber unter Verwendung von -1 ausdrücken durch

$$x \quad = \quad (-1)a.$$

Dies wird durch Einsetzen gezeigt:

$$\begin{aligned}
(-1)a + a &= (-1)a + 1a && \text{(neutrales Element)} \\
&= ((-1) + 1)a && \text{(Distributivgesetz)} \\
&= 0a && (-1) + 1 = 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der Term $(-1)a$ wird abgekürzt durch

$$-a \quad = \quad (-1)a$$

und heißt Negation von a. Taucht in einem Term eine Negation auf, kann man diese immer ersetzen durch eine Multiplikation mit -1.

Die Gleichung $x + a = 0$ kann außer $x = -a$ keine weitere Lösungen haben. Wäre nämlich $x = b$ ebenfalls eine Lösung, würde folgen

$$\begin{aligned}
b + a &= 0 && \text{(Addition von } -a \text{ auf beiden Seiten)} \\
b + a + (-a) &= 0 + (-a) && (a + (-a) = 0) \\
b + 0 &= 0 + (-a) && \text{(0 neutrales Element der Addition)} \\
b &= -a.
\end{aligned}$$

Falls $a \neq b$ muss auch $-a \neq -b$ sein. Wäre nämlich $-a = -b$, würde durch Multiplikation mit -1 auf beiden Seiten $a = b$ folgen. Folglich muss für jedes $a \in \mathbb{N}$ eine neue Zahl $-a$ hinzugenommen werden.

Der Schlüssel zum Rechnen mit ganzen Zahlen besteht, darin, dass man *jeden* Term mit Negationen, Additionen und Multiplikationen auf die Form

$$a + (-b)$$

vereinfachen kann, wobei a und b Terme ohne Negationen sind. Eine Negation pro Term ist also völlig ausreichend. Solche Terme heißen Differenzen und werden abgekürzt durch

$$a - b \quad = \quad a + (-b).$$

Das Minuszeichen hat somit zwei Bedeutungen, die man anhand des Kontextes unterscheiden muss:

Definition 4.3 (Negation, Subtraktion)
Sei $a, b \in \mathbb{Z}$. Die Negation (einstelliges Minus) ist definiert durch

$$-a \quad = \quad (-1)a.$$

Die Subtraktion (zweistelliges Minus) ist definiert durch

$$a - b \quad = \quad a + (-b).$$

Eine Summe von Differenzen lässt sich auf eine Differenz reduzieren durch:

$$\begin{aligned} (a-b)+(c-d) &= a+(-b)+c+(-d) \\ &= a+(-1)b+c+(-1)d \\ &= a+c+(-1)(b+d) \qquad \text{(Distributivgesetz)} \\ &= a+c-(b+d). \end{aligned}$$

Ein Produkt von Differenzen lässt sich auf eine Differenz reduzieren durch:

$$\begin{aligned} (a-b)(c-d) &= (a+(-b))(c+(-d)) \\ &= ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d) \\ &= ac+(-1)ad+(-1)(bc)+(-1)(-1)bd \\ &= ac+bd+(-1)(ad+bc) \\ &= ac+bd-(ad+bc). \end{aligned}$$

Die Menge aller Zahlen, die man aus natürlichen Zahlen, Null, Negationen sowie der Addition und Multiplikation erzeugen kann, ist somit gleich der Menge aller Differenzen von natürlichen Zahlen und heißt Menge der ganzen Zahlen.

Definition 4.4 (Ganze Zahlen)
Die Menge der ganzen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{a - b \,|\, a, b \in \mathbb{N}_0\}.$$

Sei $x \in \mathbb{Z}$ eine beliebige, ganze Zahl. Dann existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$ so dass $x = a - b$.

- Falls $a \geq b$, existiert ein $c \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$b + c = a.$$

  Damit ist

$$\begin{aligned} x &= a - b \\ &= b + c - b \\ &= c \end{aligned}$$

- Falls $a < b$, existiert ein $c \in \mathbb{N}$ so dass

$$a + c = b.$$

  Damit ist

$$\begin{aligned} x &= a - b \\ &= a - (a + c) \\ &= a + (-1)(a + c) \\ &= a + (-1)a + (-1)c \\ &= -c. \end{aligned}$$

Folglich ist jede ganze Zahl entweder eine natürliche Zahl, Null, oder die Negation einer natürlichen Zahl, d.h.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-a \mid a \in \mathbb{N}\}.$$

Außer den Lösungen $-a$ der Gleichungen $x + a = 0$ kommen also keine weiteren, neuen Zahlen hinzu.

4.1 Rechnen mit ganzen Zahlen

Da man die Subtraktion aufgrund von Definition 4.3 immer auf eine Addition und eine Negation reduzieren kann, kann man die Rechengesetze für die Subtraktion direkt aus denen der Addition ableiten.

Beispiel 4.5

$$\begin{aligned} -(a+b) &= (-1)(a+b) && \text{(Definition Negation)} \\ &= (-1)a + (-1)b && \text{(Distributivgesetz)} \\ &= -a + (-b) && \text{(Definition Negation)} \\ &= -a - b && \text{(Definition Subraktion)} \end{aligned}$$

Um Verwirrung zu vermeiden, sollte man sich klarmachen, an welcher Stelle das einstellige bzw. das zweistellige Minuszeichen verwendet wird.

Beispiel 4.6

$$\begin{aligned} (-a)b &= \big((-1)a\big)b && \text{(Definition Negation)} \\ &= (-1)(ab) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= -(ab) && \text{(Definition Negation)} \end{aligned}$$

Man hätte den letzten Term auch anders umformen können:

$$\begin{aligned} (-a)b &= \big((-1)a\big)b && \text{(Definition Negation)} \\ &= \big(a(-1)\big)b && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= a\big((-1)b\big) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= a(-b) && \text{(Definition Negation)} \end{aligned}$$

In einem Produkt kann man ein Negationszeichen somit beliebig verschieben:

$$(-a)b \;=\; a(-b) \;=\; -(ab) \;=\; -ab.$$

Da in allen Fällen das gleiche rauskommt, kann man die Klammern einfach weglassen ohne dass die dadurch entstandene Mehrdeutigkeit zu Problemen führt.

Beispiel 4.7

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= (-1)a(-1)b && \text{(Negation, Assoziativgesetz)} \\ &= (-1)(-1)ab && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= 1ab && \text{(siehe oben, } (-1)(-1) = 1) \\ &= ab && \text{(neutrales Element)} \end{aligned}$$

Die Regel “minus mal minus gibt plus” ist somit nichts Neues sondern folgt zwingend aus den bekannten Gesetzen.

Wichtig beim Rechnen mit der Subtraktion ist auch zu wissen, welche Gesetze *nicht* gelten: Es gilt weder dass Assoziativgesetz

$$(a-b)-c \quad \neq \quad a-(b-c)$$

noch das Kommutativgesetz

$$a-b \quad \neq \quad b-a$$

wie man an einem Zahlenbeispiel leicht verifiziert.

4.2 Binomische Formeln

Die erste Binomische Formel folgt direkt aus der Regel für das Ausmultiplizieren von Summen.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= aa+ab+ba+bb && \text{(Beispiel 3.3 auf Seite 16)} \\
&= a^2+2ab+b^2 && \text{(Kommutativgesetz)}
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Binomischen Formel tritt eine Subtraktion auf. Man kann diese jedoch auf eine Addition und Negation reduzieren und die erste Binomische Formel verwenden:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a+(-b))^2 \\
&= a^2+2a(-b)+(-b)^2 && \text{(Erste Binomische Formel)} \\
&= a^2-2ab+b^2 && \text{(Beispiel 4.6 und 4.7)}
\end{aligned}$$

Die dritte Binomische Formel wird wieder unter Verwendung der o.g. Rechengesetze gezeigt.

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)(a+(-b)) \\
&= a^2+a(-b)+ba+b(-b) && \text{(Beispiel 3.3)} \\
&= a^2-ab+ab-b^2 && \text{(Beispiel 4.6)} \\
&= a^2-b^2
\end{aligned}$$

5 Rationale Zahlen und Bruchrechnen

5.1 Kehrwerte

Wie würde man jemand, der nur ganze Zahlen kennt, erklären was $1/3$ ist? Die klassische Methode besteht darin, einen Apfel zu nehmen, ihn in 3 gleich große Stücke zu teilen und einen Teil hochzuhalten: Das ist $1/3$ Apfel.

Damit ist klar:

> $1/3$ *Apfel ist die Anzahl Äpfel, von der es 3 Stück braucht, um einen ganzen Apfel zu erhalten.*

Aber was ist $1/3$? Hierzu muss man von Äpfeln abstrahieren und kommt zu der Aussage:

> $1/3$ *ist die Zahl, die mit 3 multipliziert 1 ergibt*

oder etwas formaler:

> $1/3$ *ist die Lösung x der Gleichung*
>
> $$3x = 1.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in der Menge der ganzen Zahlen. Folglich muss man neue Zahlen "erfinden", wie z.B. die Zahl $1/3$, von der zunächst nichts festgelegt ist, außer dass sie die Lösung der o.g. Gleichung ist.

Man nennt $1/3$ auch Kehrwert von 3. In gleicher Weise kann man von jeder ganzen Zahl $a \neq 0$ ihren Kehrwert definieren:

Definition 5.1 (Kehrwert)
Der Kehrwert von $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist definiert als Lösung der Gleichung

$$ax = 1$$

und wird mit $x = 1/a$ bezeichnet.

Da $1/a$ die Lösung von $ax = 1$ ist, folgt durch Einsetzen

$$a\,\frac{1}{a} = 1 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Beispiel 5.2 Gesucht ist der Kehrwert von $a = 1$. Laut Definition 5.1 ist dies die Lösung x der Gleichung

$$1x = 1.$$

Die Lösung ist $x = 1$ und folglich ist 1 der Kehrwert von 1 bzw.

$$\frac{1}{1} = 1.$$

Beispiel 5.3 Der Kehrwert von $a = -1$ ist definiert als Lösung der Gleichung

$$-1x = 1.$$

Die Lösung ist $x = -1$ und folglich ist -1 der Kehrwert von -1 bzw.

$$\frac{1}{-1} = -1.$$

5.2 Brüche

Natürlich möchte man mit den Kehrwerten auch "rechnen". Nehmen wir als Ausgangspunkt die ganzen Zahlen und betrachten als einzige Funktionen wieder die Addition und die Multiplikation. Die Negation und die Subtraktion sei auch auf Brüchen definiert durch

$$-a = (-1)a \quad \text{und} \quad a - b = a + (-b).$$

"Rechnen" heißt Terme umformen und vereinfachen. Als Rechengesetze sollen auch auf der erweiterten Zahlenmenge das Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz und die neutralen Elemente gelten, d.h. die Spielregeln bleiben gleich.

So kann man unter Verwendung des Kommutativgesetzes z.B. den Term $2 + 1/3$ umformen in $1/3 + 2$, was allerdings keine Vereinfachung bringt. Tatsächlich ist das Ziel der folgenden Kapitel zu zeigen, dass man jeden Term mit ganzen Zahlen, Kehrwerten, Addition und Multiplikation auf die Form

$$a\,\frac{1}{b}$$

reduzieren kann, wobei a, b Terme ohne Kehrwerte sind. Solche Terme nennt man Brüche und kürzt sie ab durch

$$\frac{a}{b} \quad = \quad a\,\frac{1}{b}$$

Hierbei heißt a Zähler und b Nenner des Bruchs. Die Rechentechnik, komplizierte Terme auf die einfache Form a/b zu bringen, heißt Bruchrechnung. Da Sie Bruchrechnung immer wieder brauchen werden, sollten Sie die Regeln nicht nur auswendig wissen, sondern auch verstehen, warum sie gelten. Im Zweifelsfall kann man sich dann jederzeit selber überlegen, ob ein Rechenschritt erlaubt ist oder nicht.

Die Menge aller Zahlen, die man aus ganzen Zahlen, Kehrwerten, Addition und Multiplikation erzeugen kann, ist somit gleich der Menge aller Zahlen, die durch Brüche dargestellt werden können.

Definition 5.4 (Menge der rationalen Zahlen)
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}.$$

Jede rationale Zahl kann als Bruch a/b mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ dargestellt werden, wobei a/b nur eine abkürzende Schreibweise für ein Produkt aus einer ganzen Zahl a und einem Kehrwert $1/b$ ist. Es ist also gar nicht nötig, sich mit schwierigen Brüchen herumzuschlagen — gleich im ersten Schritt kann man Brüche immer auf einfache Kehrwerte reduzieren! In vielen Fällen liegt hierin bereits der Schlüssel zum Lösen einer scheinbar schwierigen Aufgabe.

Beispiel 5.5 Ein besonders einfacher Spezialfall sind Brüche mit Nenner 1. Mit der o.g. Abkürzung

$$\frac{a}{b} \quad = \quad a\,\frac{1}{b}$$

erhält man für $b = 1$

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} &= a\,\frac{1}{1} && \text{(Reduktion auf Kehrwert)} \\ &= a\,1 && \text{(Beispiel 5.2)} \\ &= a. && \text{(neutrales Element)} \end{aligned}$$

Man kann also jede ganze Zahl als Bruch mit Nenner 1 darstellen.

Beispiel 5.6 Ein weiterer, einfacher Spezialfall liegt vor, wenn Zähler und Nenner gleich sind:

$$\frac{a}{a} = a\,\frac{1}{a} = 1,$$

was direkt aus Definition 5.1 folgt.

Beispiel 5.7 Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, ist das Ergebnis der Zähler:

$$\begin{aligned} b\,\frac{a}{b} &= b\,a\,\frac{1}{b} && \text{(Reduktion auf Kehrwert)} \\ &= a\,b\,\frac{1}{b} && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= a\,1 && \text{(Definition 5.1)} \\ &= a && \text{(neutrales Element)} \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Einsetzen sofort, dass a/b die Lösung x der Gleichung

$$bx = a$$

ist.

5.3 Multiplikation von Brüchen

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man das Produkt zweier Brüchen auf einen Bruch reduziert. Wie oben gesagt, setzen wir dabei nichts voraus außer die Definition von Kehrwerten sowie die Rechengesetze Kommutativ-, Assoziativ,- und Distributivgesetz und die neutralen Elemente.

Für ganze Zahlen $a, b \neq 0$ gilt laut Definition 5.1

$$ab \, \frac{1}{ab} \quad = \quad 1.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $1/a$, erhält man

$$\frac{1}{a} \, ab \, \frac{1}{ab} \quad = \quad \frac{1}{a}.$$

Unter Verwendung des Assoziativgesetzes kann man $1/a$ und a zu 1 zusammenfassen, was wiederum das neutrale Element der Multiplikation ist und erhält

$$b \, \frac{1}{ab} \quad = \quad \frac{1}{a}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $1/b$ erhält man

$$\frac{1}{b} \, b \, \frac{1}{ab} \quad = \quad \frac{1}{a} \, \frac{1}{b}.$$

Fasst man wiederum $1/b$ und b zu 1 zusammen, erhält man schließlich

$$\frac{1}{ab} \quad = \quad \frac{1}{a} \, \frac{1}{b}.$$

Somit ist gezeigt, dass das Produkt zweier Kehrwerte gleich dem Kehrwert des Produkts sein muss.

Theorem 5.8
Für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1}{a} \, \frac{1}{b} \quad = \quad \frac{1}{ab}.$$

$$\begin{tikzcd}
a, b \arrow[rr, "\text{Multiplikation}"] \arrow[d, "\text{Kehrwert}"'] & & ab \arrow[d, "\text{Kehrwert}"] \\
\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \arrow[rr, "\text{Multiplikation}"] & & \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \, \frac{1}{b}
\end{tikzcd}$$

Man kann dieses einfache Gesetz für Kehrwerte auf Brüche verallgemeinern.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} &= a\,\frac{1}{b}\,c\,\frac{1}{d} && \text{(Reduktion auf Kehrwerte)}\\
&= ac\,\frac{1}{b}\,\frac{1}{d} && \text{(Kommutativgesetz)}\\
&= ac\,\frac{1}{bd} && \text{(Theorem 5.8)}\\
&= \frac{ac}{bd}. && \text{(Bruchnotation)}
\end{aligned}
$$

Man erhält das einfache Gesetz für die Multiplikation von Brüchen: Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner.

Theorem 5.9

Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

5.4 Erweitern und Kürzen

Ein nützliches Rechengesetz beim Umgang mit Brüchen ist das Erweitern und Kürzen. Einen Bruch erweitern bedeutet, Zähler und Nenner eines Bruchs mit dem selben Faktor c zu multiplizieren. Kürzen bedeutet umgekehrt, den gleichen Faktor c aus einem Produkt in Zähler und Nenner zu streichen. Dass sich der Wert des Bruchs hierbei nicht ändert, folgt direkt aus dem Gesetz für die Multiplikation von Brüchen.

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}\frac{c}{c} = \frac{a}{b}1 = \frac{a}{b}.$$

Beispiel 5.10 Zum Kürzen ist es oft erforderlich, den Zähler bzw. Nenner in ein Produkt aus Primfaktoren zu zerlegen.

$$\frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 5.11 Durch Erweitern mit -1 kann man ein Vorzeichen vom Nenner in den Zähler bringen.

$$\frac{2}{-3} = \frac{2 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-1)} = \frac{-2}{3}$$

Beispiel 5.12 Man kann nicht nur Zahlen kürzen sondern auch beliebige Terme.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} &= \frac{(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a-b}{a+b}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass Erweitern und Kürzen nur bei **Produkten** im Zähler und Nenner funktioniert, **nicht aber bei Summen.** Einen Summanden kann man nicht kürzen! Es gilt z.B.

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \quad \text{aber} \quad \frac{2+3}{5+3} \neq \frac{2}{5}.$$

Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch bestehend aus ganzzahligem Zäher und Nenner ist nicht eindeutig. Man kann somit z.B. nicht vom *dem* Zähler der rationalen Zahl $2/3$ sprechen. Da $2/3 = 4/6$, ist nicht klar, ob der Zähler 2 oder 4 sein soll. Die Begriffe Zähler und Nenner beziehen sich somit immer auf syntaktische Terme, nicht aber auf Zahlen.

5.5 Kehrwert von Brüchen

Bisher haben wir nur Kehrwerte von ganzen Zahlen definiert. Man kann das Konzept aber wie in Definition 5.1 auch auf Brüche erweitern.

Definition 5.13 (Kehrwert)
Für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist der Kehrwert von $^a/_b$ definiert als Lösung der Gleichung

$$\frac{a}{b}x = 1.$$

Man kann diese Lösung leicht ausrechnen. Multipliziert man in o.g. Gleichung beide Seiten mit b, erhält man

$$\begin{aligned} b\,\frac{a}{b}\,x &= b \\ ax &= b. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun noch beide Seiten mit $^1/_a$ erhält man

$$\begin{aligned} a\,\frac{1}{a}\,x &= b\,\frac{1}{a} \\ x &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Kehrbruchs werden somit nur Zähler und Nenner vertauscht.

Theorem 5.14 (Kehrwert)

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

5.6 Division von Brüchen

Für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ wurde die Division definiert als Multiplikation mit dem Kehrwert.

$$\frac{a}{b} \quad = \quad a\,\frac{1}{b}.$$

Nachdem wir Kehrwerte von ganzen Zahlen auf Brüche erweitert haben, lässt sich nun auch die Division von Brüchen in gleicher Weise als Multiplikation mit dem Kehrbruch definieren.

Definition 5.15 (Division)
Die Division zweier Brüche a/b und c/d ist definiert durch

$$\frac{a/b}{c/d} \quad = \quad a/b\;\frac{1}{c/d}.$$

Man kann das Ergebnis noch etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned}\frac{a/b}{c/d} &= a/b\;\frac{1}{c/d} \\ &= \frac{a}{b}\,\frac{d}{c} && \text{(Theorem 5.14)} \\ &= \frac{ad}{bc} && \text{(Theorem 5.9).}\end{aligned}$$

Die Division von Brüchen kann also immer auf eine Multipikation und einen Kehrwert reduzieren werden, was das Rechnen oft erheblich vereinfacht.

Theorem 5.16 (Division von Brüchen)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad = \quad \frac{ad}{bc} \qquad \textit{für alle } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \textit{ mit } b, c, d \neq 0.$$

An dieser Stelle sei auf eine Tücke mit der Bruchstrichnotation hingewiesen, die sehr leicht zu Fehlern führt. Obwohl sich die beiden Brüche

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{c}} \quad \text{und} \quad \cfrac{\cfrac{a}{b}}{c}.$$

nur in der Länge der Bruchstriche unterscheiden, sind sie i.a. ungleich. Man sieht dies, indem man sie vereinfacht:

- $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} \quad = \quad a\,\dfrac{1}{\frac{b}{c}} \quad = \quad a\,\dfrac{c}{b} \quad = \quad \dfrac{ac}{b}$
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} \quad = \quad \dfrac{a}{b}\,\dfrac{1}{c} \quad = \quad \dfrac{a}{bc}.$

Die Länge des Bruchstrichs ist also durchaus wichtig, da hiermit implizit eine Klammerung ausgedrückt wird. Verwendet man statt des Bruchstrichs das Divisionssymbol, wird dies deutlich:

$$a/(b/c) \quad \neq \quad (a/b)/c.$$

Mit anderen Worten: die Division ist *nicht* assoziativ! Achten Sie also darauf, entweder durch die Länge der Bruchstriche eindeutig zu machen, in welcher Reihenfolge die Operationen ausgeführt werden müssen, oder verwenden Sie zusätzlich Klammern.

Beispiel 5.17

$$\frac{\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}}{d} \quad = \quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}\,\frac{1}{d} \quad = \quad a\,\frac{c}{b}\,\frac{1}{d} \quad = \quad \frac{ac}{bd}$$

Man hätte auch zuerst den Zähler vereinfachen können:

$$\frac{\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}}{d} \quad = \quad \frac{a\,\frac{c}{b}}{d} \quad = \quad \frac{\frac{ac}{b}}{d} \quad = \quad \frac{ac}{b}\,\frac{1}{d} \quad = \quad \frac{ac}{bd}.$$

5.7 Addition von Brüchen

Für die Vereinfachung der Summe zweier Brüche gibt es leider kein so einfaches Gesetz wie bei der Multiplikation. Insbesondere funktioniert das naheliegende "Zähler plus Zähler durch Nenner plus Nenner" *nicht*. Trotzdem kann man die Summe zweier Brüche immer auf einen Bruch reduzieren.

Betrachten wir zuerst den einfachen Spezialfall, wenn beide Summanden den gleichen Nenner c haben:

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}+\frac{b}{c} &= a\,\frac{1}{c}+b\,\frac{1}{c} && \text{(Reduktion auf Kehrwerte)}\\ &= (a+b)\,\frac{1}{c} && \text{(Distributivgesetz)}\\ &= \frac{a+b}{c}.\end{aligned}$$

Bei *gleichem Nenner* werden also einfach die Zähler addiert und der gemeinsame Nenner übernommen.

Den allgemeinen Fall *unterschiedlicher* Nenner kann man auf den einfachen Spezialfall *gleicher* Nenner reduzieren, indem man die Brüche geeignet erweitert. Berechnet werden soll

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}.$$

Die Idee ist, jeden Bruch mit dem Nenner des jeweils anderen zu erweitern. Man erhält so

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{ad}{bd} && \text{durch Erweitern mit } d \text{ und}\\ \frac{c}{d} &= \frac{bc}{bd} && \text{durch Erweitern mit } b.\end{aligned}$$

Beide Brüche haben nun den selben Nenner bd und können einfach addiert werden: Damit ist

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Beispiel 5.18

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6} = \frac{12}{18}+\frac{3}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

In diesem Beispiel hätte es auch genügt, nur den ersten Bruch mit 2 zu erweitern um gleiche Nenner herzustellen.

Beispiel 5.19

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

5.8 Beispiele

Beispiel 5.20

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+\frac{1}{c}} &= \frac{a}{\frac{bc}{c}+\frac{1}{c}} \\
&= \frac{a}{\frac{bc+1}{c}} \\
&= a\ \frac{c}{bc+1} \\
&= \frac{ac}{bc+1}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.21

$$\begin{aligned}
\frac{1+\frac{1}{a}}{1+a} &= \left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{1+a} \\
&= \left(\frac{a}{a}+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{1+a} \\
&= \frac{a+1}{a}\ \frac{1}{1+a} \\
&= \frac{1+a}{a(1+a)} \\
&= \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

5.9 Kehrwert von Null

Warum wurde in Definition 5.1 eigentlich $a = 0$ ausgenommen? Man hätte doch auch eine neue Zahl $^1/_0$ erfinden können als Lösung der Gleichung

$$0x \quad = \quad 1.$$

Das Problem ist, dass die Annahme der Existenz einer solchen Zahl zu einem Widerspruch führt. Aus

$$0 \cdot \frac{1}{0} \quad = \quad 1$$

folgt durch Multiplikation mit 0 auf beiden Seiten

$$0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{0} \quad = \quad 0 \cdot 1.$$

Da $0 \cdot 0 = 0$ (siehe Seite 19) und $0 \cdot 1 = 0$ (neutrales Element 1) folgt

$$0 \cdot \frac{1}{0} \quad = \quad 0,$$

was im Widerspruch zu

$$0 \cdot \frac{1}{0} \quad = \quad 1$$

steht.

6 Potenzrechnung

6.1 Natürlichzahliger Exponent

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit a^n wird die n-malige Multiplikation von a mit sich selbst bezeichnet, d.h.

$$a^n = \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Diesen Term nennt man auch n-te Potenz von a. Hierbei heißt a Basis und n Exponent. Insbesondere erhält man für $n = 1$

$$a^1 = a.$$

Für Produkte von Potenzen mit gleicher Basis $a \in \mathbb{R}$ und unterschiedlichen Exponenten $n, m \in \mathbb{N}$ erhält man das **erste Rechengesetz**

$$a^n a^m = \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}\ \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n+m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}.$$

Für Produkte von Potenzen mit unterschiedlichen Basen $a, b \in \mathbb{R}$ aber gleichem Exponent erhält man durch Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren ein **zweites Rechengesetz**:

$$a^n b^n = \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}\ \underbrace{b\,b\,\cdots\,b}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ Faktoren}} = (ab)^n.$$

Ein **drittes Rechengesetz**, das sich ebenfalls durch Zählen von Faktoren herleiten lässt, betrifft doppelte Exponenten. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= \underbrace{a^n\,a^n\,\cdots\,a^n}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{\underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}\ \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}\ \cdots\ \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{n \text{ Faktoren}}}_{m \text{ Produkte mit je } n \text{ Faktoren}} \\ &= \underbrace{a\,a\,\cdots\,a}_{nm \text{ Faktoren}} = a^{nm}.\end{aligned}$$

Theorem 6.1 (Potenzrechengesetze)
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} && \textit{gleiche Basis} \\ a^n b^n &= (ab)^n && \textit{gleicher Exponent} \\ (a^n)^m &= a^{nm} && \textit{doppelter Exponent.} \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass alle Potenzgesetze nur auf Multiplikationen anwendbar sind. Es gibt z.B. kein Gesetz um $a^n + b^n$ zu vereinfachen.

Die o.g. 3 Potenzgesetze dienen im Folgenden als Anhaltspunkt dafür, dem Term a^n einen sinnvollen Wert zuzuordnen wenn n keine natürliche Zahl ist. Die Potenzfunktion wird somit erweitert auf ganzzahlige und rationale Exponenten.

6.2 Exponent Null

Beginnen wir mit $n = 0$, d.h. wie könnte man sinnvoll a^0 definieren? Die Zahl a "Null mal mit sich selbst multiplizieren" erscheint sinnlos. Sinnvoller ist eine Festlegung, so dass die o.g. Gesetze unverändert weiter gelten wenn der Exponent Null ist. Aus dem zweiten Gesetz folgt mit $n = 1$ und $m = 0$

$$a\,a^0 \quad = \quad a^1\,a^0 \quad = \quad a^{1+0} \quad = \quad a^1 \quad = \quad a.$$

Dividiert man beide Seiten durch a, erhält man

$$a^0 \quad = \quad 1 \qquad \text{falls } a \neq 0.$$

Die Einschränkung $a \neq 0$ ist erforderlich, da man nur in diesem Fall durch a teilen kann. Der Spezialfall 0^0 bleibt undefiniert, da es hier nicht möglich ist, eine offensichtliche Festlegung zu treffen:

- Einerseits ist $0^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was dafür sprechen würde, $0^0 = 0$ zu ergänzen.
- Andererseits it $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$ so dass es sich anbieten würde, $0^0 = 1$ zu ergänzen.

Da man es also auf keine Art allen recht machen kann, lässt man es besser sein. Tritt irgendwo der Term 0^0 auf, ist das ähnlich wie $1/0$ ein Fehler.

6.3 Ganzzahliger Exponent

Wie könnte man a^{-1} definieren so dass o.g. Rechengesetze auch für negative Exponenten gültig bleiben? Ausgehend von $a^n a^m = a^{n+m}$ erhält man im Spezialfall $n = 1$ und $m = -1$

$$a\,a^{-1} \quad = \quad a^1\,a^{-1} \quad = \quad a^{1+(-1)} \quad = \quad a^0 \quad = \quad 1 \qquad \text{falls } a \neq 0.$$

Dividiert man beide Seiten durch a, erhält man

$$a^{-1} \quad = \quad \frac{1}{a}.$$

In gleicher Weise lässt sich auch a^{-n} mit $n \in \mathbb{N}$ festlegen:

$$\begin{aligned} a^n\,a^{-n} \quad &= \quad a^{n+(-n)} \quad = \quad a^0 \quad = \quad 1 \qquad \text{falls } a \neq 0 \\ a^{-n} \quad &= \quad \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

Man hätte sich auch am Gesetz vom doppelten Exponenten orientieren können, um zu diesem Schluss zu kommen:

$$a^{-n} \quad = \quad a^{(-1)n} \quad = \quad \left(a^{-1}\right)^n \quad = \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad = \quad \frac{1}{a^n}.$$

6.4 Rationaler Exponent

Die Zahl a "ein halbes Mal mit sich selbst zu multiplizieren" macht wenig Sinn. Um $a^{1/2}$ festzulegen, orientiert man sich daher wieder am Gesetz $a^n a^m = a^{n+m}$. Wählt man nun $n = m = 1/2$ erhält man

$$a^{1/2}a^{1/2} \quad = \quad a^{1/2+1/2} \quad = \quad a^1 \quad = \quad a.$$

Damit ist $a^{1/2}$ eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt, d.h.

$$a^{1/2} \quad = \quad \sqrt{a} \qquad \text{falls } a \geq 0.$$

Im Fall $a < 0$ bleibt $a^{1/2}$ undefiniert. Man könnte zwar einen Wert irgendwie festlegen, aber dann würden o.g. Gesetze nicht mehr gelten.

Verallgemeinern wir nun diese Überlegung auf den Fall, wenn im Exponent ein beliebiger Kehrwert einer ganzen Zahl $n \neq 0$ steht. Ausgehend von dem Gesetz mit dem doppelten Exponent erhält man

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \quad = \quad a^{\frac{1}{n}n} \quad = \quad a^1 \quad = \quad a.$$

Damit ist $a^{1/n}$ eine Zahl, die n mal mit sich selbst multipliziert a ergibt, d.h.

$$a^{1/n} \quad = \quad \sqrt[n]{a} \qquad \text{falls } a > 0.$$

Den Fall $a = 0$ muss man ausschließen, da z.B. 0^{-1} nicht definiert ist, den Fall $a < 0$ muss man ausschließen, da z.B. $(-1)^{1/2}$ nicht definiert ist.

Es ist nun nicht mehr schwer, die Definition auf beliebige, rationale Exponenten zu erweitern:

$$a^{\frac{m}{n}} \quad = \quad a^{m\frac{1}{n}} \quad = \quad (a^m)^{1/n} \quad = \quad \sqrt[n]{a^m}.$$

In gleicher Weise hätte man auch wie folgt rechnen können:

$$a^{\frac{m}{n}} \quad = \quad a^{\frac{1}{n}m} \quad = \quad \left(a^{1/n}\right)^m \quad = \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

In der Tat gilt

$$\sqrt[n]{a^m} \quad = \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Obwohl wir uns bemüht haben, die Potenzfunktion so zu erweitern, dass o.g. Rechengesetze weiterhin gelten, klappt dies beim Gesetz mit dem doppelten Exponenten

$$(a^n)^m \quad = \quad a^{nm}$$

nicht falls $a < 0$ ist, selbst wenn beide Seiten definiert sind. Dies zeigt folgendes Beispiel mit $a = -1$, $n = 2$ und $m = 1/2$, das zu einem Wideresspruch führt:

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^1 \\ &= (-1)^{2\frac{1}{2}} && \text{Gesetz vom doppelten Exponent} \\ &= \left((-1)^2\right)^{1/2} && \text{hier nicht gültig!} \\ &= 1^{1/2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das Gesetz vom doppelten Exponent gilt jedoch immer, wenn $a > 0$ ist. Weiterhin gilt es auch für $a < 0$ sofern n, m ganzzahlig sind.

6.5 Zusammenfassung

Fassen wir zusammen.

Definition 6.2 (Erweiterung der Potenzfunktion)
Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = a\, a\, \cdots\, a.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^0 = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \neq 0 \\ \text{undefiniert} & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Für $a > 0$ und beliebige m, n mit $n \neq 0$ gilt

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

- Für natürlichzahlige Exponenten ist die Potenzfunktion definiert für beliebige Basis $a \in \mathbb{R}$.
- Für ganzzahlige Exponenten ist die Potenzfunktion nur definiert wenn die Basis $a \neq 0$ ist.
- Für alle anderen Exponenten ist die Potenzfunktion nur definiert wenn die Basis $a > 0$ ist.

Beispiel 6.3

$$\frac{ab^m - b^m}{b^{m-1}} = \frac{b^m(a-1)}{b^m b^{-1}} = \frac{a-1}{b^{-1}} = (a-1)b$$

Beispiel 6.4

$$\frac{\sqrt[5]{a^7}}{a^3} = a^{7/5}\, a^{-3} = a^{7/5-3} = a^{7/5-15/5} = a^{-8/5}$$

Beispiel 6.5

$$\begin{aligned} \sqrt{a\sqrt[3]{a}} &= \left(a\, a^{1/3}\right)^{1/2} \\ &= \left(a^{1+1/3}\right)^{1/2} \\ &= \left(a^{4/3}\right)^{1/2} \\ &= a^{\frac{4}{3}\frac{1}{2}} \\ &= a^{2/3}. \end{aligned}$$

7 Exponential- und Logarithmusfunktion

7.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion (kurz e-Funktion) ist definiert durch

$$f(x) \quad = \quad e^x.$$

Sie ist somit eine Anwendung der Potenzfunktion mit Basis $a = e$ und dem Argument $x \in \mathbb{R}$ im Exponent. Die Zahl

$$e \quad \approx \quad 2.71828\ldots$$

ist eine Naturkonstante, die in vielen Anwendungen auftritt. Die Nachkommastellen brechen nie ab und werden auch nicht periodisch, d.h. e ist eine irrationale Zahl und kann folglich nicht als Bruch aus ganzen Zahlen dargestellt werden.

Man kann e aber näherungsweise berechnen, indem man in den Term

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

große Werte für n einsetzt. Man schreibt hierfür auch

$$e \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Eine andere Möglichkeit, die wir im ersten Semester im Zusammenhang mit Taylor Polynomen kennen lernen, ist

$$e \quad = \quad 1 \; + \; \frac{1}{1} \; + \; \frac{1}{1 \cdot 2} \; + \; \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \; + \; \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \; + \; \ldots$$

Brauchbare Näherungen erhält man schon mit wenigen Summanden, da diese schnell klein werden. Mit den o.g. 5 Summanden landet man bereits bei $2.708333\ldots$.

Da e eine irrationale Zahl ist, kann man die Funktionswerte von e^x außer in Spezialfällen nicht von Hand ausrechnen. Vom Kapitel über Potenzrechnen weiß man aber zumindest, dass

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^1 &= e \\ e^{-1} &= {}^1\!/_e \end{aligned}$$

und

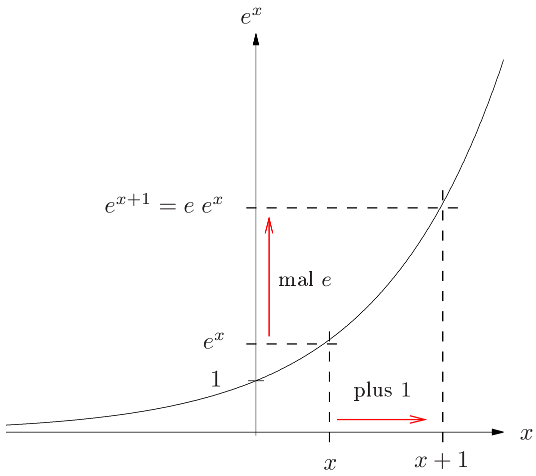
$$\begin{array}{lll} e^x \to \infty & \text{für} & x \to \infty \\ e^x \to 0 & \text{für} & x \to -\infty. \end{array}$$

Ist z.B $x = -100$, gilt

$$e^x \quad = \quad e^{-100} \quad = \quad \frac{1}{e^{100}} \quad \approx \quad 0$$

da e^{100} eine sehr große Zahl ist. Außerdem gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit hat man genug Information, um den Graph der e-Funktion skizzieren zu können.



Man sieht, dass die e-Funktion sehr schnell und streng monoton wächst. Geht man auf der x-Achse um 1 nach rechts, d.h. von x zu $x+1$, ändert sich der Funktionswert von e^x zu $e^{x+1} = ee^x$. Bei jedem Schritt um 1 auf der horizontalen Achse nimmt somit der Funktionswert um einen *konstanten Faktor* (hier e) zu! Dieses Verhalten nennt man *exponentielles Wachstum*. In den Naturwissenschaften und der Technik gibt es wenig, was schneller als exponentiell wächst. Selbst Schulden steigen aufgrund des Zinseszinseffekts "nur" exponentiell.

Für die Exponentialfunktion gelten die gleichen Rechengesetze wie für die Potenzfunktion. Da die Basis e positiv ist, ist e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Theorem 7.1 (Rechengesetze der e-Funktion)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ e^x e^y &= e^{x+y} \\ (e^x)^y &= e^{xy}. \end{aligned}$$

7.2 Natürlicher Logarithmus

Der natürliche Logarithmus (kurz ln-Funktion) ist die Umkehrfunktion der e-Funktion. Die ln-Funktion macht das "rückgängig", was die e-Funktion tut und umgekehrt:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "e\text{-Funktion}"] & y \arrow[l, bend left, "\ln\text{-Funktion}"] \end{tikzcd}$$

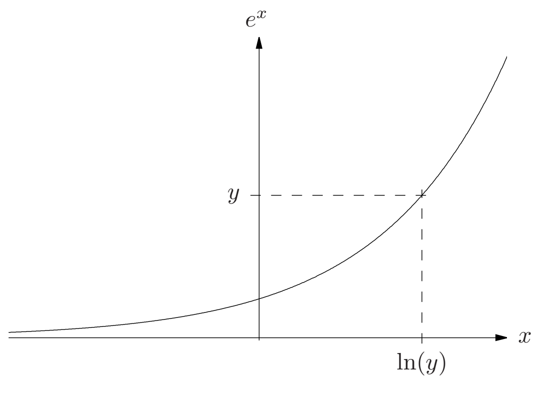
$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \\ e^{\ln(y)} &= y. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$e^x \;=\; y \qquad \text{genau dann wenn} \qquad \ln(y) \;=\; x.$$

Die ln-Funktion ist folglich definiert durch

$$\ln(y) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = y.$$



Das Berechnen des Funktionswerts $\ln(y)$ für ein gegebenes y erfordert somit die Lösung x der Gleichung $e^x = y$. Betrachten wir hierzu ein paar einfache Spezialfälle.

- **Spezialfall $\boldsymbol{y = 1}$.**

  $$\ln(1) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = 1\ .$$

  Da $e^0 = 1$ folgt $x = 0$ und somit $\ln(1) = 0$.

- **Spezialfall $\boldsymbol{y = e}$.**

  $$\ln(e) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = e\ .$$

  Da $e^1 = e$ folgt $x = 1$ und somit $\ln(e) = 1$.

- **Spezialfall $y = e^2$.**

$$\ln(e^2) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = e^2 \ .$$

Hier muss $x = 2$ sein und somit $\ln(e^2) = 2$.

- **Spezialfall $y = {}^1\!/_e$.**

$$\ln({}^1\!/_e) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = {}^1\!/_e \ .$$

Da $e^{-1} = {}^1\!/_e$ folgt $x = -1$ und somit $\ln({}^1\!/_e) = -1$.

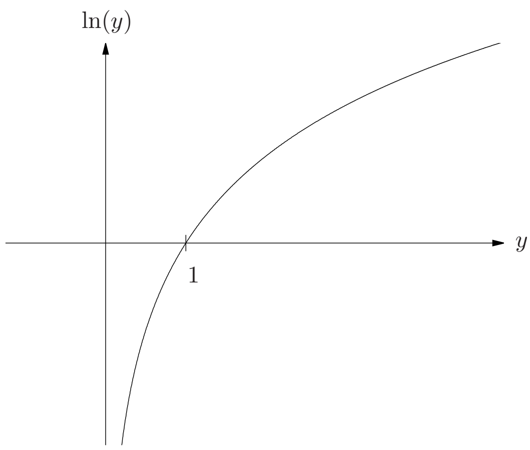
- **Spezialfall $y = -1$.**

$$\ln(-1) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } e^x = -1 \ .$$

Da die e-Funktion keine negativen Werte liefert, ist diese Gleichung nicht lösbar. Folglich ist $\ln(-1)$ undefiniert.

Es kann also durchaus passieren, dass die Gleichung $e^x = y$ keine Lösung x hat und somit $\ln(y)$ für dieses y nicht definiert ist. Am Graph der e-Funktion kann man ablesen, dass dies genau dann der Fall ist wenn $y \leq 0$. Da die e-Funktion aber streng monoton steigt, kann es kein y geben, für das die Gleichung $e^x = y$ mehr als eine Lösung x hat. Folglich ist der Funktionswert der ln-Funktion immer eindeutig.

Damit hat man genug Informationen um den Graph der ln-Funktion zu skizzieren:



7.3 Logarithmengesetze

Da die ln-Funktion Umkehrfunktion der e-Funktion ist, kann man erwarten, dass sie auch "umgekehrte" Rechengesetze hat.

- Ausgehend von dem Gesetz der e-Funktion

  $$e^{x+y} \quad = \quad e^x e^y$$

  kann man die Variablensymbole x und y durch $\ln(x)$ und $\ln(y)$ ersetzen und erhält

  $$e^{\ln(x)+\ln(y)} \quad = \quad e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} \quad = \quad xy.$$

  Nimmt man auf beiden Seiten den Logarithmus, erhält man

  $$\ln\left(e^{\ln(x)+\ln(y)}\right) \quad = \quad \ln(xy).$$

  Auf der linken Seite heben sich ln- und e-Funktion auf und es bleibt

  $$\ln(x)+\ln(y) \quad = \quad \ln(xy).$$

  Das Gesetz ähnelt tatsächlich dem der e-Funktion, nur dass Addition und Multiplikiation vertauscht ist.

  Man kann dieses (und andere) Logarithmengesetze intuitiver mit einem Diagramm herleiten. Das Ziel ist, den Term $\ln(x)+\ln(y)$ zu vereinfachen. Hierzu bildet man den Term zuerst durch die e-Funktion ab, wendet darauf die bekannten Gesetze der e-Funktion an und macht am Schluss die e-Funktion durch Anwendung der ln-Funktion wieder rückgängig:

  $$\boxed{\begin{tikzcd}
\ln(x)+\ln(y) \arrow[d, "e\text{-Funktion}"'] & & & & \ln(xy) \\
e^{\ln(x)+\ln(y)} & = & e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} & = & xy \arrow[u, "\ln\text{-Funktion}"']
\end{tikzcd}}$$

- In gleicher Weise ist es nun einfach, das entsprechende Gesetz für die Subtraktion zweier Logarithmen herzuleiten:

  $$\ln(x)-\ln(y) \quad = \quad \ln(x/y)$$

  $$\boxed{\begin{tikzcd}
\ln(x)-\ln(y) \arrow[d, "e\text{-Funktion}"'] & & & & & & \ln(x/y) \\
e^{\ln(x)-\ln(y)} & = & e^{\ln(x)}e^{-\ln(y)} & = & \dfrac{e^{\ln(x)}}{e^{\ln(y)}} & = & \dfrac{x}{y} \arrow[u, "\ln\text{-Funktion}"']
\end{tikzcd}}$$

- Betrachtet man in diesem Gesetz den Spezialfall $x = 1$ erhält man mit $\ln(1) = 0$ das sehr einfache Gesetz

$$-\ln(y) \quad = \quad \ln({}^1\!/_y).$$

- Ein letztes Logarithmengesetz erhält man durch Anwendung des Gesetzes für den doppelten Exponent der e-Funktion. Es gilt

$$a\ln(x) \quad = \quad \ln(x^a).$$

  Auch dies kann durch ein Diagramm gezeigt werden.

$$\begin{tikzcd}
a\ln(x) \arrow[d, "e\text{-Funktion}"'] & & & & \ln(x^a) \\
e^{a\ln(x)} & = & \left(e^{\ln(x)}\right)^a & = & x^a \arrow[u, "\ln\text{-Funktion}"']
\end{tikzcd}$$

Zusammenfassend haben wir damit folgende Logarithmengesetze:

Theorem 7.2 (Logarithmengesetze)

$$\begin{aligned}
\ln(x) + \ln(y) &= \ln(xy) \\
\ln(x) - \ln(y) &= \ln({}^x\!/_y) \\
-\ln(y) &= \ln({}^1\!/_y) \\
a\ln(x) &= \ln(x^a)
\end{aligned}$$

In Kapitel 6.4 wurde die Potenzfunktion für rationale Exponenten definiert. Mit Hilfe der e- und der ln-Funktion lässt sie sich auf Exponenten $x \in \mathbb{R}$ erweitern, vorausgesetzt die Basis a ist positiv. Es gilt

$$a^x \quad = \quad e^{\ln(a^x)} \quad = \quad e^{x\ln(a)}.$$

7.4 Allgemeine Logarithmusfunktion

Die ln-Funktion ist die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$. Diese Funktion wird nun verallgemeinert, indem man statt e eine beliebige Konstante a zulässt. Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ heißt Logarithmus zur Basis a und wird mit $\log_a$ bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "a \text{ hoch}"] & y \arrow[l, bend left, "\log_a"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \\ a^{\log_a(y)} &= y. \end{aligned}$$

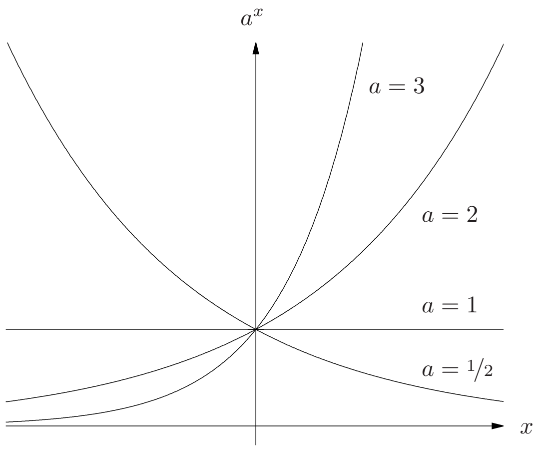
Damit gilt anlog zum natürlichen Logarithmus

$$a^x = y \quad \text{genau dann wenn} \quad \log_a(y) = x.$$

Die $\log_a$-Funktion ist folglich definiert durch

$$\log_a(y) = \text{das } x \text{ mit } a^x = y.$$

Die Berechnung von $\log_a(y)$ für ein gegebenes y läuft also wieder auf die Lösung x einer Gleichung $a^x = y$ raus. Dabei stellt sich die Frage, ob diese Gleichung überhaupt eine Lösung hat und ob die Lösung eindeutig ist.



- Wenn $a < 0$ ist, ist a^x nur für ganzzahlige x definiert. Die Gleichung $a^x = y$ ist somit nur lösbar wenn y eine ganzzahlige Potenz von a ist.
- Für $a = 0$ ist die Gleichung $0^x = y$ nur lösbar falls $y = 0$, hat dann aber unendlich viele Lösungen.
- Auch im Spezialfall $a = 1$ hat man das Problem, dass die Gleichung $1^x = y$ nur für $y = 1$ lösbar ist und dann unendlich viele Lösungen hat.

Setzt man aber voraus, dass $a > 0$ und $a \neq 1$ ist, hat die Gleichung genau eine Lösung für jedes $y > 0$, d.h. man ist in der gleichen Situation wie beim natürlichen Logarithmus.

Berechnen wir zunächst wieder ein paar einfache Funktionswerte.

$$\begin{aligned} \log_5(25) &= \text{das } x \text{ mit } 5^x = 25 \\ &= 2 \qquad \text{Einsetzen: } 5^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= \text{das } x \text{ mit } a^x = 1 \\ &= 0 \qquad \text{Einsetzen: } a^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(a) &= \text{das } x \text{ mit } a^x = a \\ &= 1 \qquad \text{Einsetzen: } a^1 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_9(3) &= \text{das } x \text{ mit } 9^x = 3 \\ &= 1/2 \qquad \text{Einsetzen: } 9^{1/2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{1/2}(8) &= \text{das } x \text{ mit } (1/2)^x = 8 \\ &= -3 \qquad \text{Einsetzen: } (1/2)^{-3} = \left(2^{-1}\right)^{-3} = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Falls Sie auf Ihrem Taschenrechner keinen Knopf für $\log_a$ finden: Man kann $\log_a(y)$ wie folgt mit Hilfe der ln-Funktion berechnen. Zu lösen ist die Gleichung

$$a^x = y.$$

Wendet man auf beide Seiten die ln-Funktion an und nutzt deren Rechengesetze, erhält man

$$\begin{aligned} \ln(a^x) &= \ln(y) \\ x\ln(a) &= \ln(y) \\ x &= \frac{\ln(y)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man die allgemeine Logarithmusfunktion immer auf natürliche Logarithmen reduzieren.

Theorem 7.3 (Reduktion auf natürlichen Logarithmus)
Sei $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt für alle $y > 0$

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}.$$

Hiermit lassen sich die Rechengesetze des natürlichen Logarithmen unmittelbar auf die allgemeine Logarithmusfunktion übertragen.

$$
\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.3)} \\
&= \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.2)} \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} && \text{(Bruchrechnen)} \\
&= \log_a(x) + \log_a(y) && \text{(Theorem 7.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_a(x/y) &= \frac{\ln(x/y)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.3)} \\
&= \frac{\ln(x) - \ln(y)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.2)} \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} - \frac{\ln(y)}{\ln(a)} && \text{(Bruchrechnen)} \\
&= \log_a(x) - \log_a(y) && \text{(Theorem 7.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u \log_a(x) &= u\frac{\ln(x)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.3)} \\
&= \frac{u \ln(x)}{\ln(a)} && \text{(Bruchrechnen)} \\
&= \frac{\ln(x^u)}{\ln(a)} && \text{(Theorem 7.2)} \\
&= \log_a(x^u) && \text{(Theorem 7.3)}
\end{aligned}
$$

8 Summenzeichen

Ein Term, der aus n Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ besteht, kann unter Verwendung des Summensymbols Σ kompakter geschrieben werden:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Wer schon einmal programmiert hat, denkt beim Summenzeichen an eine `for`-Schleife:

```
sum = 0
for i = 1...n
    sum = sum + a[i]
```

Die Variable i heißt hierbei Summationsindex oder Laufvariable. Die Grenzen 1 und n heißen Summationsgrenzen.

Beispiel 8.1

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad = \quad \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}.$$

Die Laufvariable i kann beliebig umbenannt werden, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Häufig hat man Summen mit alternierendem Vorzeichen. Dies lässt sich mit einem Faktor $(-1)^i$ bewerkstelligen.

Beispiel 8.2

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \quad = \quad \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} a_i$$

Beispiel 8.3 Polynome mit Koeffizenten $a_0, \ldots, a_n$ können mit Hilfe von Summen kompakt dargestellt werden:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Für Summen gibt es zwei Rechenregeln, die direkt aus dem Kommutativgesetz und dem Distributivgesetz der Addition folgen:

Theorem 8.4

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} b_i \\ \sum_{i=1}^{n} ca_i &= c\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= a_1 + b_1 \ + \ a_2 + b_2 \ + \ \ldots \ + \ a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ + \ b_1 + b_2 + \ldots + b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} b_i \\ \sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

9 Fakultätsfunktion

Die Fakultätsfunktion ist für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$n! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Ergänzend wird noch definiert

$$0! \quad = \quad 1.$$

Die Fakultätsfunktion wächst sehr schnell, sogar schneller als die e-Funktion. Man sieht dies an ein paar Beispielen:

$$\begin{aligned} 5! &= 120 \\ 10! &= 3\,628\,800 \\ 20! &= 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \end{aligned}$$

Terme mit Fakultätsfunktionen lassen sich oft vereinfachen:

Beispiel 9.1

$$7! \cdot 8 \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \quad = \quad 8!$$

Dies lässt sich verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} n!(n+1) &= (n+1)! \\ (n-1)!n &= n! \end{aligned}$$

Beispiel 9.2

$$\frac{5!}{5} \quad = \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad = \quad 4!$$

Dies lässt sich veralltemeinern zu

$$\frac{n!}{n} \quad = \quad (n-1)!$$

Beispiel 9.3

$$\frac{7!}{5!} \quad = \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \quad = \quad 6 \cdot 7 \quad = \quad 42$$

$$7! - 5! \quad = \quad 5!(6 \cdot 7 - 1) \quad = \quad 5! \cdot 41$$

Beispiel 9.4 Im ersten Semester wird gezeigt, dass für die e-Funktion gilt

$$e^x \quad = \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad = \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

10 Binomialkoeffizienten und binomische Formeln

10.1 Allgemeine binomische Formel, Pascal Dreieck

Häufig trifft man auf Produkte von Summen wie z.B.

$$(a+b)(c+d+e)(f+g)$$

und muss diese "ausmultiplizieren". Damit ist gemeint, so lange das Distributivgesetz anzuwenden, bis eine Summe von Produkten entsteht. Dies kann man natürlich schrittweise machen, in Beispiel 3.4 auf Seite 17 wurde jedoch eine einfache Regel aufgestellt, mit der es schneller geht: Man wählt aus jedem Faktor einen Summand und multipliziert diese. Im o.g. Beispiel wären das z.B. acf oder bdg. Hiervon bildet man alle Kombinationen und summiert diese auf. Da es sehr viele Kombinationen gibt (im o.g. Beispiel $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$), sollte man systematisch vorgehen. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d+e)(f+g) \quad &= \\ acf + acg \quad + \quad adf + adg \quad &+ \quad aef + aeg \quad + \\ bcf + bcg \quad + \quad bdf + bdg \quad &+ \quad bef + beg \end{aligned}$$

Besonders relevant ist der Term

$$(a+b)^n \quad = \quad (a+b)(a+b)\cdots(a+b),$$

der aus einem Produkt von n gleichen Faktoren $(a+b)$ besteht. Betrachten wir zunächst Spezialfälle für kleine Werte von n.

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= \mathbf{1} \\ (a+b)^1 &= \mathbf{1}a + \mathbf{1}b \\ (a+b)^2 &= \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2. \end{aligned}$$

Das letzte Beispiel ist die bekannte binomische Formel. Mit höheren Exponenten n wird diese verallgemeinert. Bei der Berechnung von $(a+b)^3$ lohnt es sich, systematisch vorzugehen: Es werden zunächst alle Kombinationen mit drei a's und null b's gesucht, dann alle mit zwei $a's$ und einem b, dann alle mit einem a und zwei b's und zuletzt alle mit null a's und drei $b's$.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\ &= aaa && 3a,\ 0b \\ &= aab + aba + baa && 2a,\ 1b \\ &= abb + bab + bba && 1a,\ 2b \\ &= bbb && 0a,\ 1b \\ &= \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3 \end{aligned}$$

Führen wir die gleiche Berechnung für $(a+b)^4$ durch:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\
&= aaaa && 4a,\ 0b \\
&= aaab + aaba + abaa + baaa && 3a,\ 1b \\
&= aabb + abab + abba + baab + baba + bbaa && 2a,\ 2b \\
&= abbb + babb + bbab + bbba && 1a,\ 3b \\
&= bbbb && 0a,\ 4b \\
&= \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4
\end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage nach einem Schema, mit dem man die Summanden von $(a+b)^n$ für beliebiges n einfacher berechnen kann. Klar ist, dass jeder Summand aus insgesamt n Faktoren mit a's und b's bestehen muss, d.h. die Form $a^{n-k}b^k$ für $k = 0, \ldots, n$ hat. Aber wie können die zugehörigen Konstanten berechnet werden ohne die lästige Zählerei?

Eine erste Antwort liefert das Pascal Dreieck. Es ist ein Dreieck, an dessen Rändern Einsen stehen. Jede Zahl im Inneren ergibt sich als Summe aus den beiden schräg darüber stehenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Die Zeilen und Spalten werden ab Null indiziert. Der Eintrag in der n-ten Zeile und k-ten Spalte wird mit

$$\binom{n}{k}$$

bezeichnet (gesprochen "n über k") und heißt Binomialkoeffizient. So ist z.B.

$$\binom{4}{2} = 6, \qquad \binom{5}{4} = 5, \qquad \binom{5}{3} = 10$$

Die Binomialkoeffizienten sind anhand des Pascal Dreiecks rekursiv definiert.

- An den Rändern (Spalte $k = 0$ oder $k = n$) stehen Einser.
- Den inneren Eintrag in der n-ten Zeile und k-ten Spalte erhält man als Summe der Einträge in der darüberliegenden $n-1$-ten Zeile und den benachbarten Spalten $k-1$ und k:

Definition 10.1 (Binomialkoeffizienten)
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{falls } 0 < k < n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Werte außerhalb des Dreiecks werden mit Null ergänzt.

Man sieht, dass in der n-ten Zeile genau die Zahlen stehen, die bei der Berechnung von $(a+b)^n$ aufgetreten sind, zumindest für $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Nach dem gleichen Schema ergibt sich nun $(a+b)^5$.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \underbrace{\binom{5}{0}}_{1} a^5 b^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} a^4 b^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} a^3 b^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} a^2 b^3 \\ &+ \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} a^1 b^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} a^0 b^5 \\ &= \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4 b + \mathbf{10}a^3 b^2 + \mathbf{10}a^2 b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Summensymbols lässt sich dies kompakt darstellen durch

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k}\, b^k.$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ erhält man die allgemeine binomische Formel.

Theorem 10.2
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

10.2 Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Für große Werte von n ist die rekursive Berechnung der Binomialkoeffizieten mit dem Pascal Dreieck mühsam und zum Glück gibt es einen einfacheren Weg: Man kann den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als Bruch darstellen, der aus k Faktoren im Zähler und k Faktoren im Nenner besteht. Die k Faktoren im Zähler erhält man durch Rückwärtszählen ab n, die k Faktoren im Nenner durch Vorwärtszählen ab 1. Anhand des Pascal Dreiecks verifiziert man z.B.

$$\begin{aligned}
\binom{4}{3} &= \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\\
\binom{5}{2} &= \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = \frac{20}{2} = 10\\
\binom{7}{4} &= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35
\end{aligned}$$

Allgemein gilt somit

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Obwohl Brüche auftreten, ist das Ergebnis immer eine ganze Zahl, d.h. der gesamte Nenner kann gekürzt werden.

Man kann den Bruch noch vereinfachen, indem man mit $(n-k)!$ erweitert. Hierdurch kommen im Zähler die Faktoren $(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1$ dazu, so dass man im Zähler alle Faktoren von n bis 1 und somit $n!$ erhält:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\,\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Behauptung, dass man die Einträge im Pascal Dreieck nach o.g. Formel geschlossen berechnen kann, lässt sich damit wie folgt formulieren:

Theorem 10.3 (Binomialkoeffizienten)
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \le n\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. Theorem 10.3 ist korrekt für $k = 0$ und $k = n$: An den Rändern des Pascal Dreiecks stehen Einsen und man erhält auch mit der neuen Formel

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1\\
\binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1.
\end{aligned}$$

Gezeigt werden muss noch, dass die Formel aus Theorem 10.3 die gleiche Rekursionsgleichung erfüllt, nach der das Pascal Dreieck aufgebaut ist, d.h.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{für } 0 < k < n$$

Wir beginnen auf der rechten Seite, ersetzen die beiden Binomialkoeffizienten durch die neue Formel, bringen die Brüche durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen.

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+(n-k))}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

10.3 Kombinatorik

Im letzten Kapitel haben wird den Zusammenhang zwischen Pascal Dreieck und der wesentlich einfacheren Formel zur Berechnung der Binominalkoeffizieten gezeigt. Unklar ist aber noch, weshalb bei der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

genau diese Binomialkoeffizienten auftreten — verifiziert wurde dies nur für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Die Frage ist, weshalb es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, aus den n Faktoren

$$(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

k Faktoren auszuwählen, aus denen man b nimmt (und entsprechend aus den übrigen $n-k$ Faktoren a) um das Produkt $a^{n-k}\, b^k$ zusammenzustellen.

Allgemeiner formuliert: Warum gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Dingen k auszuwählen?

Betrachten wir z.B. 5 Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ und überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus diesen 3 auszuwählen. Für die erste Zahl hat man 5 Möglichkeit, für die zweite 4, für die dritte 3, also ergeben sich insgesamt $5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten. Berücksichtigt werden muss jedoch, dass man dabei identische Auswahlen mehrfach zählt! So haben wir z.B. $(2, 3, 5)$ und $(3, 5, 2)$ als zwei Möglichkeiten gezählt, obwohl die geichen Zahlen gewählt wurden — lediglich in anderer Reihenfolge. Man muss also noch durch die Anzahl möglicher Anordnungen der 3 Zahlen teilen und erhält

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Möchte man allgemein aus n Zahlen k auswählen, ergeben sich entsprechend

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Dies ist genau die Formel, mit der $\binom{n}{k}$ auf Seite 58 berechnet wurde.

Binomialkoeffizienten treten in vielen anderen Anwendungen auf. Das bekannteste Beispiel dürfte Lotto sein. Die Anzahl Möglichkeiten, aus 49 Kugeln 6 auszuwählen, ist

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!}.$$

Um diesen Wert zu berechnen, sollte man natürlich nicht 49! ausrechnen, da diese Zahl sehr groß ist. Um die Zwischenergebnisse klein zu halten, rechnet man geschickter

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816.$$

Wählt man aus n Objekten k aus, kommt das auf's Gleiche raus wie wenn man die übrigen $n-k$ auswählt (und weglässt). Die Anzahl Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen ist somit gleich der Anzahl Möglichkeiten, die anderen $n-k$ auszuwählen. In Formeln bedeutet dies

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

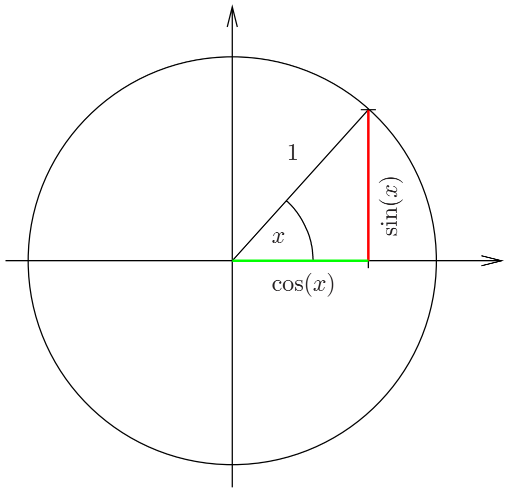
Man erkennt dies auch daran, dass das Pascal Dreieck symmetrisch ist: In Spalte k und Spalte $n-k$ steht immer der gleiche Wert. Rechnerisch sieht man das wie folgt:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

11 Trigonometrische Funktionen

11.1 Definition von Sinus und Cosinus

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus lassen sich am einfachsten durch ein Bild definieren. Hierzu zeichnet man x als Winkel in einem Einheitskreis ein und kann darin $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ablesen:



Für jeden Winkel x gilt somit

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ -1 &\leq \cos(x) \leq 1. \end{aligned}$$

Winkel werden immer im Bogenmaß angegeben. Ein rechter Winkel ist somit $\pi/2$, der Vollkreis 2π. Vergrößert man den Winkel um 2π, ändert sich am Bild nichts und es gilt somit

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen sind somit 2π-periodisch.

Ein paar einfache Werte für Sinus und Cosinus kann man am Bild ablesen:

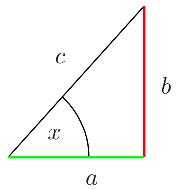
$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin(x) = 0, \quad \cos(x) = 1 \\ x = \pi/2 \quad &\Rightarrow \quad \sin(x) = 1, \quad \cos(x) = 0 \\ x = \pi \quad &\Rightarrow \quad \sin(x) = 0, \quad \cos(x) = -1 \end{aligned}$$

In o.g. Bild erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel x, Gegenkathete $\sin(x)$, Ankathete $\cos(x)$ und Hypothenuse 1. Aus dem Satz von Pythagoras folgt damit die wichtige Formel

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man schreibt i.a. $\sin^2(x)$ statt $\sin(x)^2$ um deutlich zu machen, dass $\sin(x)$ quadriert wird und nicht etwa nur x wenn man die Klammern weglässt.

Betrachten wir nun ein beliebiges, rechtwinkliges Dreieck mit Winkel x, Gegenkathete b, Ankathete a und Hypothenuse c.



Verkleinert man dieses Dreieck um Faktor c, entsteht das identische Dreieck wie im ersten Bild mit Hypothenuse 1. Da sich jede Länge um Faktor c verkleinert hat, gilt damit in jedem rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(x) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \cos(x) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}.$$

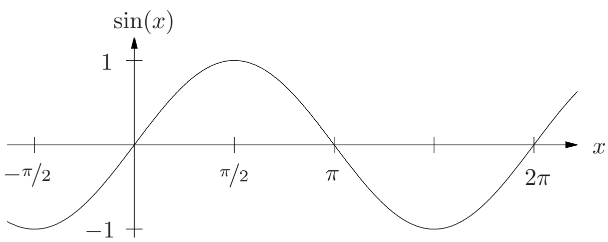
Man kann auch die Gegenkathete und die Ankathete in Relation setzen und erhält die Tangens Funktion:

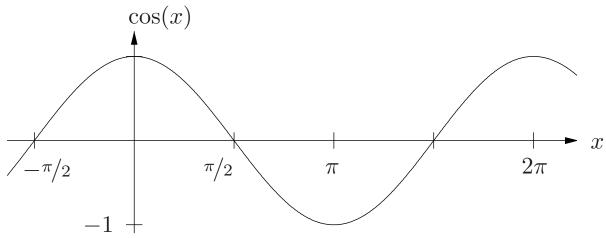
$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Im vorletzten Schritt wurde der Bruch mit $1/c$ erweitert. Man kann die Tangensfunktion also immer durch Sinus und Cosinus ersetzen.

11.2 Schaubilder und Rechengesetze

Der Graph der Sinus- und Cosinusfunktion lässt sich wie folgt skizzieren.





Man erkennt, dass die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und die Cosinusfunktion achsensymmetrisch zur horizontalen Achse, d.h.

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(-x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Die Sinusfunktion ist daher eine ungerade Funktion, die Cosinusfunktion eine gerade. Diese Eigenschaft hätte man übrigens auch direkt am Bild mit dem Einheitskreis ablesen können.

Die Kurven der Sinus- und Cosinusfunktion sind identisch bis auf eine Verschiebung: Verschiebt man $\sin(x)$ um $\pi/2$ nach links, erhält man $\cos(x)$. Eine Verschiebung um $\pi/2$ nach links wird durch eine Addition von $\pi/2$ an die Funktionsvariable bewirkt und man erhält die Formel

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x).$$

Verschiebt man $\sin(x)$ um π nach links, erhält man $-\sin(x)$, d.h.

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

Entsprechend gilt für den Cosinus

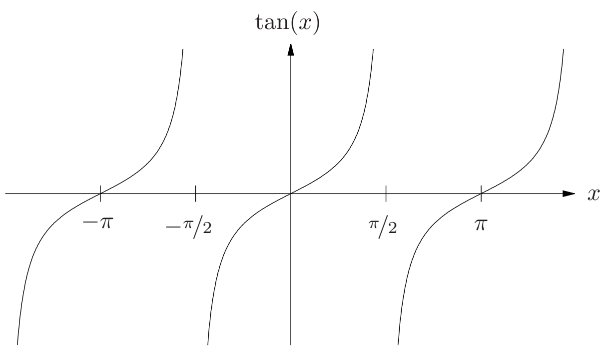
$$\begin{aligned} \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Es entstehen Pole an den Stellen, wo $\cos(x) = 0$, d.h. bei

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Während die Sinus- und Cosinusfunktion 2π-periodisch sind, hat die Tangensfunktion nur die halbe Periodendauer π: Aus

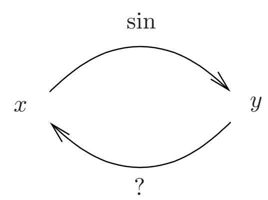
$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

folgt

$$\tan(x+\pi) \quad = \quad \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \quad = \quad \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} \quad = \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad = \quad \tan(x).$$

11.3 Arcus Sinus Funktion

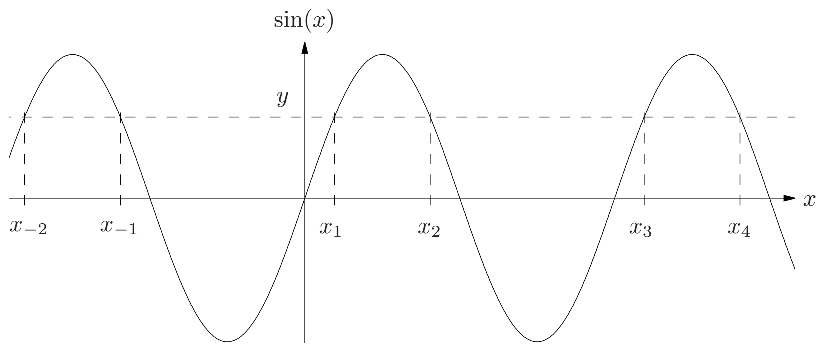
Ähnlich wie die ln-Funktion als Umkehrfunktion der e-Funktion definiert wurde, ist nun die Umkehrfunktion der Sinusfunktion gesucht.



Die Umkehrfunktion soll zu einem gegebenen y das x liefern mit

$$\sin(x) = y.$$

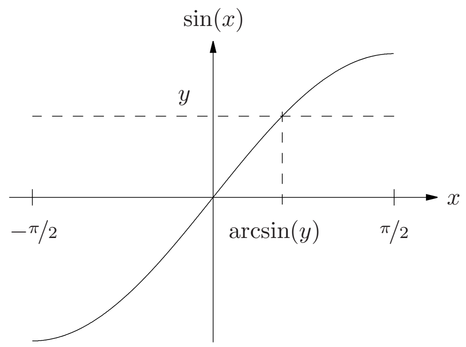
Wie man am Schaubild der Sinusfunktion erkennen kann, ist diese Gleichung jedoch nur für $y \in [-1, 1]$ lösbar und hat für jedes solche y unendlich viele Lösungen.



Es ist somit z.B. nicht klar, ob die Umkehrfunktion an der Stelle $y = 0$ den Funktionswert $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ oder $x = -\pi$, usw. liefern soll.

Es gibt jedoch immer genau eine Lösung im Intervall

$$x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

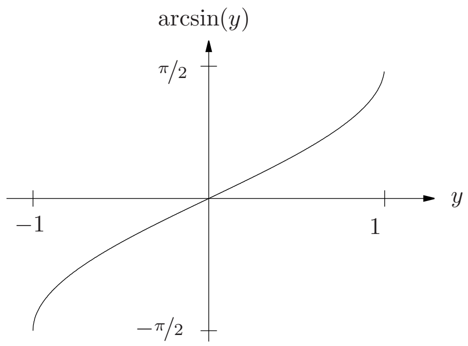


Die Funktion, die jedem $y \in [-1, 1]$ das eindeutige $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mit $\sin(x) = y$ zuordnet, heißt Arcus Sinus.

$$\arcsin(y) \quad = \quad \begin{cases} \text{das } x \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ mit } \sin(x) = y & \text{falls } y \in [-1, 1] \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein paar einfache Funktionswerte der arcsin Funktion kann man aus dem Schaubild ablesen:

$$\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1) = \pi/2, \quad \arcsin(-1) = -\pi/2$$



Da arcsin nur für Argumente in $[-1, 1]$ definiert ist und Funktionswerte in $[-\pi/2, \pi/2]$ liefert, schreibt man

$$\arcsin \in [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

und es gilt

$$\begin{array}{rcll} \arcsin(\sin(x)) & = & x & \text{für alle } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \sin(\arcsin(y)) & = & y & \text{für alle } y \in [-1, 1] \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} x \in [-\pi/2, \pi/2] \arrow[r, bend left, "\sin"] & y \in [-1, 1] \arrow[l, bend left, "\arcsin"] \end{tikzcd}$$

Für $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$ ist jedoch

$$\arcsin(\sin(x)) \quad \neq \quad x.$$

So ist z.B. für $x = \pi$

$$\arcsin(\sin(\pi)) \quad = \quad \arcsin(0) \quad = \quad 0$$

oder für $x = 3\pi/2$

$$\arcsin\left(\sin(3\pi/2)\right) \quad = \quad \arcsin(-1) \quad = \quad -\pi/2.$$

Dies führt beim Umformen von Gleichungen leicht zu Fehlern. Möchte man z.B. die Gleichung

$$\sin(x) \quad = \quad 1$$

nach x auflösen, könnte man auf beiden Seiten arcsin anwenden und erhält

$$\arcsin(\sin(x)) \quad = \quad \arcsin(1).$$

Es wäre aber falsch, jetzt auf der linken Seite $\arcsin(\sin(x))$ durch x zu ersetzen, da dies nur für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ gilt. Die entstehende Gleichung

$$x \quad = \quad \arcsin(1)$$

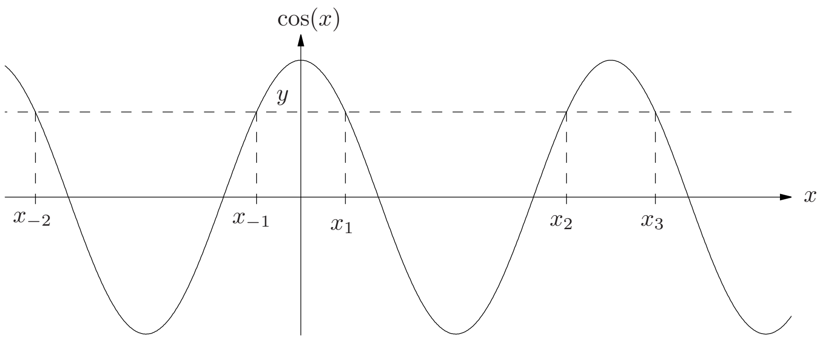
hätte auch nur eine Lösung $x = \pi/2$, während die ursprüngliche Gleichung $\sin(x) = 1$ unendlich viele Lösungen $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hat!

11.4 Arcus Cosinus Funktion

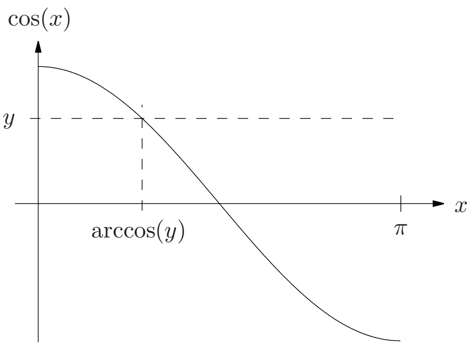
Wie beim Sinus hat auch für die Cosinusfunktion die Gleichung

$$\cos(x) \quad = \quad y$$

nur für $y \in [-1, 1]$ eine Lösung x, dort aber unendlich viele.



Es gibt aber genau eine Lösung $x \in [0, \pi]$.



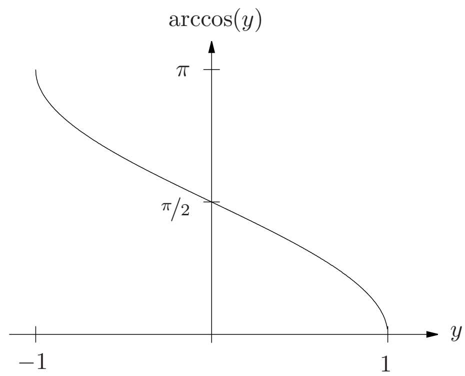
Diese Lösung wird mit $\arccos(y)$ bezeichnet.

$$\arccos \in [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arccos(y) \;=\; \begin{cases} \text{das } x \in [0,\pi] \text{ mit } \cos(x) = y & \text{falls } y \in [-1,1] \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Am Bild erkennt man z.B.

$$\arccos(0) = \pi/2, \quad \arccos(1) = 0, \quad \arccos(-1) = \pi.$$

Die arccos Funktion lässt sich damit wie folgt skizzieren:



Ähnlich wie beim Sinus gilt

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in [0,\pi] \\ \cos(\arccos(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in [-1,1] \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x \in [0,\pi] \arrow[rr, bend left, "\cos"] & & y \in [-1,1] \arrow[ll, bend left, "\arccos"] \end{tikzcd}$$

12 Funktionen

Der Begriff "Funktion" kommt in der Mathematik ständig vor. Es lohnt sich daher, gut zu verstehen, was damit gemeint ist.

Beispiele von Funktionen sind Addition, Multiplikation, Division, e-Funktion, Wurzel, Sinus, ... Funktionen treten aber auch außerhalb der Mathematik auf. Jedes Land hat genau eine Hauptstadt. Folglich handelt es sich bei der Zuordnung von Land zu Hauptstadt um eine Funktion. Da jeder Mensch genau eine Mutter hat, ist auch diese Zuordnung eine Funktion.

Abstrahiert man von diesen Beispielen, besteht eine Funktion zunächst aus zwei Mengen: einer Menge A, aus der die Argumente der Funktion kommen und einer Menge B, in der die Funktionswerte liegen. Eine Funktion von A nach B ist dann eine Zuordnung von

jedem $a \in A$ zu
genau einen Funktionswert $b \in B$.

Um auszudrücken, dass f eine Funktion von A nach B ist, schreibt man

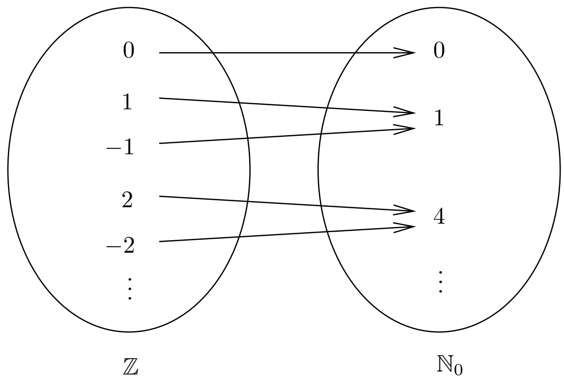
$$f \in A \to B.$$

Zu einem $a \in A$ wird das ihm durch die Funktion f zugeordnete $b \in B$ mit $f(a)$ bezeichnet.

Beispiel 12.1 Die Quadratfunktion auf ganzen Zahlen ordnet jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ einen Funktionswert $b \in \mathbb{N}_0$ zu durch

$$b = a^2.$$

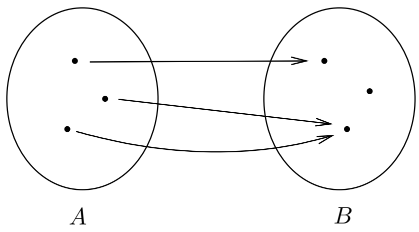
Dies lässt sich durch folgendes Bild darstellen.



Offensichtlich wird jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ genau eine Zahl $b \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet, d.h. es handelt sich um eine Funktion $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$. Es ist dabei unerheblich, dass unterschiedlichen Zahlen wie z.B. 2 und -2 der selbe Funktionswert 4 zugeordnet wird. Weiterhin ist es unerheblich, dass es Zahlen wie z.B. $3 \in \mathbb{N}_0$ gibt, die nicht als Funktionswert auftreten.

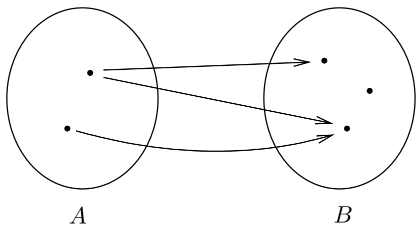
Beispiel 12.2 Die Additionsfunktion scheint zunächst nicht in dieses allgemeine Schema zu passen. Schließlich wird z.B. durch $3 + 4 = 7$ nicht einer Zahl eine andere Zahl zugeordnet sondern *zwei* Zahlen 3 und 4 die Zahl 7. Die Additionsfunktion ordnet somit jedem *Paar* von Zahlen eine Zahl zu. A ist in diesem Beispiel also die Menge aller Paare von reellen Zahlen, B die Menge aller reellen Zahlen.

Beispiel 12.3



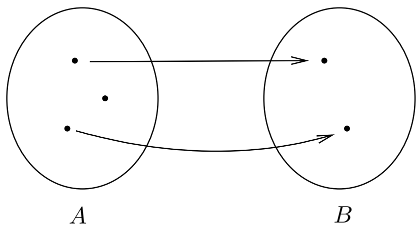
Jedem $a \in A$ wird genau ein $b \in B$ zugeordnet. Folglich handelt es sich um eine Funktion.

Beispiel 12.4



Es gibt ein $a \in A$, dem zwei verschiedene b zugeordnet werden. Folglich handelt es sich nicht um eine Funktion.

Beispiel 12.5



Es gibt ein $a \in A$, dem kein b zugeordnet wird. Folglich handelt es sich nicht um eine Funktion.

12.1 Funktionsterme für reelle Funktionen

Ein wichtiger Spezialfall sind reelle Funktionen, d.h. Funktionen $f \in A \to B$ wobei $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Die Zuordnung lässt sich in solchen Fällen oft durch einen Term beschreiben.

Beispiel 12.6 Durch

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; x^2$$

ist eine Funktion definiert. Jedem $x \in \mathbb{R}$ wird genau ein Funktionswert x^2 zugeordnet.

Beispiel 12.7 Falsch ist hingegen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \sqrt{x}.$$

Durch $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird ausgedrückt, dass *jeder* reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein Funktionswert zugeordnet wird, der Wert des Terms $\sqrt{x}$ ist jedoch nur für $x \in \mathbb{R}_0^+$ definiert. Korrekt wäre folglich

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \sqrt{x}.$$

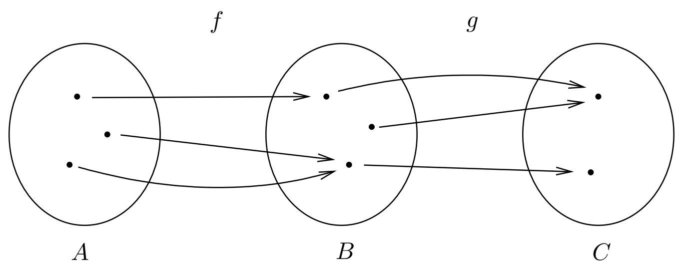
Beispiel 12.8 Durch

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \frac{1}{x-2}$$

ist eine Funktion definiert, die jedem $x \in \mathbb{R}$ außer $x = 2$ einen Funktionswert zuordnet. An der Stelle $x = 2$ ist die Funktion undefiniert.

12.2 Zusammengesetzte Funktionen

In folgendem Diagramm sind zwei Funktionen $f \in A \to B$ und $g \in B \to C$ dargestellt.

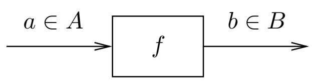


Durch f wird jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet, dem durch g wiederum genau ein $c \in C$ zugeordnet wird. Fasst man beide Schritte zusammen, wird jedem $a \in A$ genau ein $c \in C$ zugeordnet. Es entsteht dadurch eine neue Funktion von A nach C, die man als Komposition $g \circ f$ (gesprochen "g nach f") bezeichnet. Es gilt

$$(g \circ f)(a) \quad = \quad g\big(f(a)\big).$$

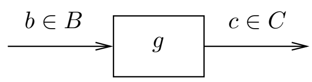
Auf $a \in A$ wird *zuerst* die Funktion f angewandt und *danach* auf das Ergebnis g obwohl man zuerst g schreibt und dann f. Da man das Funktionssymbol immer *vor* das Argument schreibt und damit von rechts nach links, kehrt sich die Reihenfolge von f und g um, was sehr verwirrend ist.

Man kann sich eine Funktion $f \in A \to B$ auch als schwarzen Kasten vorstellen, in den man links das Argument $a \in A$ steckt und aus dem dann rechts der Funktionswert $b \in B$ herauskommt.



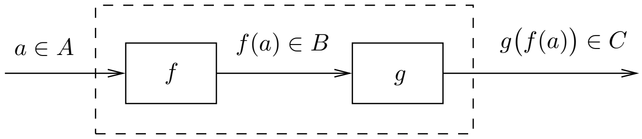
$f(a) = b$

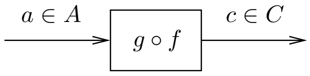
Gleiches gilt für eine Funktion $g \in B \to C$.



$g(b) = c$

Schaltet man die beiden Blöcke hintereinander, entsteht ein Gesamtsystem, in das man links a steckt und bei dem rechts $g(f(a))$ herauskommt, d.h. die Funktion $g \circ f \in A \to C$.





$$(g \circ f)(a) = c$$

Definition 12.9 (Komposition)
Sei $f \in A \to B$ und $g \in B \to C$. Die Komposition von f und g ist definiert durch

$$g \circ f \in A \to C, \qquad (g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big).$$

Angenommen f und g sind reelle Funktionen, die durch einen Funktionsterm gegeben sind. Wie lässt sich hieraus ein Funktionsterm für $g \circ f$ berechnen?

Beispiel 12.10 Sei

$$f(x) \;=\; x+1, \qquad g(x) \;=\; x^2.$$

Laut Definition 12.9 ist dann

$$(g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big).$$

Im ersten Schritt wird die "innere" Funktion $f(x)$ durch ihren Funktionsterm ersetzt und man erhält

$$g\big(f(x)\big) \;=\; g(x+1).$$

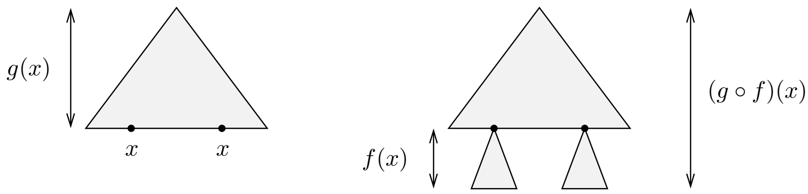
Ersetzt man in $g(x) = x^2$ nun jedes Auftreten des Variablensymbols x durch den Term $x+1$ erhält man

$$g(x+1) \;=\; (x+1)^2.$$

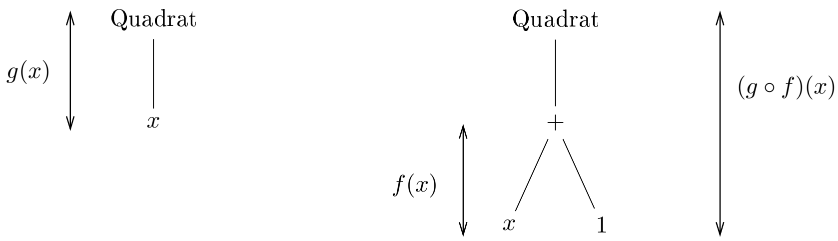
Damit ist

$$(g \circ f)(x) \;=\; (x+1)^2. \;\Box$$

Generell muss man beim Ersetzen eines Variablensymbols durch einen Term auf die Klammerung achten. Im Zweifelsfall kann man auf die Baumdarstellung zurückgreifen, bei der keine Klammern erforderlich sind, siehe Kapitel 2.1. Den Baum $(g \circ f)(x)$ erhält man, indem man im Baum $g(x)$ jedes Blatt x durch den Baum $f(x)$ ersetzt:



Im vorigen Beispiel stellt sich diese Konstruktion wie folgt dar:



Beispiel 12.11 Mit den gleichen Funktionen

$$f(x) \; = \; x + 1, \qquad g(x) \; = \; x^2.$$

wie im vorigen Beispiel soll nun ein Term für $f \circ g$ berechnet werden. Die Vorgehensweise ist dabei gleich:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{(Definition Komposition)} \\ &= f(x^2) && \text{($g(x)$ durch x^2 ersetzen)} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde in $f(x) = x+1$ das Variablensymbol x auf beiden Seiten durch den Term x^2 ersetzt. □

Die beiden Beispiele zeigen, dass i.a.

$$g \circ f \quad \neq \quad f \circ g.$$

Die Funktionskomposition ist somit *nicht* kommutativ.

Beispiel 12.12 Sei

$$f(x) \; = \; e^x(1 - x), \qquad g(x) \; = \; 3x.$$

Dann ist

$$(g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big) \;=\; g\left(e^x(1 - x)\right) \;=\; 3e^x(1 - x)$$

$$(f \circ g)(x) \;=\; f\big(g(x)\big) \;=\; f(3x) \;=\; e^{3x}(1 - 3x).$$

Beispiel 12.13 Sei

$$f(x) \; = \; e^x(1 - x), \qquad g(x) \; = \; x + \sin(x).$$

Dann ist

$$(g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big) \;=\; g\left(e^x(1 - x)\right) \;=\; e^x(1 - x) + \sin\left(e^x(1 - x)\right)$$

$$(f \circ g)(x) \;=\; f\big(g(x)\big) \;=\; f(x + \sin(x)) \;=\; e^{x+\sin(x)}\left(1 - (x + \sin(x))\right).$$

12.3 Umkehrfunktion

Wir haben bereits Beispiele für Umkehrfunktionen kennen gelernt:

- ln-Funktion und allgemeine Logarithmusfunktion (Kapitel 7.2 und 7.4)
- arcsin- und arccos Funktion (Kapitel 11.3 und 11.4).

In diesem Kapitel wird das Problem allgemeiner betrachtet. Gegeben ist eine Funktion f durch einen Funktionsterm, gesucht ist ein Funktionsterm für ihre Umkehrfunktion, die mit f^{-1} bezeichnet wird.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} soll das "rückgängig machen", was f tut. Damit ist

$$f^{-1}(y) \quad = \quad \text{das } x \text{ mit } f(x) = y.$$

Um also den Funktionswert $f^{-1}(y)$ für ein gegebenes y zu berechnen, muss die Gleichung

$$f(x) \quad = \quad y$$

nach x aufgelöst werden.

Beispiel 12.14 Sei

$$f(x) \quad = \quad 2x + 3.$$

Dann ist $f^{-1}(y)$ die Lösung x der Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) &= y \qquad \text{bzw.} \\ 2x + 3 &= y. \end{aligned}$$

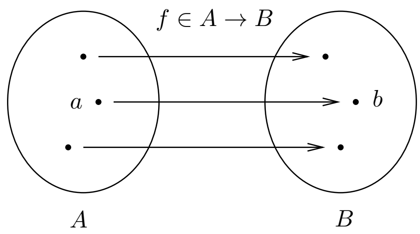
Auflösen nach x ergibt

$$x \quad = \quad \frac{y-3}{2}.$$

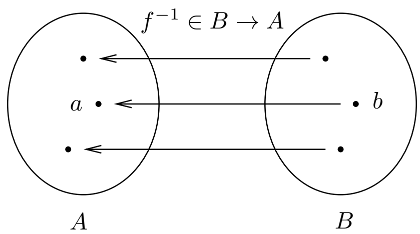
Damit ist

$$f^{-1}(y) \quad = \quad \frac{y-3}{2}.$$

Wie wir z.B. bei der arcsin Funktion gesehen haben, funktioniert dies nur, wenn die Gleichung eine eindeutige Lösung hat. Falls keine oder mehrere Lösungen existieren, hat f keine Umkehrfunktion. Am Mengendiagramm ist die Konstruktion der Umkehrfunktion einer Funktion $f \in A \to B$ sehr einfach:

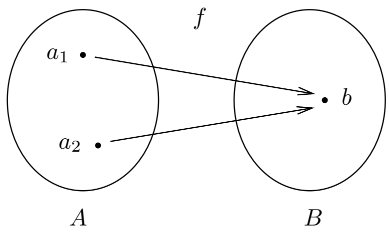


Da $f(a) = b$ genau dann wenn $f^{-1}(b) = a$, muss man in dieser Darstellung nur die Pfeile umdrehen:

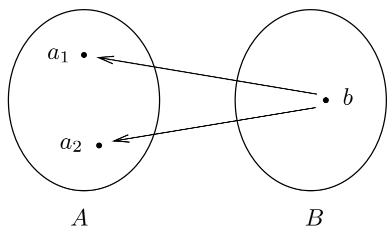


Die Frage ist allerdings, ob bei dieser Konstruktion immer eine Funktion von B nach A entsteht, d.h. ob jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ zugeordnet wird. Tatsächlich gibt es zwei Situationen, in denen dies *nicht* der Fall ist.

- Wenn f zwei unterschiedlichen $a_1, a_2 \in A$ den selben Wert $b \in B$ zuordnet, dann werden beim Umkehren der Pfeile diesem b *zwei* Werte a_1, a_2 zugewiesen. Da der Funktionswert aber immer eindeutig sein muss, ist das Ergebnis keine Funktion von B nach A.

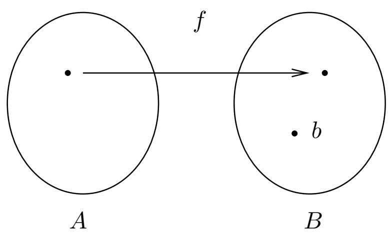


f nicht injektiv

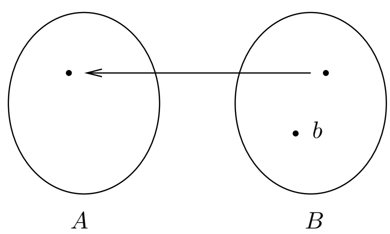


keine Funktion!

- Wenn es ein $b \in B$ gibt, so dass $f(a) \neq b$ für alle $a \in A$, dann wird beim Umkehren der Pfeile diesem b *kein* Wert zugewiesen. Da eine Funktion aber jedem Argument einen Funktionswert zuweisen muss, ist das Ergebnis keine Funktion von B nach A.



f nicht surjektiv



keine Funktion!

Die beiden Eigenschaften, die von einer Funktion verlangt werden müssen, damit sie eine Umkehrfunktion hat, heißen injektiv und surjektiv.

Definition 12.15 (injektiv, surjektiv)
Eine Funktion $f \in A \to B$ heißt injektiv, wenn

für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt
wenn $a_1 \neq a_2$
dann $f(a_1) \neq a_2)$

Eine Funktion $f \in A \to B$ heißt surjektiv, wenn

für alle $b \in B$ gilt
es existiert ein $a \in A$ so dass
$f(a) = b$.

Wenn eine Funktion injektiv und surjektiv ist, stellt das Pfeildiagramm eine 1:1 Zuordnug dar. Zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$, da es sich um eine Funktion handelt. Andererseits existiert aber auch zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$:

- Da f injektiv ist, existiert *höchstens* ein a.
- Da f surjektiv ist, existiert *mindestens* ein a.

Beim Umkehren der Pfeile ensteht somit die Umkehrfunktion. Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv. Nur bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion.

Beispiel 12.16 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = e^x$$

ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \ln(y).$$

Beispiel 12.17 Die Funktion

$$f \in [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \qquad f(x) = \sin(x)$$

ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} \in [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \qquad f^{-1}(y) = \arcsin(y).$$

Beispiel 12.18 Die Funktion

$$f \in [0, \pi] \to [-1, 1], \qquad f(x) = \cos(x)$$

ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} \in [-1, 1] \to [0, \pi], \qquad f^{-1}(y) = \arccos(y).$$

Beispiel 12.19 Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + 1.$$

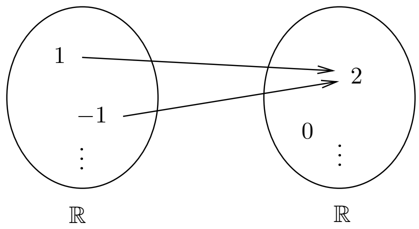
Um den Funktionswert von f^{-1} an einer Stelle y zu berechnen, muss das x bestimmt werden mit

$$x^2 + 1 = y.$$

Umformen ergibt

$$x = \pm\sqrt{y-1}.$$

Die Gleichung hat somit *keine* Lösung $x \in \mathbb{R}$ für $y < 1$ und zwei Lösungen für $y > 1$. Im ersten Fall existiert der Funktionswert $f^{-1}(y)$ nicht, im zweiten Fall ist er nicht eindeutig. Damit hat die Funktion f keine Umkehrfunktion. Tatsächlich ist f weder injektiv (da z.B. $1 \neq -1$ aber $f(1) = f(-1) = 2$) noch surjektiv (es gibt z.B. kein x mit $f(x) = 0$).



Beispiel 12.20 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

ist nicht injektiv, da z.B. $f(1) = f(-1) = 1$. Andererseits ist

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

injektiv, da es keine zwei unterschiedliche $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ gibt mit $x_1^2 = x_2^2$. Die Funktion ist aber nicht surjektiv, da es z.B. zu $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}_0^+$ gibt mit $x^2 = y$. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \qquad f(x) = x^2$$

ist injektiv und surjektiv und hat somit eine Umkehrfunktion

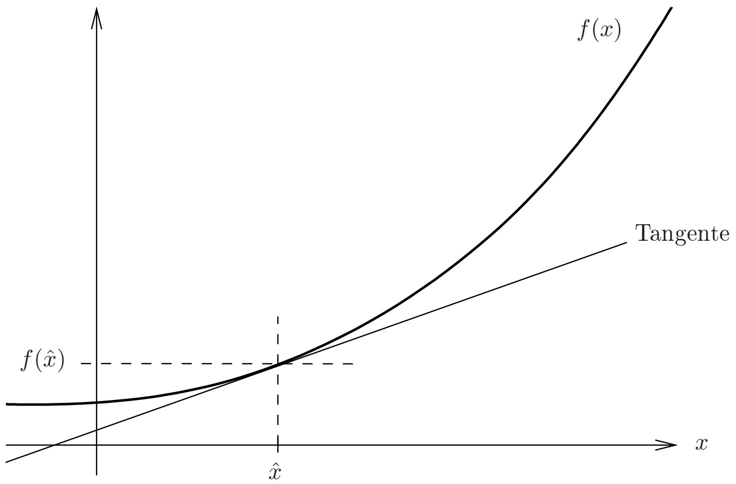
$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \qquad f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

13 Differentialrechnung

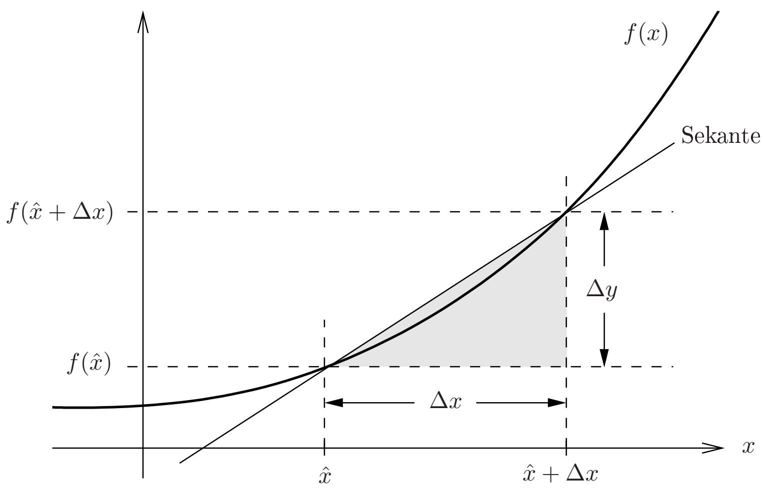
13.1 Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigung

In der Differentialrechnung beschäftigt man sich mit der Frage, wie steil eine Funktion f an einer Stelle $\hat{x}$ ist. Dieser Wert wird als Ableitung von f bei $\hat{x}$ bezeichnet, kurz $f'(\hat{x})$.

Die Frage kann man dadurch vereinfachen, dass man die Tangente an f im Punkt $\hat{x}$ anlegt. Die Steigung der Tangente ist dann gleich der Steigung von f bei $\hat{x}$ und die Steigung einer Geraden lässt sich leicht berechnen.



Problematisch ist jedoch, dass man die Tangente ja gar nicht kennt. Man kann sie jedoch durch eine Sekante approximieren. Hierzu wählt man einen weiteren Punkt $\hat{x} + \Delta x$ und legt die Gerade durch die Funktionswerte von f bei $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$. Macht man Δx nun immer kleiner, geht die Sekante in die Tangente über und folglich die Sekantensteigung in die Tangentensteigung.



Die Steigung der Sekante ist nun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}.$$

Da im Zähler und Nenner Differenzen stehen, heißt dieser Term Differenzenquotient.

Die Tangentensteigung erhält man, indem man Δx immer kleiner macht. Hierfür verwendet man das Limessymbol:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

Gemeint ist hiermit der Wert, auf den der Differenzenquotient

$$\frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

zuläuft, wenn Δx gegen Null geht. Man nennt das Ergebnis auch Grenzwert für Δx gegen Null. Da Δx im Nenner steht, kann man für Δx ja nicht einfach Null einsetzen, sondern lediglich "auf Null zulaufen".

Da für $\Delta x \to 0$ sowohl Zähler als auch Nenner des Differenzenquotienten gegen Null gehen, ist nicht klar, ob bei dieser Grenzwertkonstruktion überhaupt ein sinnvoller Wert herauskommt. Oft ist dies der Fall, aber wir werden später auch Gegenbeispiele sehen. Wenn der Grenzwert existiert, heißt f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar.

Definition 13.1 (Differenzierbarkeit)
Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $\hat{x}$ wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

existiert und endlich ist.

Die Funktion $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar wenn f differenzierbar an allen Stellen $\hat{x} \in \mathbb{D}$ ist.

Definition 13.2 (Ableitungfunktion)
Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitungsfunktion von f ist definiert durch

$$f' \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

13.2 Beispiele für Ableitungen

Beispiel 13.3 Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Für einen festen Arbeitspunkt $\hat{x}$ und $\Delta x \neq 0$ ist die Sekantensteigung von f zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ nach der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Formel

$$\begin{aligned}\frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{(\hat{x} + \Delta x)^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\hat{x}^2 + 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2\hat{x} + \Delta x.\end{aligned}$$

Der wichtige Schritt hierbei war, dass Δx gekürzt werden kann und aus dem Nenner verschwindet. Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$, mit dem die Sekantensteigung in die Tangentensteigung übergeht, ist jetzt einfach.

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2\hat{x} + \Delta x \quad = \quad 2\hat{x}.$$

Damit ist

$$f'(\hat{x}) \quad = \quad 2\hat{x}.$$

Da der Grenzwert für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ existiert, ist die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$$

Beispiel 13.4 Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Für einen festen Arbeitspunkt $\hat{x} \neq 0$ und $\Delta x \neq 0$ ist die Sekantensteigung von f zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$

$$\begin{aligned}
\frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{\hat{x}+\Delta x} - \frac{1}{\hat{x}}}{\Delta x} \\
&= \left(\frac{1}{\hat{x}+\Delta x} - \frac{1}{\hat{x}}\right) \frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{\hat{x} - (\hat{x}+\Delta x)}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{-\Delta x}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)}.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$, mit dem die Sekantensteigung in die Tangentensteigung übergeht, ist jetzt einfach. Für $\hat{x} \neq 0$ gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} = -\frac{1}{\hat{x}^2}.$$

Damit ist

$$f'(\hat{x}) = -\frac{1}{\hat{x}^2}.$$

Da der Grenzwert für alle $\hat{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, ist die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Beispiel 13.5 Sei

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Die Sekantensteigung von f zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ ist

$$\frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} - \sqrt{\hat{x}}}{\Delta x}.$$

Da man an dieser Stelle den Grenzwert $\Delta x \to 0$ noch nicht direkt berechnen kann, muss man weiter vereinfachen. Der Trick ist, den Bruch mit $\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}$ zu erweitern und die zweite Binomische Formel zu verwenden.

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} - \sqrt{\hat{x}})(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} &= \frac{(\hat{x} + \Delta x) - \hat{x}}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} \\
&= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}}.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ist jetzt einfach.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{x}}} \qquad \text{falls } \hat{x} \neq 0.$$

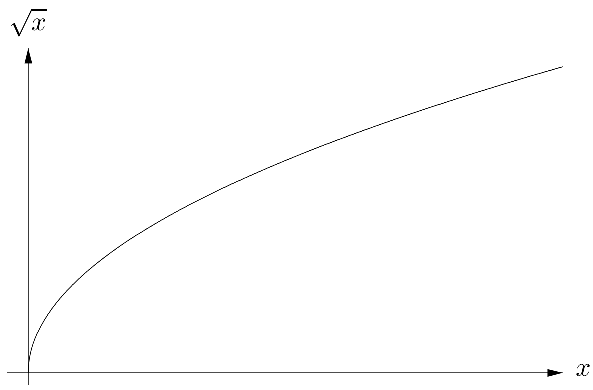
Für $\hat{x} = 0$ existiert dieser Grenzwert nicht und somit ist die o.g. Wurzelfunktion an der Stelle $\hat{x} = 0$ zwar definiert, aber dort nicht differenzierbar. Man sieht dies auch am Schaubild: Die Tangente wäre eine vertikale Gerade mit unendlicher Steigung.

Schränkt man die Funktion jedoch auf $\mathbb{R}^+$ ein, d.h.

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

erhält man eine differenzierbare Funktion mit Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$



Nach diesem Schema lassen sich weitere Ableitungsfunktionen von Standardfunktionen berechnen. Folgende Ableitungen sollten Sie aber im Kopf haben:

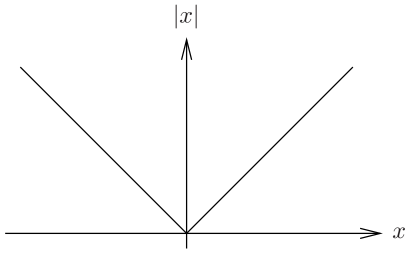
$$\begin{aligned}
&f(x) = \text{const} && f'(x) = 0 \\
&f(x) = x^a && f'(x) = ax^{a-1},\ a \in \mathbb{R} \\
&f(x) = \sin(x) && f'(x) = \cos(x) \\
&f(x) = \cos(x) && f'(x) = -\sin(x) \\
&f(x) = \tan(x) && f'(x) = 1 + \tan(x)^2 \\
&f(x) = e^x && f'(x) = e^x \\
&f(x) = \ln(x) && f'(x) = {}^1/_x.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass ${}^1/_x$ und $\sqrt{x}$ Spezialfälle von x^a sind für $a = -1$ bzw. $a = {}^1/_2$.

Beispiel 13.6 Abschließend ein Beispiel, wo der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \to 0$ nicht existiert. Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Gesucht ist die Steigung von f an der Stelle $\hat{x} = 0$.



Man sieht bereits am Schaubild, dass man bei $\hat{x} = 0$ aufgrund des Knicks keine Tangente anlegen kann. Dies bestätigt sich auch rechnerisch.

Die Sekantensteigung zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ berechnet sich für $\hat{x} = 0$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{|\hat{x} + \Delta x| - |\hat{x}|}{\Delta x} \\
&= \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} \qquad \text{da } \hat{x} = 0 \\
&= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{falls } \Delta x < 0 \end{cases} \\
&= \operatorname{sign}(\Delta x)
\end{aligned}$$

wobei $\operatorname{sign}(\Delta x)$ das Vorzeichen von Δx ist. Um zur Tangentensteigung bzw. Ableitung zu kommen, muss man den Grenzwert dieses Terms für $\Delta x \to 0$ bestimmen. Für beliebig kleine *positive* Δx erhält man 1, für beliebig kleine *negative* Δx jedoch -1. Man kann somit keinen Grenzwert festlegen und damit ist die Betragsfunktion bei $\hat{x} = 0$ nicht differenzierbar.

Für alle anderen $\hat{x} \neq 0$ ist die Funktion aber differenzierbar, d.h.

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

ist differenzierbar und hat die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \quad = \quad \operatorname{sign}(x).$$

Anschaulich gilt, dass f an einer Stelle $\hat{x}$ differenzierbar ist, wenn f dort keinen Sprung, keinen Knick, keinen Ausreißer und keine vertikale Tangente hat.

13.3 Differentialnotation

Um die Notation zu vereinfachen, führt man sog. Differentiale ein. Es handelt sich nicht um ein neues Konzept, man möchte die Sache nur etwas übersichtlicher darstellen und das Limessymbol weglassen.

Anschaulich ist mit dem Symbol dx ein "unendlich kleines" Δx gemeint. Solche unendlich kleinen Zahlen heißen Differentiale. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ lässt sich damit viel einfacher schreiben:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Da dx sowieso unendlich klein ist, braucht man keinen Grenzübergang mehr hinzuschreiben. Natürlich haben wir nicht definiert, was "unendlich klein" ist und werden dies auch nicht tun. Das Mysterium hinter Differentialen klärt sich viel einfacher:

Definition 13.7 (Differential)
Sei $t(dx)$ ein Term, in dem das Symbol dx auftritt und $t(\Delta x)$ der Term, in dem jedes Auftreten von dx in $t(dx)$ durch ein neues Symbol Δx ersetzt wurde. Dann ist

$$t(dx) \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} t(\Delta x).$$

Schreibt man also dx in einem Term, meint man den Grenzwert des Terms für $\Delta x \to 0$, wobei jedes dx durch Δx im Term ersetzt wurde.

So ist z.B.

$$x + dx \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} x + \Delta x \;=\; x.$$

Rechnen mit Differentialen führt oft zur Verwirrung. So ist z.B.

$$dx \quad = \quad 0$$

völlig korrekt, aber trotzdem darf dx im Nenner auftreten und es gilt z.B.

$$\frac{dx}{dx} \quad = \quad 1.$$

Ersetzt man dx durch Grenzwerte, wird dies klar:

$$\begin{aligned} dx \quad &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \;=\; 0. \\ \frac{dx}{dx} \quad &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} 1 \;=\; 1. \end{aligned}$$

Die Verwirrung kommt daher, dass man bei einem Bruch den Grenzübergang im Zähler und Nenner nur dann unabhängig voneinenander durchführen darf, wenn der Grenzwert des Nenners nicht Null ist.

Beispiel 13.8 Mit dieser Definition von dx kann man die Ableitung von $f(x) = x^2$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{2xdx + dx^2}{dx} \\ &= 2x + dx \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt sieht falsch aus. In der ganzen Rechnung wurde vorausgesetzt, dass $dx \neq 0$ ist, wieso kann man es dann am Ende einfach weglassen? Unter Verwendung des Limessymbols und ohne Differentiale wird dies klar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Den Term

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

nennt man Differentialquotient. Wenn dx unendlich klein ist, dann ist auch der Zähler unendlich klein und somit ebenfalls ein Differential. Man kürzt daher ab

$$df(x) = f(x+dx) - f(x).$$

Damit lässt sich die Ableitung noch kompakter schreiben.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Manchmal schreibt man auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Hierbei ist mit d/dx der Ableitungsoperator gemeint. Für die Ableitung der sin-Funktion kann man z.B. schreiben

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

13.4 Ableitungsregeln

Man kann die Ableitung einer Funktion anhand der Definition 13.2 als Grenzwert der Sekantensteigung wie in den Beispielen in Kapitel 13.2 berechnen. Da diese jedoch oft mühsam ist, gibt es Ableitungsregeln, mit denen man die Ableitung einer neuen Funktion auf die Ableitung von bereits bekannten, einfacheren Funktionen reduzieren kann.

- Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Konstanter Faktor

$$(af(x))' = af'(x)$$

- Produktregel

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Kettenregel (äußere Ableitung mal innere)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Nachfolgend werden diese Regeln anhand von Beispielen vorgestellt und bewiesen.

Theorem 13.9 (Summenregel)

$$(f(x)+g(x))' \quad = \quad f'(x)+g'(x).$$

Beispiel 13.10 Sei

$$h(x) \quad = \quad \sin(x)+x^2.$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \cos(x), & g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)+g(x) \\ h'(x) &= (f(x)+g(x))' \\ &= f'(x)+g'(x) \\ &= \cos(x)+2x. \end{aligned}$$

Man hat somit die Ableitung der schwierigen Funktion $\sin(x)+x^2$ reduziert auf die Ableitung von den einfacheren Funktionen $\sin(x)$ und x^2.

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst zwei Funktionen addiert und dann die Summe ableitet oder zuerst jeden Summand ableitet und diese dann addiert.

$$\begin{tikzcd} f(x), g(x) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\frac{d}{dx}"'] & f(x)+g(x) \arrow[d, "\frac{d}{dx}"] \\ f'(x), g'(x) \arrow[r, "+"] & (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $h(x) = f(x)+g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x+dx)-h(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)+g(x+dx) \ - \ (f(x)+g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)-f(x) \ + \ g(x+dx)-g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx)-g(x)}{dx} \\ &= f'(x)+g'(x). \ \Box \end{aligned}$$

Theorem 13.11 (Konstanter Faktor)

$$(uf(x))' = uf'(x).$$

Beispiel 13.12 Sei

$$h(x) = 3\sin(x).$$

Mit $u = 3$ und

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x)$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= uf(x) \\ h'(x) &= (uf(x))' \\ &= uf'(x) \\ &= 3\cos(x). \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $3\sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktion $\sin(x)$.

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert und dann ableitet, oder zuerst die Funktionen ableitet und dann mit der Konstanten multipliziert.

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "\times u"] \arrow[d, "\frac{d}{dx}"'] & uf(x) \arrow[d, "\frac{d}{dx}"] \\ f'(x) \arrow[r, "\times u"] & (uf(x))' = uf'(x) \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $h(x) = uf(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x+dx) - h(x)}{dx} \\ &= \frac{uf(x+dx) - uf(x)}{dx} \\ &= u\,\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= uf'(x). \ \square \end{aligned}$$

Theorem 13.13 (Produktregel)

$$(f(x)g(x))' \quad = \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beispiel 13.14 Sei

$$h(x) \quad = \quad x^2 \sin(x).$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & g(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= 2x, & g'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)g(x) \\ h'(x) &= (f(x)g(x))' \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2x\sin(x) + x^2\cos(x). \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $x^2 \sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Sei $h(x) = f(x)g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x+dx) - h(x)}{dx} \\ &= \frac{\left(\overbrace{f(x+dx)g(x+dx)}^{h(x+dx)} - \overbrace{f(x)g(x)}^{h(x)}\right)}{dx}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle hilft ein Trick weiter. Man subtrahiert den Term

$$f(x)g(x+dx)$$

und addiert ihn gleich wieder, was in Summe ja Null ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)g(x+dx) \overbrace{- f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx)}^{=0} - f(x)g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx)}{dx} + \frac{f(x)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} \\ &= g(x+dx)\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + f(x)\frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \quad = \quad g(x)$$

und somit

$$g(x + dx) \quad = \quad g(x). \ \square$$

Im Spezialfall wenn $g(x) = u$ eine konstante Funktion ist und daher $g'(x) = 0$, gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= uf'(x). \end{aligned}$$

Die Regel vom konstanten Faktor ergibt sich somit als Spezialfall der Produktregel.

Theorem 13.15 (Kettenregel)

$$\big(f(g(x))\big)' \quad = \quad f'(g(x))\, g'(x).$$

Beispiel 13.16 Sei

$$h(x) \quad = \quad \sin(x^2).$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \cos(x), & g'(x) &= 2x \\ f'(g(x)) &= \cos(x^2) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ h'(x) &= \big(f(g(x))\big)' \\ &= f'(g(x))g'(x) \\ &= \cos(x^2)\, 2x. \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $\sin(x^2)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Sei $h(x) = f(g(x))$. Zunächst betrachtet man nur einen festen Wert $\hat{x}$. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{g} &= g(\hat{x}) \\ dg &= g(\hat{x} + dx) - g(\hat{x}) \end{aligned}$$

gilt

$$g(\hat{x} + dx) \quad = \quad g(\hat{x}) + dg \;=\; \hat{g} + dg$$

$$\begin{aligned} h'(\hat{x}) &= \frac{h(\hat{x} + dx) - h(\hat{x})}{dx} \\ &= \frac{f(g(\hat{x} + dx)) - f(g(\hat{x}))}{dx} \\ &= \frac{f(\hat{g} + dg) - f(\hat{g})}{dx} \\ &= \frac{f(\hat{g} + dg) - f(\hat{g})}{dg} \; \frac{dg}{dx} \\ &= f'(\hat{g}) \; \frac{g(\hat{x} + dx) - g(\hat{x})}{dx} \\ &= f'(g(\hat{x}))\, g'(\hat{x}). \end{aligned}$$

Da diese Überlegung für jedes beliebige $\hat{x}$ gilt, kann man $\hat{x}$ durch x ersetzen und erhält

$$h'(x) \quad = \quad f'(g(x))\, g'(x). \ \square$$

Wenn man so will, kann man die Funktionen $g(x)$ und $f(g(x))$ als Variablen f und g betrachten, deren Wert von x abhängt. Ändert man x um dx, dann ändert sich g um

$$dg \quad = \quad g'(x)dx$$

und f um

$$df \quad = \quad f'(g(x))dg.$$

Die Kettenregel kann man dann sehr kompakt schreiben als

$$\frac{df}{dx} \quad = \quad \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx}.$$

In dieser Form ist die Kettenregel offensichtlich, da lediglich dg gekürzt wird.

Beispiel 13.17 Unter Verwendung der Kettenregel kann man herleiten, dass $\ln'(x) = {}^1\!/\!_x$ ist. Da die ln-Funktion Umkehrfunktion der e-Funktion ist, gilt

$$e^{\ln(x)} \quad = \quad x.$$

Leitet man beide Seiten ab, erhält man mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} \ln'(x) &= 1 \\ x \ln'(x) &= 1 \\ \ln'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Allgemein kann man auf diese Weise die Ableitung von Umkehrfunktionen berechnen.

Beispiel 13.18 Gesucht ist die Ableitung von a^x für beliebiges $a > 0$. Da die Ableitung der e-Funktion bekannt ist, formt man unter Anwendung der Rechengesetze des Logarithmus wie folgt um:

$$a^x \quad = \quad e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}.$$

Dies lässt sich leicht mit der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} \left(e^{x\ln(a)}\right)' &= e^{x\ln(a)} \ln(a) \\ &= e^{\ln(a^x)} \ln(a) \\ &= a^x \ln(a). \end{aligned}$$

Theorem 13.19 (Quotientenregel)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Beispiel 13.20 Sei

$$h(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}.$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & g(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= 2x, & g'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ h'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin(x)^2}. \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $x^2/\sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Die Quotientenregel kann man einfach unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel beweisen, indem man die Division durch $g(x)$ als Multiplikation mit $g(x)^{-1}$ darstellt.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)g(x)^{-1}\right)' \\ &= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\left(g(x)^{-1}\right)' \\ &= f'(x)g(x)^{-1} - f(x)g(x)^{-2}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \ \square \end{aligned}$$

14 Integralrechnung

14.1 Stammfunktion als Umkehrung der Ableitung

Bei der Berechnung einer Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ sucht man nach einer Funktion $F(x)$ deren Ableitung $f(x)$ ergibt.

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, bend left, "\text{Stammfunktion}"] & F(x) \arrow[l, bend left, "\text{Ableitung}"] \end{tikzcd}$$

Definition 14.1 (Stammfunktion)
Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn

$$F' = f.$$

Beispiel 14.2 Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

da

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x).$$

Eine andere Stammfunktion ist z.B.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5.$$

Da der konstante Summand 5 beim Ableiten wegfällt, gilt auch hier

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = x^2 = f(x).$$

Da es zu einer Funktion $f(x)$ i.a. viele Stammfunktionen $F(x)$ gibt, sollte man nicht von *der* Stammfunktion sprechen sondern von *einer* Stammfunktion. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann auch $F(x)+C$ für jede Konstante C. Es stellt sich die Frage, ob man auf diese Weise *alle* Stammfunktionen von $f(x)$ bekommt, oder ob es noch weitere gibt.

Theorem 14.3
Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}$ ein Intervall. Sei $F \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist die Menge aller Stammfunktionen

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Sofern f auf einem Intervall definiert ist, unterscheiden sich die Stammfunktionen von f nur um eine Konstante C. Ist $\mathbb{D}$ kein zusammenhängendes Intervall, kann man in jedem Teilintervall eine andere Konstante wählen, d.h. man hat noch weitere Stammfunktionen.

Beispiel 14.4 Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Dann ist z.B. auch die Funktion

$$F \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} x^3/3 + 4 & \text{für } x > 0 \\ x^3/3 + 7 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f, da F auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und dort gilt $F'(x) = f(x)$.

14.2 Stammfunktionen elementarer Funktionen

Die folgende Liste von Stammfunktionen von Standardfunktionen sollte man im Kopf haben:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = k & F(x) = kx \\
f(x) = x^n & F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1 \\
f(x) = \frac{1}{x} & F(x) = \ln(|x|) \\
f(x) = \sin(x) & F(x) = -\cos(x) \\
f(x) = \cos(x) & F(x) = \sin(x) \\
f(x) = e^x & F(x) = e^x
\end{array}$$

Da $f(x) = {}^1\!/\!{}_x$ auch für negative x definiert ist, die ln-Funktion jedoch nur für positive, sind die Betragsstriche bei der Stammfunktion erforderlich, d.h. $F(x) = \ln(|x|)$. Durch Fallunterscheidung verifiziert man, dass dann $F'(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

- Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und damit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln(|x|)' \\ &= \ln(x) \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

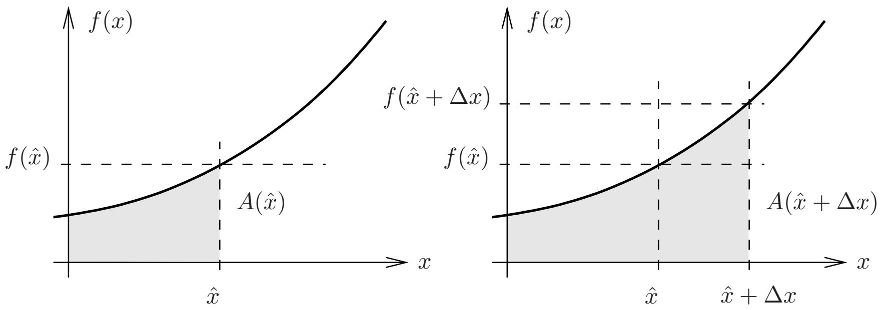
- Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und damit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln(|x|)' \\ &= \ln(-x)' \\ &= -\frac{1}{-x} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

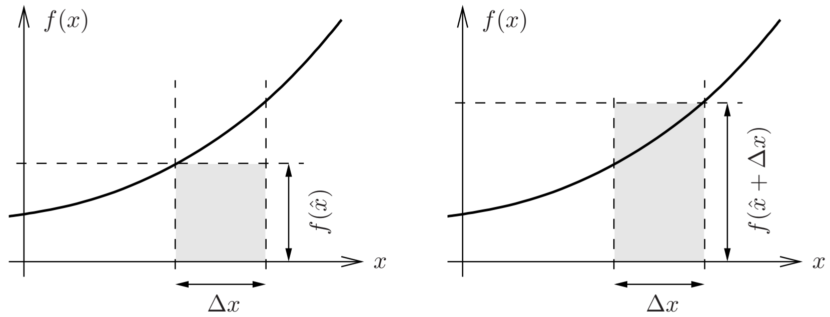
14.3 Flächenberechnung

In diesem Kapitel soll die Fläche unter einer Funktion $f(x)$ berechnet werden. Für ein festes $\hat{x}$ sei

$$\begin{aligned} A(\hat{x}) &= \text{Fläche unter } f(x) \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = \hat{x} \\ A(\hat{x} + \Delta x) &= \text{Fläche unter } f(x) \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = \hat{x} + \Delta x. \end{aligned}$$



Die Differenz dieser beiden Flächen lässt sich durch zwei Rechtecke abschätzen.



Damit gilt

$$\begin{aligned} A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x}) &\geq f(\hat{x})\Delta x \\ A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x}) &\leq f(\hat{x} + \Delta x)\Delta x. \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten durch Δx erhält man

$$\begin{aligned} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\geq f(\hat{x}) \\ \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\leq f(\hat{x} + \Delta x). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchgeführt.

Der Grenzwert auf der linken Seite ist nichts anderes als die Ableitung der Funktion $A(x)$ an der Stelle $\hat{x}$, d.h.

$$\frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} = A'(\hat{x}).$$

Falls f stetig an der Stelle $\hat{x}$ ist, d.h. keinen Sprung und keinen Ausreißer hat, gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\hat{x} + \Delta x) \quad = \quad f(\hat{x}).$$

Damit erhält man nach dem Grenzübergang

$$\begin{aligned} A'(\hat{x}) &\geq f(\hat{x}) \\ A'(\hat{x}) &\leq f(\hat{x}) \end{aligned}$$

und damit

$$A'(\hat{x}) \quad = \quad f(\hat{x}).$$

Da diese Überlegung für beliebige Werte von $\hat{x}$ gilt, kann man die Konstante $\hat{x}$ durch eine Variable x ersetzen und erhält

$$A'(x) \quad = \quad f(x).$$

Die Funktion A ist somit eine Stammfunktion von f. Hat man also eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ berechnet, gilt

$$A(x) \quad = \quad F(x) + C$$

für eine Konstante C. Die Berechnung von C folgt aus der Zusatzbedingung $A(0) = 0$. Für $x = 0$ gilt damit

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) + C \\ C &= -F(0). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$A(x) \quad = \quad F(x) - F(0).$$

Diese Formel zeigt, wie man die Fläche A unter einer Funktion f berechnen kann unter Verwendung einer Stammfunktion F von f. Da in der Herleitung keine Annahme über die gewählte Stammfunktion gemacht wurde, ist das Ergebnis unabhängig davon, welche Stammfunktion F von f man nimmt.

Die o.g. Überlegungen hätte man statt mit $x = 0$ auch mit einem beliebigen $x = a$ durchführen können. Damit hat man Folgendes gezeigt:

Theorem 14.5
Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ gleich

$$F(b) - F(a).$$

Beispiel 14.6 Sei $f(x) = \sin(x)$. Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist $F(x) = -\cos(x)$. Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ ist somit

$$\begin{aligned} F(\pi) - F(0) &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = \pi$ und $x = 2\pi$ ist

$$\begin{aligned} F(2\pi) - F(\pi) &= -\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) \\ &= -\cos(2\pi) + \cos(\pi) \\ &= -1 + (-1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion zwischen π und 2π negativ ist, sind auch die Flächenbeiträge $f(\hat{x})\Delta x$ negativ. Flächen unter der x-Achse zählen somit negativ.

Beispiel 14.7 Eine andere Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist $F(x) = -\cos(x) + 5$. Man erhält damit die gleiche Fläche zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ wie im vorigen Beispiel.

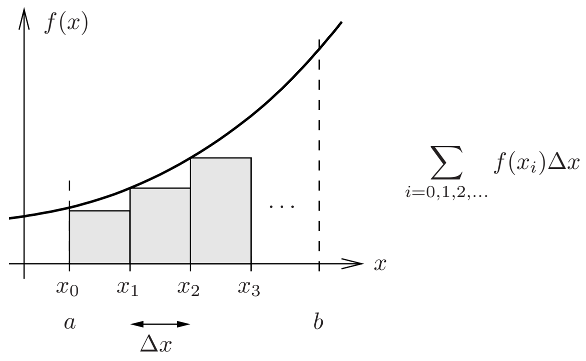
$$\begin{aligned} F(\pi) - F(0) &= -\cos(\pi) + 5 - (-\cos(0) + 5) \\ &= -\cos(\pi) + 5 + \cos(0) - 5 \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante subtrahiert sich somit weg und es spielt daher keine Rolle, welche Stammfunktion man wählt.

14.4 Bestimmtes Integral

Man hätte die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ auch näherungsweise berechnen können, indem man das Intervall $[a, b]$ in kurze Teilintervalle der Länge Δx diskretisiert:

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$



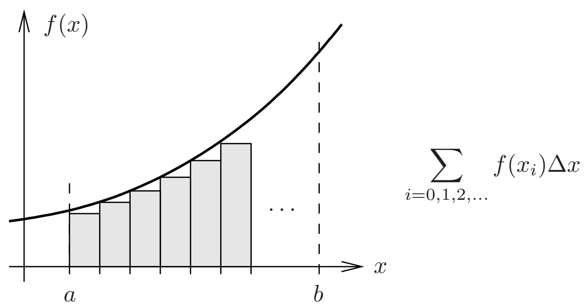
Die Fläche im i-ten Teilintervall ist dann näherungsweise

$$f(x_i)\Delta x$$

und die Gesamtfläche

$$\sum_{i=0,1,2,\ldots} f(x_i)\Delta x.$$

Führt man nun den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durch, werden die Fehler immer kleiner und man erhält die exakte Fläche.



Man verwendet hierbei wieder die Differentialnotation dx statt Δx. Um deutlich zu machen, dass es sich nun um eine Summe von Differentialen handelt, ersetzt man das Summenzeichen durch das Integralzeichen, das ja auch nichts anderes als ein "S" ist und für "Summe" steht. Auf diese Weise kommt man zu der Integralnotation

$$\int_a^b f(x)dx$$

für die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$. Dieser Term heißt *bestimmtes* Integral von f zwischen a und b.

Damit lässt sich Theorem 14.5 wie folgt umformulieren.

Theorem 14.8

Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{D}$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Man kann die Fläche unter $f(x)$ zwischen a und b zerlegen in die Summe der Fläche zwischen a und c und der Fläche zwischen c und b für beliebiges c.

Theorem 14.9

Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b, c \in \mathbb{D}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= F(a) - F(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Integrationsgrenzen, negiert sich das Integral.

Theorem 14.10

Sei $f \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{D}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= -\int_b^a f(x)dx.\end{aligned}$$

14.5 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird unter Verwendung des Integralzeichens mit

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet und heißt *unbestimmtes* Integral. Ist F eine Stammfunktion von f und ist f auf einem zusammenhängenden Intervall definiert, gilt

$$\int f(x)dx \quad = \quad \{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}.$$

Bei unbestimmten Integralen sollte man sich darüber klar sein, dass man immer mit Mengen von Funktionen rechnet. Die Rechenoperationen sind dabei elementweise definiert.

Beispiel 14.11 In dem Term

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

bedeutet $+$ die Addition von Mengen von Funktionen. Diese ist definiert durch

$$\begin{aligned} \int f(x)dx + \int g(x)dx &= \{F(x) + C_1 \,|\, C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G(x) + C_2 \,|\, C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \,|\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + G(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Beispiel 14.12 In dem Term

$$u \int f(x)dx$$

wird eine Konstante u und die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ multipliziert. Dies ist definiert durch

$$\begin{aligned} u \int f(x)dx &= u\{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(F(x) + C) \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{uF(x) + uC \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{uF(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \qquad \text{falls } u \neq 0 \;. \end{aligned}$$

Beispiel 14.13 In dem Term

$$g(x) + \int f(x)dx$$

wird eine Funktion $g(x)$ und die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ addiert. Dies ist definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) + \int f(x)dx &= g(x) + \{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{g(x) + F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Um dies etwas übersichtlicher zu schreiben, verwendet man für das unbestimmte Integral die Notation

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Man drückt damit aus, dass die Stammfunktion von $f(x)$ nur bis auf eine additive Konstante C eindeutig ist, meint damit aber genau genommen die Menge *aller* Stammfunktionen von $f(x)$.

In den obigen Beispielen kann man damit kurz schreiben:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx + \int g(x)dx &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \\
&= F(x) + G(x) + C \\
u \int f(x)dx &= u(F(x) + C) \\
&= uF(x) + uC \\
&= uF(x) + C \qquad \text{falls } u \neq 0 \\
g(x) + \int f(x)dx &= g(x) + F(x) + C.
\end{aligned}$$

14.6 Beispiele für bestimmte Integrale

Beispiel 14.14 Gesucht ist die Fläche unter $f(x) = x^2$ zwischen $x = -1$ und $x = 4$. Zuerst wird eine Stammfunktion berechnet, anschließend werden die Integrationsgrenzen eingesetzt. Man drückt dies in einem Zwischenschritt dadurch aus, dass man die Stammfunktion in eckige Klammern setzt und die Integrationsgrenzen an die rechte Klammer schreibt:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} x^2 dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{4} \\
&= \frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 \\
&= \frac{1}{3}(4^3 - (-1)^3) \\
&= \frac{1}{3}(64 + 1) \\
&= \frac{65}{3}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich kann man einen konstanten Faktor aus den eckigen Klammern herausziehen, was es manchmal übersichtlicher macht. Im Beispiel ist

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{4}.$$

Beispiel 14.15 Sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = -1$ und $x = 1$ ist somit

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) \\
&= -(1+1) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Das kann aber nicht sein, da $f(x)$ immer positiv ist!

Der Grund ist, dass $f(x)$ bei $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle hat und in der Herleitung der Formel zur Flächenberechnung auf Seite 99 vorausgesetzt wurde, dass f stetig ist. Da dieser Fehler schnell passiert und zu völlig falschen Ergebnissen führt, sollte man sich gut einprägen, dass f im Integrationsbereich, stetig sein muss. Die Regel in Kurzform lautet

"nie über Unstetigkeitsstellen wegintegrieren".

Man berechnet daher zunächst die Fläche zwischen ε und 1 für ein $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} \\
&= -\left[\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} - 1.
\end{aligned}$$

Um nun die Fläche zwischen 0 und 1 zu erhalten, führt man den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ von rechts durch.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \infty.$$

Da f eine gerade Funktion ist, ist die Fläche zwischen -1 und 0 ebenfalls ∞ und die korrekte Gesamtfläche zwischen -1 und 1 somit unendlich.

Beispiel 14.16 Sei wieder $f(x) = {}^1\!/_{x^2}$. Diesmal möchte man die Fläche unter $f(x)$ ab $x = 1$ bis unendlich berechnen, d.h.

$$\int_1^\infty f(x)dx.$$

Integrale, bei denen eine Grenze im Unendlichen liegt, nennt man *uneigentliche* Integrale. Der Trick ist, dass man zuerst bis zu einer Grenze b integriert und anschließend den Grenzübergang $b \to \infty$ durchführt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right) \\ &= \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Obwohl die Fläche “unendlich breit” ist, ist sie trotzdem endlich, da die Funktion $f(x)$ schnell gegen Null geht für $x \to \infty$.

14.7 Integrationsregeln

Zu jeder der in Kapitel 13.4 vorgestellten Ableitungsregeln gibt es eine entsprechende Integrationsregel. Zweck dieser Regeln ist, die Berechnung einer "schwierigen" Stammfunktion auf die Berechnung von einfacheren, bzw. bekannten Stammfunktionen zu reduzieren. Die Regeln gelten gleichermaßen für bestimmte und unbestimmte Integrale.

Die schlechte Nachricht ist, dass im Gegensatz zur Ableitung bei der Integration nicht immer sofort klar ist, welche Regel angewandt werden muss. Daher ist Integrieren viel schwieriger als Ableiten.

Es ist sogar so, dass viele Funktionen Stammfunktionen haben, die man gar nicht durch elementare Terme (d.h. Terme mit den handelsüblichen Funktionssymbolen) beschreiben kann. Ein Beispiel ist

$$f(x) \quad = \quad e^{\left(x^2\right)}.$$

Diese Funktion ist stetig und hat daher Stammfunktionen. Es gibt für diese jedoch keine elementaren Terme und keine der nachfolgend vorgestellten Integrationsregeln ist anwendbar.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass $f, g \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind und $\mathbb{D}$ ein zusammenhängendes Intervall.

Summenregel

Theorem 14.17 (Summenregel für unbestimmte Integrale)

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst zwei Funktionen addiert und davon die Stammfunktionen berechnet oder zuerst von jedem Summand die Stammfunktionen berechnet und diese dann addiert.

$$\begin{tikzcd}
f(x), g(x) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\int \ldots dx"'] & f(x)+g(x) \arrow[d, "\int \ldots dx"] \\
\int f(x)dx,\ \int g(x)dx \arrow[r, "+"] & \int (f(x)+g(x))dx = \\
& \int f(x)dx + \int g(x)dx
\end{tikzcd}$$

Beispiel 14.18 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von $\sin(x) + x^2$.

$$\begin{aligned}
\int (\sin(x)+x^2)dx &= \int \sin(x)dx + \int x^2 dx \\
&= -\cos(x) + C_1 + {}^{x^3}\!/_3 + C_2 \\
&= -\cos(x) + {}^{x^3}\!/_3 + C.
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$. Dann ist $F(x)+G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)+g(x)$ da aufgrund der Summenregel der Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
(F(x)+G(x))' &= F'(x) + G'(x) \\
&= f(x) + g(x).
\end{aligned}$$

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)+g(x)$ ist somit

$$\begin{aligned}
\int (f(x)+g(x))dx &= \{F(x)+G(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\} \\
&= \{F(x)+C_1+G(x)+C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{F(x)+C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G(x)+C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \int f(x)dx + \int g(x)dx.
\end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale gilt die Summenregel analog.

Theorem 14.19 (Summenregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wie oben gezeigt, ist $F(x)+G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)+g(x)$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\
&= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\
&= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\
&= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

Konstante Faktor Regel

Theorem 14.20 (Konst. Faktor Regel für unbestimmte Integrale)
Für $u \neq 0$ gilt

$$\int uf(x)dx \quad = \quad u\int f(x)dx.$$

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert und davon die Stammfunktionen berechnet oder zuerst die Stammfunktionen berechnet und diese dann mit der Konstanten multipliziert.

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, "\times u"] \arrow[d, "\int \dots dx"'] & uf(x) \arrow[d, "\int \dots dx"] \\
\int f(x)dx \arrow[r, "\times u"] & \int uf(x)dx = u\int f(x)dx
\end{tikzcd}$$

Beispiel 14.21 Gesucht ist die Menge aller Stammfunktionen von $3\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\int 3\cos(x)dx &= 3\int \cos(x)dx \\
&= 3\sin(x) + C.
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann ist $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$, da aufgrund der konstanten Faktor Regel der Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
(uF(x))' &= uF'(x) \\
&= af(x).
\end{aligned}$$

Für $u \neq 0$ gilt damit

$$\begin{aligned}
\int uf(x)dx &= \{uF(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= \{u(F(x) + {}^{C}/_{u}) \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= u\{F(x) + {}^{C}/_{u} \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= u\{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= u\int f(x)dx.
\end{aligned}$$

Sie fragen sich vermutlich, ob die Bedingung $u \neq 0$ wirklich nötig ist. Es ist zwar richtig, dass $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$ ist für jedes $u \in \mathbb{R}$. Für $u = 0$ ist jedoch

$$\int 0f(x)dx = \int 0dx$$

die Menge aller Stammfunktionen der konstanten Nullfunktion und dies sind alle konstanten Funktionen, während

$$0 \int f(x)dx = 0$$

lediglich die konstante Nullfunktion ist.

Für bestimmte Integrale gilt die konstante Faktor Regel analog.

Theorem 14.22 (Konstante Faktor Regel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b uf(x)dx = u \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Wie oben gezeigt, ist $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b uf(x)dx &= [uF(x)]_a^b \\
&= uF(b) - uF(a) \\
&= u(F(b) - F(a)) \\
&= u\,[F(x)]_a^b \\
&= u \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Produktregel bzw. Partielle Integration

Theorem 14.23 (Produktregel für unbestimmte Integrale)

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Zunächst ist gar nicht klar, was diese Regel bringen soll, da das Integral auf der rechten Seite nicht einfacher aussieht als das auf der linken. Wenn man aber die Faktoren f, g' so wählt, dass f' "einfacher" ist als f und g möglichst nicht schwieriger als g', kann die Regel durchaus gewinnbringend sein.

Beispiel 14.24 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von

$$x\cos(x).$$

Man hat nun die Wahl, welchen der beiden Faktoren x und $\cos(x)$ man mit $f(x)$ bzw. $g'(x)$ bezeichnen möchte. Da der Faktor x beim Ableiten einfacher wird und der Faktor $\cos(x)$ beim Integrieren nicht schwieriger, wählt man

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x).$$

Damit ist

$$f'(x) = 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sin(x).$$

Mit der o.g. Regel gilt

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)dx &= x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Durch Ableiten kann man das Ergebnis verifizieren. Mit der Produkt- und Summenregel der Ableitung gilt

$$\begin{aligned} (x\sin(x) + \cos(x))' &= \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) \\ &= x\cos(x). \end{aligned}$$

Beweis. Ausgehend von der Produktregel der Ableitung

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

erhält man

$$f'(x)g(x) = (f(x)(g(x))' - f(x)g'(x).$$

Eine Stammfunktion von $(f(x)(g(x))'$ ist $f(x)g(x)$. Sei $H(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)g'(x)$. Nimmt man auf beiden Seiten das unbestimmte Integral, erhält man mit der Summenregel

$$\begin{aligned}
\int f'(x)g(x)dx &= \int \big((f(x)(g(x))' - f(x)g'(x)\big)dx \\
&= \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx \\
&= \{f(x)g(x) + C_1 \,|\, C_1 \in \mathbb{R}\} - \{H(x) + C_2 \,|\, C_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f(x)g(x) + C_1 - H(x) + C_2 \,|\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f(x)g(x) - H(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= f(x)g(x) - \{H(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.
\end{aligned}$$

Beispiel 14.25 Mit der Produktregel lässt sich auch

$$\int \ln(x)dx$$

berechnen. Mit

$$f(x) = \ln(x), \quad g'(x) = 1$$

ist

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)dx &= \int \ln(x) \cdot 1dx \\
&= x\ln(x) - \int \frac{1}{x}xdx \\
&= x\ln(x) - \int 1dx \\
&= x\ln(x) - x + C.
\end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale gilt die Produktregel analog.

Theorem 14.26 (Produktregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Man beginnt wieder mit der Produktregel der Ableitung und bringt den Summand $f'(x)g(x)$ auf eine Seite.

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ f'(x)g(x) &= (f(x)(g(x))' - f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Integriert man beide Seiten von a bis b, erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx &= \int_a^b \big((f(x)(g(x))' - f(x)g'(x)\big)dx \\ &= \int_a^b (f(x)(g(x))'dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Substitutionsregel

Theorem 14.27 (Substitutionsregel für unbestimmte Integrale)

$$\int f(g(x))g'(x)dx \quad = \quad F(g(x)) + C.$$

Beweis. Mit der Kettenregel der Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \big(F(g(x)) + C\big)' &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

Beispiel 14.28 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von

$$\cos(x^2)\,2x.$$

Mit

$$f(x) = \cos(x), \qquad g(x) = x^2$$

und

$$F(x) = \sin(x), \qquad g'(x) = 2x$$

gilt

$$\cos(x^2)\,2x \quad = \quad f(g(x))g'(x)$$

und damit

$$\int \cos(x^2)\,2xdx \quad = \quad \sin(x^2) + C.$$

Besteht also der Integrand aus einer Komposition $f(g(x))$ mal der Ableitung der innerne Funktion $g'(x)$, dann genügt es, eine Stammfunktion der äußeren Funktion zu finden und diese auf die innere anzuwenden.

Manchmal muss man das Integral etwas umformen, bevor man die Substitutionsregel anwenden kann. Hierzu ein paar Beispiele.

Beispiel 14.29 Die Funktion $x\cos(x^2)$ hat nicht die Form $f(g(x))g'(x)$, man kann die Substitutionsregel aber trotzdem anwenden, wenn man den fehlenden Faktor 2 durch einen Faktor $1/2$ vor dem Integral ausgleicht:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int \cos(x^2)2xdx \\ &= \frac{1}{2}\sin(x^2)+C.\end{aligned}$$

Beispiel 14.30 Bei der Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ erkennt man zunächst gar nicht, wo eine verkettete Funktion sein soll. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \cos(x)^{-1}\sin(x).\end{aligned}$$

Mit

$$f(x) = x^{-1}, \qquad g(x) = \cos(x)$$

und

$$F(x) = \ln|x|, \qquad g'(x) = -\sin(x)$$

gilt

$$f(g(x))g'(x) = -\tan(x)$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \tan(x)dx &= -\int \cos(x)^{-1}(-\sin(x))dx \\ &= -\ln|\cos(x)|+C.\end{aligned}$$

Rezept. Da es manchmal nicht ganz einfach ist, zu erkennen, ob und wie man den Integrand auf die Form $f(g(x))g'(x)$ bringen kann, gibt es für die Anwendung der Substitutionsregel ein Rezept, an dem man sich festhalten kann. Berechnet werden soll

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

- Wähle einen Teilterm $g(x)$ des Integranden und substituiere diesen durch eine neue Variable u.
- Berechne $g'(x)$ unter Verwendung der Differentialnotation.

$$\frac{du}{dx} = g'(x).$$

- Löse nach dx auf.

$$dx = \frac{1}{g'(x)}du.$$

- Ersetze jedes Auftreten von x im Integraden durch u und dx durch du. Falls dies nicht möglich ist, ist die Substitutionsregel entweder nicht anwendbar oder man muss eine andere Substitution wählen. Wichtig ist, dass danach *kein* x im Integrand auftritt. Das Integral ist dann

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)g'(x)\underbrace{\frac{1}{g'(x)}du}_{dx} = f(u)du$$

- Integriere nach u. Man erhält dann $F(u) + C$.
- Ersetze u wieder durch $g(x)$. Man erhält dann $F(g(x)) + C$.

Beispiel 14.31 Mit diesem Rezept wird nun nochmal eine Stammfunktion von

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

berechnet. Im Gegensatz zum vorigen Beispiel muss man nun gar nicht erkennen, wie man den Term auf die Form $f(g(x))g'(x)$ bringen kann, sondern lediglich mit etwas Glück den richtigen Teilterm zum Substituieren wählen.

- Substitution

$$u = \cos(x).$$

- Ableiten.

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x).$$

- Nach dx auflösen.

$$dx = -\frac{1}{\sin(x)}du.$$

- Im Integrand alle x durch u und dx durch du ersetzen.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx &= \int \frac{\sin(x)}{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{\sin(x)}du\right)}_{dx} \\ &= -\int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln|u| + C. \end{aligned}$$

- Rücksubstitution

$$-\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C.$$

Beispiel 14.32 Angenommen man würde bei der Berechnung einer Stammfunktion von

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

"falsch" substituieren, d.h.

$$u = \sin(x).$$

Der weitere Rechenweg wäre dann

$$\frac{du}{dx} = \cos(x), \qquad dx = \frac{1}{\cos(x)} du.$$

Damit ist

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{u}{\cos(x)} \frac{1}{\cos(x)} du = \int \frac{u}{\cos^2(x)} du.$$

Hier ist das Problem, dass nicht alle x im Integrand direkt durch u ersetzt werden können.

Man kann jedoch auch hier zum Ziel kommen, indem man

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

ausnutzt. Damit ist

$$\int \frac{u}{\cos^2(x)} du = \int \frac{u}{1-\sin^2(x)} du = \int \frac{u}{1-u^2} du.$$

Jetzt sind wie erforderlich alle x im Integrand durch u ersetzt. Um dieses Integral zu lösen, muss man aber nochmal substituieren.

$$w = 1 - u^2, \qquad \frac{dw}{du} = -2u, \qquad du = -\frac{1}{2u} dw.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{u}{1-u^2} du &= \int \frac{u}{w} \left(-\frac{1}{2u} dw \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw \\
&= -\frac{1}{2} \ln |w| + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln |1 - u^2| + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2(x)| + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln |\cos^2(x)| + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left(|\cos(x)|^2 \right) + C \\
&= -\ln |\cos(x)| + C.
\end{aligned}$$

Der Rechenweg war hier deutlich länger. Die "beste" Substitution zu finden, erfordert also etwas Übung. Wenn man erkennt, was die innere Funktion $g(x)$ sein könnte, ist $u = g(x)$ die richtige Wahl.

Theorem 14.33 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx \quad = \quad F(g(b)) - F(g(a)).$$

Beweis. Da $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$ ist, muss man nur noch die Grenzen a und b einsetzen.

Das eigentlich interessante an der Substitution bei bestimmten Integralen ist, dass man sich die Rücksubstitution sparen kann wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= [F(g(x))]_a^b \\
&= F(g(b)) - F(g(a)) \\
&= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.
\end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man ein Integral in ein anderes umformen ohne es wirklich zu lösen. Solche Umformungen sind u.a. wichtig für Integraltransformationen wie Fourier- und Laplace Transformation.

Beispiel 14.34 Für jede Funktion f gilt

$$\int_a^b f(x-1)dx \quad = \quad \int_{a-1}^{b-1} f(u)du.$$

Erforderlich ist hierzu lediglich die Substitution $u = x - 1$. Da man bei bestimmten Integralen die Integrationsvariable beliebig umbenennen darf, gilt

$$\int_a^b f(x-1)dx \quad = \quad \int_{a-1}^{b-1} f(x)dx.$$

In gleicher Weise erhält man mit der Substitution $u = 2x$

$$\int_a^b f(2x)dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x)dx.$$

Beispiel 14.35 Gesucht ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) e^{\sin(x)} dx$$

Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} du.$$

Beim konventionellen Rechenweg muss man zuerst eine Stammfunktion berechnen.

$$\begin{aligned}
\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx &= \int \cos(x) e^u \frac{1}{\cos(x)} du \\
&= \int e^u du \\
&= e^u + C \\
&= e^{\sin(x)} + C.
\end{aligned}$$

Danach werden die Integrationsgrenzen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) e^{\sin(x)} dx &= \left[e^{\sin(x)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= e^{\sin(\pi/2)} - e^{\sin(-\pi/2)} \\
&= e^1 - e^{-1} \\
&= e - 1/e.
\end{aligned}$$

Schneller und in einem Stück wäre es gegangen, wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) e^{\sin(x)} dx &= \int_{\sin(-\pi/2)}^{\sin(\pi/2)} \cos(x) e^u \frac{1}{\cos(x)} du \\
&= \int_{-1}^{1} e^u du \\
&= [e^u]_{-1}^{1} \\
&= e - 1/e.
\end{aligned}$$

Man kann sich das so merken: Wenn x von a bis b läuft und $u = \sin(x)$ ist, dann läuft u von $\sin(a)$ bis $\sin(b)$.

Index