Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 1

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{x}{x+1} + x = 0.$$

Lösung von Aufgabe 1. Multiplikation mit $x + 1$ ergibt

$$\begin{aligned} x + x(x+1) &= 0 \\ x^2 + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung ist somit $x = 0$. Division durch x ergibt

$$x + 2 = 0.$$

Die zweite Lösung ist damit $x = -2$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x^2 + 1) = 1.$$

Lösung von Aufgabe 2. Substitution

$$u = x^2 + 1$$

liefert die Gleichung

$$\sin(u) = 1$$

mit den Lösungen

$$u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x^2 &= \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \\ x &= \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$ gilt

$$a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $e^{\ln(x)} = x$ und verwenden Sie die Rechengesetze der ln-Funktion.

Lösung von Aufgabe 3.

$$
\begin{aligned}
a^{\ln(b)} &= e^{\ln\left(a^{\ln(b)}\right)} \\
&= e^{\ln(b)\ln(a)} \\
&= \left(e^{\ln(b)}\right)^{\ln(a)} \\
&= b^{\ln(a)}.
\end{aligned}
$$

Schneller geht's wenn man von der Gleichung

$$
e^{\ln(a)\ln(b)} = e^{\ln(b)\ln(a)}
$$

ausgeht und umformt:

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\ln(a)}\right)^{\ln(b)} &= \left(e^{\ln(b)}\right)^{\ln(a)} \\
a^{\ln(b)} &= b^{\ln(a)}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$
\frac{e^x}{e^{\sqrt{x}}} = \left(e^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}-1}.
$$

Lösung von Aufgabe 4.

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}-1} &= e^{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\
&= e^{\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}} \\
&= e^x e^{-\sqrt{x}} \\
&= \frac{e^x}{e^{\sqrt{x}}}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung

$$
\ln\left(\frac{x+1}{2\sqrt{e^x}}\right) = \frac{1-x}{2}.
$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 5. Vereinfachen der linken Seite.

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+1}{2\sqrt{e^x}}\right) &= \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \ln(\sqrt{e^x}) \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(e^x) \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

Damit wird aus der Gleichung

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{x}{2} &= \frac{1-x}{2}\\
\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1-x}{2}+\frac{x}{2}\\
\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\\
\frac{x+1}{2} &= e^{1/2}\\
x+1 &= 2\sqrt{e}\\
x &= 2\sqrt{e}-1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} = x^2.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 6. Erweitern des Bruchs mit x ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+1} &= x^2\\
1 &= x^2(x^2+1).
\end{aligned}$$

Substitution $u = x^2$ ergibt

$$\begin{aligned}
1 &= u(u+1)\\
u^2+u-1 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}\\
&= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Da $u = x^2$ muss $u \geq 0$ sein, d.h. es kommt nur die Lösung

$$u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

in Frage. Damit ist

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \pm\sqrt{u}\\
&= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Lösen Sie die Gleichung

$$\log_3(x) = \log_9(y)$$

nach x auf und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Nutzen Sie das Logarithmengesetz

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Lösung von Aufgabe 7. Mit den Gesetzen

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

und

$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

lässt sich die Gleichung wie folgt umformen.

$$\begin{aligned}
\log_3(x) &= \log_9(y) \\
\frac{\ln(x)}{\ln(3)} &= \frac{\ln(y)}{\ln(9)} \\
\ln(x) &= \frac{\ln(y)}{2\ln(3)}\ln(3) \\
\ln(x) &= \frac{1}{2}\ln(y) \\
\ln(x) &= \ln(\sqrt{y}) \\
x &= \sqrt{y}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Am 19.11.20 erschien folgender Tweet zum Wachstum der Anzahl positiver Corona Tests.

`https://twitter.com/jens140180/status/1329377474065674241`

Der renommierte Epidemiologe Prof. Dr. Christian Drosten erwiderte hierauf: "Sie verbreiten Desinformation":

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329384476561059841`

Hat er recht?

Kurz darauf kommentiert Prof. Dr. Stefan Homburg

`https://twitter.com/SHomburg/status/1329406816531468295` was sofort als “Regelverstoß” gemeldet wurde. Hat er gegen die Regeln der Mathematik verstoßen?

Weshalb entwickelte sich so eine lange und erfolglose Debatte, obwohl es doch um ein rein mathematisches Problem ging?

Das Ende vom Lied war übrigens:

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329457311270768644`

Lösung von Aufgabe 8. Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad e^{ax}$$

wächst exponentiell für jede Konstante $a > 0$. Im vorliegenden Fall ist aber a keine Konstante sondern von x (d.h. der Zeit) abhängig, was Homburg Drosten (leider vergeblich) zu erklären versucht. Ist zum Beispiel

$$a \quad = \quad \frac{1}{x}$$

dann ist $a > 0$ für alle $x > 0$ und

$$f(x) \quad = \quad e^{x/x} \; = \; e$$

eine konstante Funktion, die überhaupt nicht wächst und schon gar nicht exponentiell.

Für

$$a \quad = \quad \frac{1}{x^2}$$

ist $a > 0$ für alle $x \neq 0$ und

$$f(x) \quad = \quad e^{1/x}$$

sogar streng monoton fallend für $x \neq 0$ da

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{1}{x^2}e^{1/x} \; < \; 0.$$

Exponentielles Wachstum liegt laut Homburg vor wenn die Steigung einer Funktion proportional ist zum Funktionswert, d.h.

$$f'(x) \quad = \quad af(x)$$

für eine positive Konstante a. Dies ist eine Differentialgleichung mit Lösung

$$f(x) \quad = \quad f(0)e^{ax},$$

die tatsächlich exponentiell wächst falls $f(0) > 0$.

Tatsächlich wurden die Zahlen im Wochenabstand genannt, d.h. es handelt sich um eine Folge

$$f_n \quad = \quad f(n\Delta t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t = \text{ 1 Woche}$$

und

$$f_n = (1+c)f_{n-1}.$$

Diese Folge wächst exponentiell falls $c > 0$ eine Konstante ist. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} f_n &= (1+c)f_{n-1} \\ &= (1+c)^2 f_{n-2} \\ &= \ldots \\ &= (1+c)^n f_0 \\ &= f_0 e^{n\ln(1+c)}. \end{aligned}$$

Da aber c im vorliegenden Fall mit der Zeit immer kleiner wird, gilt das nicht. Ist z.B.

$$c = e^{1/n} - 1$$

dann ist $c > 0$ für alle $n > 0$ und

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 e^{n\ln(e^{1/n})} \\ &= f_0 e^{n/n} \\ &= f_0 e. \end{aligned}$$

Dies ist eine konstante Folge, die natürlich nicht exponentiell wächst.

Die Diskussion entstand, weil Drosten die Definition des Begriffs "exponentielles Wachstum" nicht kannte und auch nicht zur Kenntnis nehmen wollte. Dies zeigt, wie wichtig Definitionen sind. Stattdessen argumentierte er mit Beispielen, in denen der Wachstumsparameter eine Konstante war, was aber im Widerspruch zum ursprünglichen Tweet stand, der ja darauf abhob, dass das prozentuale Wachstum nicht konstant ist und mit der Zeit kleiner wird.

Aufgabe 9. (Schwierig!) Berechnen Sie die Lösung x der Gleichung

$$9^x - 6^x = 4^x.$$

Lösung von Aufgabe 9. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} (3\times 3)^x - (3\times 2)^x &= (2\times 2)^x \\ 3^x\, 3^x - 3^x\, 2^x &= 2^x\, 2^x \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten durch 3^x erhält man

$$\begin{aligned} 3^x - 2^x &= \frac{2^x}{3^x}\, 2^x \\ 3^x - 2^x &= (2/3)^x\, 2^x. \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten durch 2^x erhält man

$$\begin{aligned} \frac{3^x}{2^x} - 1 &= (2/3)^x \\ (3/2)^x - 1 &= (2/3)^x \\ (3/2)^x - 1 &= \left(\frac{1}{3/2}\right)^x \\ (3/2)^x - 1 &= \frac{1}{(3/2)^x} \end{aligned}$$

Substitution

$$u = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

ergibt

$$\begin{aligned}
u-1 &= \frac{1}{u}\\
u^2-u &= 1\\
u^2-u-1 &= 0\\
u_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Da die rechte Seite nie negativ sein kann, bleibt auf der linken Seite nur die positive Lösung, d.h.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Logarithmiert man beide Seiten, erhält man

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= x\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\
x &= \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\ln(1+\sqrt{5})-\ln(2)}{\ln(3)-\ln(2)} \approx 1.187
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Gegeben seien die Konstantensymbole c, d, die Variablensymbole x, y und die Funktionssymbole f (zweistellig) und g (einstellig). Damit ist z.B.

$$f(f(c,x), g(g(y)))$$

ein Term. Nennen Sie 5 weitere Terme, die aus den gegebenen Symbolen bestehen. Wie viele Terme lassen sich mit den gegebenen Symbolen konstruieren?

Lösung von Aufgabe 10. Beispiele sind:

$$c, g(x), f(c,x), f(g(x), g(x)), g(g(g(d))).$$

Mit den gegebenen Symbolen lassen sich unendlich viele Terme konstruieren.

Aufgabe 11. Ersetzen Sie in dem Term

$$(x+3)^2\,\frac{\sqrt{2x-y}}{\sin(x)}$$

jedes Auftreten des Variablensymbols x durch den Term

$$(3y-1).$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$((3y-1)+3)^2 \frac{\sqrt{2(3y-1)-y}}{\sin(3y-1)}$$

Aufgabe 12. In natürlicher Sprache gibt es folgende Phänomene:

- Zwei unterschiedliche Worte mir der selben Bedeutung (Synonyme)
- Zwei unterschiedliche Dinge, die mit dem selben Wort bezeichnet werden (mehrdeutige Worte).

Finden Sie dazu je ein Beispiel. Welches Phänomen macht in der Kommunikation mehr Schwierigkeiten?

Lösung von Aufgabe 12. Synonyme sind z.B. Rechner und Computer. Ein mehrdeutiges Wort ist z.B. Bank (Geldinstitut, Sitzbank). Mehrdeutigkeiten sollten in formalen Sprachen vermieden werden. Es kommt in der Mathematik sehr selten vor, dass ein Symbol unterschiedliche Bedeutungen hat. Eine Ausnahme ist z.B. das Symbol $+$, das sowohl für die Addition von Zahlen als auch für die Addition von Vektoren oder Matrizen verwendet wird.

Aufgabe 13. Ersetzen Sie alle Vorkommen des Variablensymbols x in dem Term

$$\sqrt{x+\sin(2x+5)y}$$

durch den Term

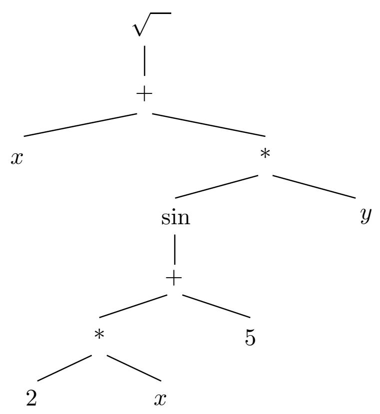
$$\cos(y)+3.$$

Stellen Sie den Term vor und nach der Ersetzung jeweils als Baum dar.

Lösung von Aufgabe 13. Darstellung des Terms

$$\sqrt{x+\sin(2x+5)y}$$

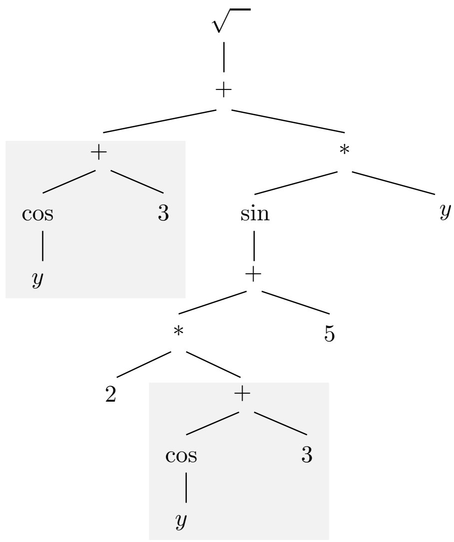
als Baum:



Ersetzt man alle x durch $\cos(y) + 3$ erhält man den Term

$$\sqrt{(\cos(y) + 3) + \sin(2(\cos(y) + 3) + 5)y}$$

mit der Baum Darstellung



Aufgabe 14. Terme sind Zeichenketten. Folglich sind die Terme

$$x + y$$

und

$$y + x$$

unterschiedlich: Die erste Zeichenkette beginnt mit x, die zweite mit y. Trotzdem besteht kein Zweifel daran, dass

$$x + y = y + x.$$

Versuchen Sie den scheinbaren Widerspruch zu erklären.

Lösung von Aufgabe 14. Die Terme $x + y$ und $y + x$ sind tatsächlich als Zeichenketten betrachtet ungleich, die *Bedeutung* der Zeichenketten ist jedoch gleich: Wenn man das + Symbol als Additionsfunktion interpretiert, kann man für x und y beliebige Zahlen einsetzen und erhält links und rechts vom Gleichheitszeichen immer den selben Wert. Man sagt auch, die Terme sind *syntaktisch* ungleich aber *semantisch* gleich. Im Alltagsleben interessiert man sich natürlich vor allem für die Bedeutung, d.h. die Semantik. Andererseits haben Computer keine Ahnung, was Zeichenketten bedeuten und können diese nur nach syntaktischen Regeln umformen.

Aufgabe 15. Von einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass für alle x gilt

$$f(5x + 3) \quad = \quad x^2.$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(x)$.

Hinweis: Sie dürfen auf beiden Seiten der Gleichung das Variablensymbol x durch einen beliebigen Term ersetzen. Im ersten Schritt ersetzt man x durch ${}^{x}\!/_{5}$ und erhält

$$\begin{aligned} f\,(5\;({}^{x}\!/_{5}) + 3) &= ({}^{x}\!/_{5})^2 \\ f\,(x+3) &= ({}^{x}\!/_{5})^2 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 15. Ausgehend von

$$f(5x+3) \quad = \quad x^2$$

wird auf beiden Seiten x ersetzt durch ${}^{x}\!/_{5}$. Man erhält damit

$$f(x+3) \quad = \quad ({}^{x}\!/_{5})^2.$$

Ersetzt man auf beiden Seiten x durch $x-3$ erhält man

$$f(x) \quad = \quad \left(\frac{x-3}{5}\right)^2.$$

Aufgabe 16. Stellen Sie den Term

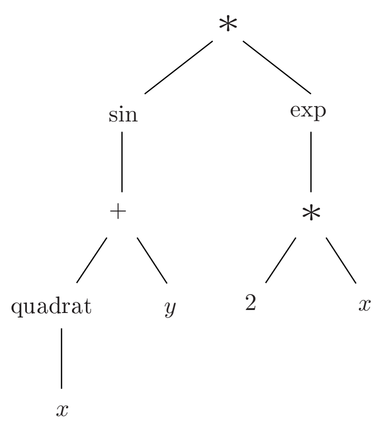
$$\sin(x^2+y)e^{2x}$$

als Baum dar. Überlegen Sie sich zunächst welche Funktionssymbole im Term auftreten und lassen Sie sich von der Notation nicht irritieren. Ein Teilterm entspricht in dieser Darstellung einem Teilbaum. Teilterme sind somit z.B.

$$x, y, 2, x^2, x^2+y, \ldots.$$

Nennen Sie alle Teilterme des gegebenen Terms.

Lösung von Aufgabe 16.



Die Teilterme sind

$$x, y, 2, x^2, x^2+y, \sin(x^2+y), 2x, e^{2x}, \sin(x^2+y)e^{2x}.$$

Aufgabe 17. Sei

$$f(x) = x^2 e^x + \sin(2x)$$

Was ist dann

$$f(y(2+z))?$$

Lösung von Aufgabe 17.

$$f(y(2+z)) = (y(2+z))^2 e^{y(2+z)} + \sin(2y(2+z))$$

Aufgabe 18. Ähnlich wie es Rechengesetze für Zahlen gibt, z.B.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

die für alle Zahlen a, b gelten, gibt es auch Rechengesetze für Wahrheitswerte. So gilt z.B.

$$\neg F \vee G = F \rightarrow G$$

für alle Wahrheitswerte F, G. Hierbei bedeutet $\neg$ die Negation, $\vee$ oder und $\rightarrow$ wenn–dann. Die Negation bindet stärker als alle anderen logischen Funktionen, man kann sich also um $\neg F$ Klammern denken.

Formeln für Wahrheitswerte sind viel einfacher zu beweisen als Formeln für Zahlen, da es nur zwei Wahrheitswerte gibt aber unendlich viele Zahlen. Für die beiden Wahrheitswerte F und G gibt es somit nur vier Kombinationen. Damit lässt sich o.g. Formel in einer Wahrheitstabelle beweisen, indem man alle Kombinationen ausrechnet und zeigt, dass auf beiden Seiten immer der gleiche Wert herauskommt:

F	G	$\neg F \vee G$	$F \rightarrow G$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Beweisen Sie damit auch die sog. Gesetze von de Morgan:

$$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$$
$$\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G.$$

Beweisen Sie weiterhin

$$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

wobei $\leftrightarrow$ genau dann wenn bedeutet: $F \leftrightarrow G$ ist wahr, wenn F und G den gleichen Wahrheitswert haben und falsch sonst.

Lösung von Aufgabe 18.

F	G	$\neg(F \wedge G)$	$\neg F \vee \neg G$	$\neg(F \vee G)$	$\neg F \wedge \neg G$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	w	w

F	G	$F \leftrightarrow G$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Aufgabe 19. Angenommen die Aussage $F \rightarrow G$ ist wahr. Entscheiden Sie von jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist.

- F ist notwendige Bedingung für G.
- F ist hinreichende Bedingung für G.
- G ist notwendige Bedingung für F.
- G ist hinreichende Bedingung für F.

Lösung von Aufgabe 19.

- F ist notwendige Bedingung für G ist falsch.
- F ist hinreichende Bedingung für G ist wahr.
- G ist notwendige Bedingung für F ist wahr.
- G ist hinreichende Bedingung für F ist falsch.

Aufgabe 20. Nennen Sie drei Teilmengen der Menge

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

Lösung von Aufgabe 20. Teilmengen sind z.B.

$$\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Aufgabe 21. Finden Sie zwei Mengen A, B für die weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$ gilt.

Lösung von Aufgabe 21. Ein Beispiel ist

$$A = \{1, 2\} \text{ und } B = \{2, 3\}.$$