Heilbronn, den 15.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 10

Aufgabe 1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(1/x)}{1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

und $\hat{x} = 0$.

- Berechnen Sie
$$\lim_{x \to \hat{x}} f(x).$$
- Ist f stetig bei $\hat{x} = 0$?
- Ist f differenzierbar bei $\hat{x} = 0$?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 1.

- Für $x \neq 0$ ist
$$f(x) = x^2 \sin(1/x).$$
Für $x \to 0$ geht x^2 gegen Null und $\sin(1/x)$ ist begrenzt zwischen ± 1. Daher ist
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$
- Da an der Stelle $\hat{x} = 0$ der Grenzwert von f gleich dem Funktionswert von f ist, ist f dort stetig.
- Für $\hat{x} = 0$ und $\Delta x \neq 0$ ist
$$\begin{aligned} s(\Delta x) &= \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} f(\Delta x) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \Delta x^2 \sin(1/\Delta x) \\ &= \Delta x \sin(1/\Delta x) \\ \lim_{\Delta x \to 0} s(\Delta x) &= 0. \end{aligned}$$
Da der Grenzwert der Sekantensteigung existiert, ist f an der Stelle $\hat{x} = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 2. Sei

$$f \in D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(\ln(x))$$

mit

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 1\}.$$

Berechnen Sie die Ableitung von f.

Lösung von Aufgabe 2. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie verwendet haben.

$$\int 4e^{2(x-1)} dx$$

$$\int -x \sin(2x) dx.$$

Lösung von Aufgabe 3.

- Substitution

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x-1) \\ dg/dx &= 2 \\ dx &= 0.5dg \\ \int 4e^{2(x-1)} dx &= \int 4e^g 0.5dg \\ &= 2 \int e^g dg \\ &= 2e^g + C \\ &= 2e^{2(x-1)} + C \end{aligned}$$

- Produktintegration

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ g'(x) &= -\sin(2x) \\ f'(x) &= 1 \\ g(x) &= 0.5\cos(2x) \\ \int -x \sin(2x) dx &= 0.5x \cos(2x) - \int 0.5 \cos(2x) dx \\ &= 0.5x \cos(2x) - 0.5 \int \cos(2x) dx \\ &= 0.5x \cos(2x) - 0.25 \sin(2x) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Berechnen Sie hiermit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f'(x)dx.$$

Lösung von Aufgabe 4. Aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

folgt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

da ansonsten die Fläche unter $f(x)$ nicht endlich wäre.
Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f'(x)dx &= [f(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)f(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f'(dx) = 0.$$

Man kann die Aufgabe auch mit Substitution lösen:

$$u = f(x), \qquad \frac{du}{dx} = f'(x), \qquad dx = \frac{1}{f'(x)}du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f'(x)dx &= \int_{f(-\infty)}^{f(\infty)} uf'(x)\frac{1}{f'(x)}du \\ &= \int_0^0 u\,du \\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}dx.$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx.$$

Substitution

$$\begin{aligned} g &= \sin(x) \\ \frac{dg}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{1}{\cos(x)}dg \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx &= \int \frac{\cos(x)}{g^2}\frac{1}{\cos(x)}dg \\ &= \int \frac{1}{g^2}dg \\ &= \int g^{-2}dg \\ &= -g^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x\ln\left({}^{1}\!/\!_{x}\right)}.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\int \frac{1}{x\ln\left({}^{1}\!/\!_{x}\right)}dx = \int -\frac{1}{x\ln(x)}dx.$$

Substitution

$$u = \ln(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dx = xdu.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int -\frac{1}{x\ln(x)}dx &= -\int \frac{1}{xu}xdu \\ &= -\int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln|u| \\ &= -\ln|\ln(x)|. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Von einer Funktion $f(x)$ sei eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt. Berechnen Sie hiermit eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x}f(\ln(x)).$$

Lösung von Aufgabe 7. Substitution

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\ dx &= x du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} f(\ln(x)) dx &= \int \frac{1}{x} f(u) x du \\ &= \int f(u) du \\ &= F(u) + C \\ &= F(\ln(x)) + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \cos\left(\cos(x)^2\right)\cos(x)\sin(x).$$

Lösung von Aufgabe 8. Substitution

$$\begin{aligned} u &= \cos(x)^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2\cos(x)\sin(x) \\ dx &= -\frac{1}{2\cos(x)\sin(x)} du \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &\int \cos\left(\cos(x)^2\right)\cos(x)\sin(x) \\ &= \int \cos(u)\cos(x)\sin(x)\left(-\frac{1}{2\cos(x)\sin(x)}\right) du \\ &= -\frac{1}{2}\int \cos(u) du \\ &= -\frac{1}{2}\sin(u) + C \\ &= -\frac{1}{2}\sin(\cos(x)^2) + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Für welche Werte von n ist der Flächeninhalt unter der Funktion $f(x) = x^n$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ endlich? Hinweis: n kann auch negativ sein.

Lösung von Aufgabe 9. Eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$ ist

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Falls $n+1$ negativ ist, ist F an der Stelle $x=0$ nicht definiert. Um den Flächeninhalt auszurechnen muss man daher die Fläche zwischen ε und 1 berechnen und dann den rechtsseitigen Grenzwert $\varepsilon \to 0$ bestimmen.

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 x^n &= \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\left(1-\varepsilon^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{n+1}$$

ist genau dann endlich wenn $n+1 \geq 0$, d.h. $n \geq -1$.

Für den Spezialfall $n=-1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 x^{-1}dx &= [\ln(x)]_\varepsilon^1 \\ &= -\ln(\varepsilon). \end{aligned}$$

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(\varepsilon)$$

ist unendlich.

Der Flächeninhalt unter $f(x)=x^n$ zwischen $x=0$ und $x=1$ ist somit endlich genau dann wenn $n>-1$.

Aufgabe 10. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{3+j}{j(-2j+1)}.$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned} \frac{3+j}{j(-2j+1)} &= \frac{3+j}{2+j} \\ &= \frac{(3+j)(2-j)}{5} \\ &= \frac{7-j}{5} \end{aligned}$$

$$\mathrm{re}(z) = {}^7\!/_5, \quad \mathrm{im}(z) = -{}^1\!/_5, \quad |z| = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von

$$\frac{1}{1+\frac{1}{j}}.$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{1}{j}} &= \frac{j}{j+1}\\ &= \frac{j(1-j)}{2}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}j.\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{j}{(2+j)^2}+\frac{1}{5j}.$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned}z &= \frac{j}{(2+j)^2}+\frac{1}{5j}\\ &= \frac{j}{4+4j-1}-\frac{j}{5}\\ &= \frac{j}{3+4j}-\frac{j}{5}\\ &= \frac{j(3-4j)}{25}-\frac{j}{5}\\ &= \frac{4+3j-5j}{25}\\ &= \frac{4-2j}{25}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{re}(z)=\frac{4}{25},\quad \mathrm{im}(z)=-\frac{2}{25},\quad |z|=\frac{\sqrt{20}}{25}.$$

Aufgabe 13. Beweisen Sie unter Verwendung der Eulergleichung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi)+j\sin(\varphi)$$

dass

$$\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}.$$

Lösung von Aufgabe 13. Ersetzt man in der Eulergleichung φ durch $-\varphi$ auf beiden Seiten, erhält man

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi)+j\sin(-\varphi) = \cos(\varphi)-j\sin(\varphi).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\overline{e^{j\varphi}} &= \overline{\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)}\\ &= \cos(\varphi)-j\sin(\varphi)\\ &= e^{-j\varphi}.\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von folgenden Zahlen.

$$1 + e^{j\varphi},\ e^{2+j\varphi},\ \frac{2}{1 + e^{j\varphi}}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{aligned}
1 + e^{j\varphi} &= \underbrace{1 + \cos(\varphi)}_{\text{re}} + j \underbrace{\sin(\varphi)}_{\text{im}} \\
e^{1+j\varphi} &= e^2 e^{j\varphi} \\
&= \underbrace{e^2 \cos(\varphi)}_{\text{re}} + j \underbrace{e^2 \sin(\varphi)}_{\text{im}} \\
\frac{2}{1 + e^{j\varphi}} &= \frac{2}{1 + \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)} \\
&= 2 \frac{1 + \cos(\varphi) - j \sin(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi))^2 + \sin(\varphi)^2} \\
&= 2 \frac{1 + \cos(\varphi) - j \sin(\varphi)}{1 + 2\cos(\varphi) + \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} \\
&= 2 \frac{1 + \cos(\varphi) - j \sin(\varphi)}{2 + 2\cos(\varphi)} \\
&= \frac{1 + \cos(\varphi) - j \sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \\
&= \underbrace{1}_{\text{re}} + j \underbrace{\frac{-\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)}}_{\text{im}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von folgenden Zahlen, d.h. bringen Sie sie auf die Form

$$re^{j\varphi}$$

wobei $r, \varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$.

$$1 + j,\ 1 - j,\ \frac{1}{1 + j},\ \frac{j}{1 + j},\ -2e^{j\pi/2},\ 3e^{2+5j},\ \frac{3}{e^{2+5j}}$$

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned}
1+j &= \sqrt{2}e^{j\pi/4} \\
1-j &= \sqrt{2}e^{-j\pi/4} \\
\frac{1}{1+j} &= \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\pi/4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4} \\
\frac{j}{1+j} &= j\frac{1}{1+j} \\
&= e^{j\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4} \\
-2e^{j\pi/2} &= 2e^{j\pi}e^{j\pi/2} \\
&= 2e^{j3\pi/2} \\
3e^{2+5j} &= 3e^{2}\,e^{5j} \\
\frac{3}{e^{2+5j}} &= 3e^{-2-5j} \\
&= 3e^{-2}e^{-5j}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es für jede komplexe Zahl z genau eine reelle Zahl a und genau eine reelle Zahl b gibt so dass

$$z = a + jb.$$

Damit ist gezeigt, dass der Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl eindeutig ist. Das ist nicht selbstverständlich, denn bei Bruchzahlen sind Zähler und Nenner ja *nicht* eindeutig!

- Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

  $$a + jb = 0 \ \rightarrow\ (a = 0 \land b = 0).$$

  Beginnen Sie den Beweis wie folgt:
  Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Annahme:

  $$a + jb = 0.$$

  Zu zeigen:

  $$a = 0 \text{ und } b = 0.$$

- Zeigen Sie dann, dass für alle $a, b, u, v \in \mathbb{R}$ gilt

  $$a + jb = u + jv \ \rightarrow (a = u \land b = v).$$

Lösung von Aufgabe 16.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Annahme:

  $$a + jb = 0.$$

  Zu zeigen:

  $$a = 0 \text{ und } b = 0.$$

  Aus der Annahme folgt

  $$jb = -a.$$

  Falls $b \neq 0$ folgt

  $$j = -\frac{a}{b},$$

  d.h. $j \in \mathbb{R}$ was ein Widerspruch zu $j^2 = -1$ ist. Folglich muss $b = 0$ sein und damit

  $$\begin{aligned} j0 &= -a \\ 0 &= -a \\ a &= 0. \end{aligned}$$

- Seien $a, b, u, v \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Annahme

  $$a + jb = u + jv.$$

  Zu zeigen:

  $$a = u \text{ und } b = v.$$

  Aus der Annahme folgt

  $$a - u + j(b - v) = 0.$$

  Nach dem vorigen Beweis folgt hieraus

  $$\begin{aligned} a - u &= 0 \\ b - v &= 0 \end{aligned}$$

  und damit

  $$a = u \text{ und } b = v.$$

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Lösung von Aufgabe 17. Sei $z = re^{j\varphi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= re^{j\varphi}\overline{re^{j\varphi}} \\ &= re^{j\varphi}re^{-j\varphi} \\ &= r^2e^{j(\varphi-\varphi)} \\ &= r^2e^0 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(uz) &= u\mathrm{re}(z) \\ \mathrm{im}(uz) &= u\mathrm{im}(z). \end{aligned}$$

Ein *reeller* Faktor kann somit aus der Real- und Imaginärteiloperation herausgezogen werden.

Lösung von Aufgabe 18. Sei $z = a + jb$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(uz) &= \mathrm{re}(u(a+jb)) \\ &= \mathrm{re}(ua+jub) \\ &= ua \\ &= u\mathrm{re}(z) \\ \mathrm{im}(uz) &= \mathrm{im}(u(a+jb)) \\ &= \mathrm{im}(ua+jub) \\ &= ub \\ &= u\mathrm{im}(z). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{uz} = u\,\overline{z}.$$

Lösung von Aufgabe 19. Sei $z = a + jb$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{uz} &= \overline{u(a+jb)} \\ &= \overline{ua+jub} \\ &= ua - jub \\ &= u(a-jb) \\ &= u\,\overline{z}. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$z\overline{z} - z^2 = 1.$$

Lösung von Aufgabe 20. Sei

$$z = a + jb.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= a^2 + b^2 \\ z^2 &= a^2 - b^2 + j(2ab). \end{aligned}$$

Die Gleichung ist damit

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - j(2ab) &= 1 \\ 2b^2 - j(2ab) &= 1. \end{aligned}$$

Für Real- und Imaginärteil gilt somit

$$\begin{aligned} 2b^2 &= 1 \\ -2ab &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$b = \pm\sqrt{1/2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $a = 0$. Die Gleichung hat folglich zwei Lösungen

$$z = \pm\frac{j}{\sqrt{2}}.$$