Heilbronn, den 5.12.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

# Übungen zu Mathematik 1
# mit Musterlösungen
*Blatt 11*

---

**Aufgabe 1.** Gibt es eine Relation $R$ so dass

$$\big(\{2\}, \{3, 5\}, R\big)$$

eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.

**Lösung von Aufgabe 1.** Eine Möglichkeit ist $R = \{(2, 3)\}$, die andere Möglichkeit ist $R = \{(2, 5)\}$.

**Aufgabe 2.** Gegeben ist die Menge

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

und die Funktion

$$f = (A, A, \{(2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}).$$

Finden Sie eine Relation $R$ so dass

$$f \circ f \circ f = (A, A, R).$$

**Lösung von Aufgabe 2.** Zunächst berechnet man

$$\begin{aligned} f(f(f(2))) &= f(f(2)) &= f(2) &= 2 \\ f(f(f(3))) &= f(f(4)) &= f(3) &= 4 \\ f(f(f(4))) &= f(f(3)) &= f(4) &= 3 \\ f(f(f(5))) &= f(f(2)) &= f(2) &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$f \circ f \circ f = (A, A, \{(2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}).$$

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$e^x - 2e^{-x} = 0.$$

**Lösung von Aufgabe 3.** Umformen ergibt

$$\begin{aligned} e^x - 2e^{-x} &= 0 \\ e^x &= 2e^{-x} \end{aligned}$$

Da $e^x \neq 0$ kann man beide Seiten mit $e^x$ multiplizieren und erhält

$$e^{2x} = 2$$

Da beide Seiten positiv sind für alle $x$, kann man logarithmieren und erhält

$$\begin{aligned} 2x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu der Funktion

$$f(x) = \sin(x)e^x$$

und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind. Hinweis: Wenn man $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Einheitskreis einzeichnet, erkennt man dass

$$\sin(x) = -\cos(x) \quad \text{für } x = {}^{3\pi}/_4 \text{ und } x = -{}^{\pi}/_4.$$

**Lösung von Aufgabe 4.**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x)e^x \\
f'(x) &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x \\
&= (\sin(x) + \cos(x))e^x \\
f''(x) &= (\cos(x) - \sin(x))e^x + (\sin(x) + \cos(x))e^x \\
&= 2\cos(x)e^x.
\end{aligned}$$

Nullstellen der ersten Ableitung hat man für

$$\begin{aligned}
x &= {}^{3\pi}/_4 + k2\pi \\
x &= -{}^{\pi}/_4 + k2\pi
\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Ableitung ist im ersten Fall negativ, im zweiten Fall positiv. Daher hat $f(x)$ ein lokales Maximum für

$$x = {}^{3\pi}/_4 + k2\pi$$

und ein lokales Minimum für

$$x = -{}^{\pi}/_4 + k2\pi$$

**Aufgabe 5.** Gegeben ist die Gleichung

$$\cos(\sqrt{x} + 1) = 0.$$

- Wenn man bei der Lösung nicht aufpasst, kommt man zu der "Lösungsmenge"

  $$\{(\pm{}^{\pi}/_2 + 2k\pi - 1)^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

  Begründen Sie, warum diese Lösungsmenge nicht korrekt ist.
- Berechnen Sie die korrekte Lösungsmenge und machen Sie deutlich, an welcher Stelle bei der Berechnung der o.g. falschen Lösungsmenge ein Fehler gemacht wurde.

**Lösung von Aufgabe 5.**

- Für $k = -1$ erhält man die "falsche" Lösung

  $$x = ({}^{\pi}/_2 - 2\pi - 1)^2.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{x}+1) &= \cos(|{}^{\pi}/_{2} - 2\pi - 1| + 1)\\ &= \cos(2\pi + 1 - {}^{\pi}/_{2} + 1)\\ &= \cos(2 - {}^{\pi}/_{2})\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

- Umformen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+1 &= \pm{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\\ \sqrt{x} &= \pm{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi - 1.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist für $k < 0$ negativ. Würde man beide Seitenquadrieren, müsste man die nicht-injektie Quadratfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ anwenden. Da dies keine Äquivalenzumformung ist, können falsche Lösungen entstehen.

Tatsächlich ist diese Gleichung nur lösbar wenn die rechte Seite $\geq 0$ ist, da die Wurzelfunktion nie negative Funktionswerte liefert. Man kann die Werte für $k$ also einschränken ohne die Lösungsmenge zu ändern.

**Fall 1.** Für $k > 0$ ist die rechte Seite garantiert positiv.

$$\sqrt{x} = \pm{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi - 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Jetzt kann man auf beiden Seiten die injektive, auf $\mathbb{R}_0^+$ eingeschränkte Quadratfunktion anwenden.

$$x = \left(\pm{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi - 1\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

**Fall 2.** Für $k = 0$ ist die rechte Seite positiv falls das Vorzeichen von ${}^{\pi}/_{2}$ positiv ist.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= {}^{\pi}/_{2} - 1\\ x &= \left({}^{\pi}/_{2} - 1\right)^2\end{aligned}$$

Damit erhält man die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\pm{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi - 1\right)^2 \mid k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left({}^{\pi}/_{2} - 1\right)^2\right\}.$$

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 der Funktion

$$f(x) = \frac{1+x^3}{x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

**Lösung von Aufgabe 6.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x^3}{x} = \frac{1}{x} + x^2 = x^{-1} + x^2 \\ f'(x) &= -x^{-2} + 2x = -\frac{1}{x^2} + 2x \\ f''(x) &= 2x^{-3} + 2 = \frac{2}{x^3} + 2. \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f'(1) &= 1 \\ f''(1) &= 4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 + (x-1) + \frac{1}{2} 4 (x-1)^2 \\ &= 2 + x - 1 + 2(x^2 - 2x + 1) \\ &= 3 - 3x + 2x^2 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= -3 \\ a_2 &= 2. \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad $n = 2$ an die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

mit Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$.

Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ für $x \in [1, 2]$.

**Lösung von Aufgabe 7.**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1} = \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\ f'''(x) &= -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 1$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= 1 \\ f'(\hat{x}) &= -1 \\ f''(\hat{x}) &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polyom vom Grad 2 an $f(x)$ mit Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$

$$p(x) \quad = \quad 1 - (x-1) + (x-1)^2.$$

Der Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[1, 2]$ ist höchstens

$$\begin{aligned} \left( \max_{\xi \in [1,2]} |f'''(\xi)| \right) \frac{(2-1)^3}{3!} &= \left( \max_{\xi \in [1,2]} \frac{6}{\xi^4} \right) \frac{1}{6} \\ &= 6\,\frac{1}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.** Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\cos(x)x}{\sin(x)}.$$

- Hat $f$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie diesen, falls nein, geben Sie eine Begründung. Hinweis: Ersetzen Sie die Sinusfunktion im Nenner durch ihre Taylorreihe.
- Hat $f$ an der Stelle $\hat{x} = \pi$ einen Grenzwert? Falls ja, berechnen Sie diesen, falls nein, geben Sie eine Begründung.

**Lösung von Aufgabe 8.** Mit der Taylor Reihe der Sinusfunktion folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x - x^3/3! + x^5/5! - \dots} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) \frac{x}{\sin(x)} \quad = \quad 1.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi} \sin(x) &= 0 \\ \lim_{x \to \pi} \cos(x) &= -1 \end{aligned}$$

so dass $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = \pi$ keinen Grenzwert hat.

**Aufgabe 9.** Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x, y) \quad = \quad y e^x \sin(xy).$$

**Lösung von Aufgabe 9.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= y(e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy) y) \\ &= y e^x (\sin(xy) + y \cos(xy)) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= e^x (\sin(xy) + xy \cos(xy)) \end{aligned}$$

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(c-x)dx \quad = \quad \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx.$$

**Lösung von Aufgabe 10.** Substitution

$$\begin{aligned} u &= c-x \\ \frac{du}{dx} &= -1 \\ dx &= -du \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(c-x)dx &= \int_{c-a}^{c-b} f(u){-du} \\ &= -\int_{c-a}^{c-b} f(u)du \\ &= \int_{c-b}^{c-a} f(u)du \\ &= \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.** Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die beiden Stammfunktionen

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \\ F_2(t) &= \int_0^t f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Sie müssen hierbei Fallunterscheidungen machen, eine Skizze hilft. Da sowohl $F_1$ als auch $F_2$ Stammfunktionen von $f$ sind, ist $F_2 = F_1 + C$ für eine Konstante $C$. Berechnen Sie diese.

**Lösung von Aufgabe 11.** $F_1(t)$ ist die Fläche unter $f$ zwischen $-\infty$ und $t$.

- Für $t < -1$ ist $F_1(t) = 0$.
- Für $-1 \le t \le 1$ ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau &= \int_{-1}^{t} f(\tau)d\tau \\ &= \int_{-1}^{t} 1\, d\tau \\ &= [\tau]_{-1}^{t} \\ &= t+1. \end{aligned}$$

- Für $t > 1$ ist $F_1(t) = 2$.

Damit ist

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -1 \\ t+1 & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

$F_2(t)$ ist die Fläche unter $f$ zwischen 0 und $t$.

- Für $t < -1$ ist $F_2(t) = -1$.
- Für $-1 \leq t \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)d\tau &= \int_0^t 1\, d\tau \\ &= [\tau]_0^t \\ &= t. \end{aligned}$$

- Für $t > 1$ ist $F_2(t) = 1$.

Damit ist

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \begin{cases} -1 & \text{für } t < -1 \\ t & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } t > 1 \end{cases} \\ &= F_1(t) - 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.** In einen See fließen $i(t)$ Liter Wasser pro Sekunde. Zum Zeitpunkt $t = \hat{t}$ ist der See mit $q(\hat{t}) = q_0$ Litern gefüllt. Stellen Sie hiermit eine Formel für die Wassermenge $q(t)$ im See zu einem beliebigen Zeitpunkt $t$ auf.

**Lösung von Aufgabe 12.**

$$q(t) = \int_{\hat{t}}^t i(\tau)d\tau + q_0.$$

**Aufgabe 13.** Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$$

**Lösung von Aufgabe 13.** Sei

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Da $f(x)$ eine gerade Funktion ist, ist

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx.$$

Da $f(x)$ bei $x = 0$ unstetig ist, muss das Integral durch einen Grenzwert berechnet werden.

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 f(x)dx &= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 f(x)dx \\
&= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 |x|^{-1/2}dx \\
&= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}dx \\
&= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\frac{1}{1/2}x^{1/2}\right]_\varepsilon^1 \\
&= 4\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 \\
&= 4\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (1-\sqrt{\varepsilon}) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 14.** Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie verwendet haben. Berechnen Sie dann den Wert des bestimmten Integrals von $-3$ bis 2.

a)
$$\int e^{3x-2}dx.$$

b)
$$\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx$$

Hinweis: Substitution $g(x) = \cos(x)$.

c)
$$\int 3x\cos(x^2)e^{-\sin(x^2)}dx.$$

Hinweis: Substitution $g(x) = \sin(x^2)$.

d)
$$\int xe^x dx.$$

Hinweis: Produktintegration.

e)
$$\int a^x dx.$$

Hinweis: $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$, Substitution $g(x) = x\ln(a)$

**Lösung von Aufgabe 14.**

a) Substitution

$$g = 3x - 2, \quad \frac{dg}{dx} = 3, \quad dx = \frac{1}{3}dg.$$

$$\begin{aligned}
\int e^{3x-2}dx &= \int 1/3e^g dg \\
&= 1/3e^g + C \\
&= 1/3e^{3x-2} + C \\
\int_{-3}^{2} e^{3x-2}dx &= 1/3\left[e^{3x-2}\right]_{-3}^{2} \\
&= 1/3(e^4 - e^{-11}) \\
&= 18.2
\end{aligned}$$

b) Substitution

$$g = \cos(x), \quad \frac{dg}{dx} = -\sin(x), \quad dx = -\frac{1}{\sin(x)}dg.$$

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx &= \int -\sin(x)e^g\frac{1}{\sin(x)}dg \\
&= -\int e^g dg \\
&= -e^g + C \\
&= -e^{\cos(x)} + C \\
\int_{-3}^{2} \sin(x)e^{\cos(x)}dx &= -\left[e^{\cos(x)}\right]_{-3}^{2} \\
&= -(e^{\cos(2)} - e^{\cos(-3)}) \\
&= -0.288
\end{aligned}$$

c) Substitution

$$g = \sin(x^2), \quad \frac{dg}{dx} = 2x\cos(x^2), \quad dx = \frac{1}{2x\cos(x^2)}dg.$$

$$\begin{aligned}
\int 3x\cos(x^2)e^{-\sin(x^2)}dx &= \int 3x\cos(x^2)e^{-g}\frac{1}{2x\cos(x^2)}dg \\
&= \int 3/2e^{-g}dg \\
&= -3/2e^{-g} + C \\
&= -3/2e^{-\sin(x^2)} + C \\
\int_{-3}^{2} 3x\cos(x^2)e^{-\sin(x^2)}dx &= -3/2\left[e^{-\sin(x^2)}\right]_{-3}^{2} \\
&= -3/2(e^{-\sin(4)} - e^{-\sin(9)}) \\
&= -2.204
\end{aligned}$$

d) Produktintegration

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^x, \quad f'(x) = 1, \quad g(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned}
\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\
&= x e^x - e^x + C \\
&= e^x (x-1) + C \\
\int_{-3}^{2} x e^x dx &= \left[e^x (x-1)\right]_{-3}^{2} \\
&= e^2 + 4e^{-3} \\
&= 7.588
\end{aligned}$$

e) Substitution

$$g = x \ln(a), \quad \frac{dg}{dx} = \ln(a), \quad dx = \frac{1}{\ln(a)} dg.$$

$$\begin{aligned}
\int a^x dx &= \int e^{x \ln(a)} dx \\
&= \int e^g \frac{1}{\ln(a)} dg \\
&= e^g / \ln(a) + C \\
&= e^{x \ln(a)} / \ln(a) + C \\
&= a^x / \ln(a) + C \\
\int_{-3}^{2} e^{x \ln(a)} dx &= 1/\ln(a) \left[a^x\right]_{-3}^{2} \\
&= (a^2 - a^{-3}) / \ln(a)
\end{aligned}$$

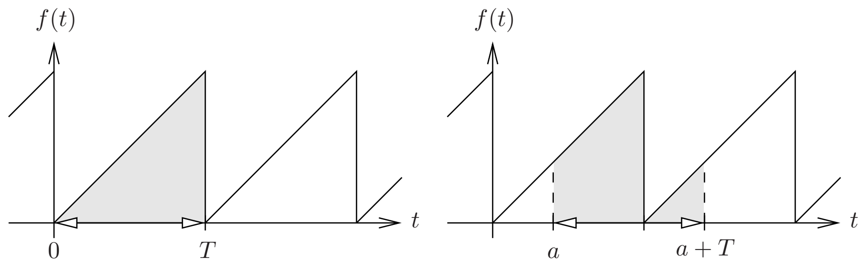
**Aufgabe 15.** Sei $f(t)$ eine $T$-periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $a$ gilt

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter $f(t)$ in einer Periode unabhängig davon ist, wo die Periode beginnt. In folgendem Bild wird dies am Beispiel einer Sägezahnfunktion dargestellt.



Hinweis:

- Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale:

$$\int_a^{a+T} \dots \quad = \quad \int_a^0 \dots + \int_0^{a+T} \dots .$$

- Führen Sie im ersten Integral eine Substitution $u = t + T$ durch. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen zu

$$\int_{a+T}^{T} \dots .$$

- Im Integrand dieses Integrals nutzen Sie nun die Periodizität von $f$, indem Sie $f(u - T)$ durch $f(u)$ ersetzen. Die Integrationsvariable $u$ ersetzen Sie danach wieder durch $t$.
- Da die Integranden der beiden Integrale nun wieder gleich sind, können Sie die Integrale zu einem Integral zusammensetzen. Sie müssen hierzu lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

$$\begin{aligned}\int_{a+T}^{T} \dots + \int_0^{a+T} \quad &= \quad \int_0^{a+T} \dots + \int_{a+T}^{T} \dots \\ &= \quad \int_0^T \dots .\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 15.**

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_a^0 f(t)dt + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Substitution im ersten Integral.

$$\begin{aligned} u &= t + T \\ \frac{du}{dt} &= 1 \\ du &= dt \\ t &= u - T. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_{a+T}^{T} f(u - T)du + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Da $f(t)$ eine $T$-periodische Funktion ist, gilt

$$f(u - T) \quad = \quad f(u).$$

Damit ist

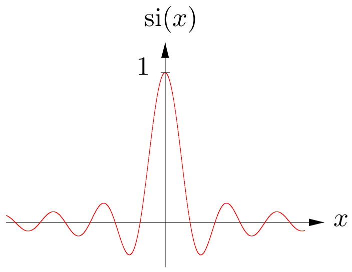
$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_{a+T}^{T} f(u)du + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Die Integrationsvariable darf beliebig umbenannt werden. Ersetzt man im ersten Integral $u$ wieder durch $t$, erhält man

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_{a+T}^{T} f(t)dt + \int_0^{a+T} f(t)dt \\ &= \int_0^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{T} f(t)dt \\ &= \int_0^{T} f(t)dt.\end{aligned}$$

**Aufgabe 16.** Die si-Funktion ist definiert durch

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} {}^{\sin(x)}/_{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$




Die si-Funktion ist nicht elementar integrierbar, d.h. hat keine Stammfunktion, die man mit den üblichen Funktionssymbolen darstellen kann. Trotzdem werden wir im nächsten Semester zeigen, dass

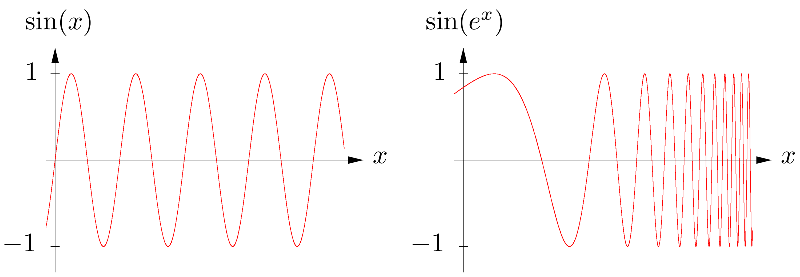
$$\int_0^{\infty} \mathrm{si}(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \sin(x)dx$$

nicht existiert.

Die Funktion $\sin(e^x)$ sieht ähnlich aus wie die Sinusfunktion, mit dem Unterschied, dass die Frequenz zunimmt:



Man würde daher vermuten, dass auch

$$\int_0^\infty \sin(e^x)dx$$

nicht existiert. Dies ist jedoch nicht der Fall! Zeigen Sie mit Hilfe einer Substitution, dass

$$\int_0^\infty \sin(e^x)dx \quad = \quad \int_1^\infty \mathrm{si}(x)dx.$$

Da die si-Funktion begrenzt ist, ist

$$\int_1^\infty \mathrm{si}(x)dx \quad = \quad \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{si}(x)dx}_{\pi/2} - \underbrace{\int_0^1 \mathrm{si}(x)dx}_{\text{endlich}}.$$

Folglich existiert

$$\int_0^\infty \sin(e^x)dx.$$

**Lösung von Aufgabe 16.** Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin(x)dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a \sin(x)dx \\
&= -\lim_{a\to\infty}[\cos(x)]_0^a \\
&= -\lim_{a\to\infty}(\cos(a)-1) \\
&= 1-\lim_{a\to\infty}\cos(a).
\end{aligned}$$

Da die Cosinusfunktion keinen Grenzwert an der Stelle $\infty$ hat, existiert das Integral nicht.

Mit der Substitution

$$u = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{1}{e^x}du = \frac{1}{u}du$$

folgt

$$\int_0^\infty \sin(e^x)dx \quad = \quad \int_1^\infty \sin(u)\frac{1}{u}du \quad = \quad \int_1^\infty \mathrm{si}(x)dx.$$

**Aufgabe 17.** Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{3+j}{j(-2j-1)}.$$

**Lösung von Aufgabe 17.**

$$\begin{aligned}
\frac{3+j}{j(-2j-1)} &= -\frac{3+j}{j(2j+1)} \\
&= -\frac{3+j}{-2+j} \\
&= -\frac{(3+j)(-2-j)}{5} \\
&= \frac{(3+j)(2+j)}{5} \\
&= \frac{5+5j}{5} \\
&= 1+j
\end{aligned}$$

$$\mathrm{re}(z) = 1, \quad \mathrm{im}(z) = 1, \quad |z| = \sqrt{2}.$$

**Aufgabe 18.** Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$\frac{2-3j}{(1+j)^2-1}$$

**Lösung von Aufgabe 18.**

$$\begin{aligned}
\frac{2-3j}{(1+j)^2-1} &= \frac{2-3j}{(1+2j-1-1)} \\
&= \frac{2-3j}{-1+2j} \\
&= \frac{(2-3j)(-1-2j)}{5} \\
&= \frac{-2-4j+3j-6}{5} \\
&= \frac{-8-j}{5}
\end{aligned}$$

Realteil ist $-8/5$, Imaginärteil ist $-1/5$.

**Aufgabe 19.** Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{uz} = u\,\overline{z}.$$

**Lösung von Aufgabe 19.** Sei $z = a + jb$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{uz} &= \overline{u(a+jb)} \\
&= \overline{ua+jub} \\
&= ua - jub \\
&= u(a-jb) \\
&= u\,\overline{z}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 20.** Sei $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(uz) &= u\mathrm{re}(z) \\
\mathrm{im}(uz) &= u\mathrm{im}(z).
\end{aligned}$$

Ein *reeller* Faktor kann somit aus der Real- und Imaginärteiloperation herausgezogen werden.

**Lösung von Aufgabe 20.** Sei $z = a + jb$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(uz) &= \mathrm{re}(u(a+jb)) \\
&= \mathrm{re}(ua + jub) \\
&= ua \\
&= u\mathrm{re}(z) \\
\mathrm{im}(uz) &= \mathrm{im}(u(a+jb)) \\
&= \mathrm{im}(ua + jub) \\
&= ub \\
&= u\mathrm{im}(z).
\end{aligned}$$