Heilbronn, den 12.12.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = (x_2, 1 - x_1).$$

Falls f bijektiv ist, berechnen Sie die Umkehrfunktion von f, andernfalls begründen Sie durch ein Gegenbeispiel dass f nicht bijektiv ist.

Lösung von Aufgabe 1. f ist bijektiv. Zur Berechnung der Umkehrfunktion löst man

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 \\ y_2 &= 1 - x_1 \end{aligned}$$

nach x_1 und x_2 auf. Aus der ersten Gleichung folgt

$$x_2 = y_1$$

aus der zweiten folgt

$$x_1 = 1 - y_2.$$

Folglich ist $f^{-1} \in \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch

$$f^{-1}(y_1, y_2) = (1 - y_2, y_1).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sign}(x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \to \infty$ haben.

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} \\ x'_n &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1 \\ f(x'_n) &= -1. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt damit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= -1. \end{aligned}$$

Damit wurden zwei Folgen x_n und x'_n gefunden, die beide gegen Null konvergieren, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren. Somit hat $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert.

Aufgabe 3. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die beide eine Nullstelle bei $\hat{x}$ haben, d.h.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= 0 \\ g(\hat{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Sei $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = f(x)g(x).$$

- Zeigen Sie, dass h eine mindestens doppelte Nullstelle bei $\hat{x}$ hat, d.h.

$$\begin{aligned} h(\hat{x}) &= 0 \text{ und} \\ h'(\hat{x}) &= 0. \end{aligned}$$

- Wenn $\hat{x}$ sogar eine doppelte Nullstelle von f oder von g ist, kann man dann schließen, dass $\hat{x}$ eine mindestens dreifache Nullstelle von h ist?

Lösung von Aufgabe 3.

- Da $f(\hat{x}) = 0$ ist, folgt $h(\hat{x}) = 0$. Für die Ableitung von $h(x)$ gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ h'(\hat{x}) &= f'(\hat{x})g(\hat{x}) + f(\hat{x})g'(\hat{x}). \end{aligned}$$

  Da $g(\hat{x}) = 0$ und $f(\hat{x}) = 0$ folgt somit $h'(\hat{x}) = 0$.

- Die zweite Ableitung von h ist

$$h''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).$$

  Da $f(\hat{x}) = 0$ und $g(\hat{x}) = 0$ folgt

$$h''(\hat{x}) = 2f'(\hat{x})g'(\hat{x}).$$

  Wenn $\hat{x}$ nun eine doppelte Nullstelle von f oder von g ist, dann ist $f'(\hat{x}) = 0$ oder $g'(\hat{x}) = 0$ und damit ist $h''(\hat{x}) = 0$, d.h. $\hat{x}$ ist mindestens eine dreifache Nullstelle von h.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 3 von $f(x) = \tan(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[0, \pi/4]$. Hinweis:

- $\tan(\pi/4) = 1$
- $f''''(x)$ ist monoton steigend im Intervall $[0, \pi/4]$.

Lösung von Aufgabe 4. Ableitungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan(x) \\
f'(x) &= 1+\tan^2(x) \\
f''(x) &= 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) \\
&= 2\tan^3(x)+2\tan(x) \\
f'''(x) &= 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x))+2(1+\tan^2(x)) \\
&= 6\tan^4(x)+8\tan^2(x)+2 \\
f''''(x) &= 24\tan^3(x)(1+\tan^2(x))+16\tan(x)(1+\tan^2(x)) \\
&= 24\tan^5(x)+40\tan^3(x)+16\tan(x).
\end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x}=0$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 0 \\
f'''(0) &= 2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
p(x) &= x+\frac{2}{3!}x^3 \\
&= x+\frac{1}{3}x^3.
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung.

$$\frac{1}{4!}f''''(\xi)x^4.$$

Da $f''''(x)$ monoton steigend ist in $[0,\pi/4]$ ist

$$\begin{aligned}
\max_{0\le\xi\le\pi/4}|f''''(\xi)| &= |f''''(\pi/4)| \\
&= 24\tan^5(\pi/4)+40\tan^3(\pi/4)+16\tan(\pi/4) \\
&= 24+40+16 \\
&= 80.
\end{aligned}$$

Der Fehler zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[0,\pi/4]$ ist daher beschränkt durch

$$\begin{aligned}
\max_{0\le\xi\le\pi/4}|f''''(\xi)|\frac{(\pi/4)^4}{4!} &= \frac{80\pi^4}{4^4\,4!} \\
&\approx 1.27.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = \cos(xe^{x-y})$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= -\sin(xe^{x-y})(e^{x-y} + xe^{x-y}) \\
&= -\sin(xe^{x-y})e^{x-y}(1+x) \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= -\sin(xe^{x-y})xe^{x-y}(-1) \\
&= \sin(xe^{x-y})xe^{x-y}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Ein See enthält zu jedem Zeitpunkt t die Wassermenge $q(t)$ Liter, wobei die Funktion $q(t)$ bekannt ist. Der See hat einen Zufluss aber keinen Abfluss.

- Wie viele Liter Wasser fließen in den See im Intervall $[t, t + \Delta t]$?
- Die Stromstärke im Zufluss wird in Liter pro Sekunde gemessen. Wie kann die Stromstärke in Abhängigkeit von $q(t)$ berechnet werden?
- Es ist viel einfacher, die Stromstärke $i(t)$ zu messen statt $q(t)$. Kann $q(t)$ aus $i(t)$ berechnet werden?
- Stellen Sie eine möglichst einfache Formel zur Berechnung von $q(t)$ in Abhängigkeit von $i(t)$ auf wenn zusätzlich bekannt ist, dass $q(0) =$ 100 Liter.
- Berechnen Sie $q(t)$ wenn $q(0) = 100$ Liter und $i(t) = 1 + \sin(t)$ Liter pro Sekunde.

Lösung von Aufgabe 6.

- Im Intervall $[t, t + \Delta t]$ fließen

  $$q(t + \Delta t) - q(t)$$

  Liter den See.
- Für die Stromstärke gilt

  $$\begin{aligned}
  i(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \\
  &= q'(t).
  \end{aligned}$$

- $q(t)$ ist eine Stammfunktion von $i(t)$, d.h.

  $$q(t) = \int i(t) dt.$$

  Ohne Startwert ist jedoch nicht klar, welche Stammfunktion genommen werden muss.
- Wenn zusätzlich $q(0) = 100$ gilt, kann man $q(t)$ berechnen durch

  $$\begin{aligned}
  q(t) &= \int_0^t i(\tau) d\tau + C \\
  q(0) &= \int_0^0 i(\tau) d\tau + C \\
  &= C = 100.
  \end{aligned}$$

und damit

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau + 100.$$

- Für $i(t) = 1 + \sin(t)$ ist somit

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t (1+\sin(\tau))d\tau + 100 \\ &= [\tau - \cos(\tau)]_0^t + 100 \\ &= t - \cos(t) + cos(0) + 100 \\ &= t - \cos(t) + 101. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \sqrt{|x|}.$$

Lösung von Aufgabe 7.

- Für $x \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ &= x^{1/2} \\ F(x) &= \frac{1}{3/2} x^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}. \end{aligned}$$

- Für $x < 0$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x} \\ &= (-x)^{1/2} \\ F(x) &= -\frac{1}{3/2}(-x)^{3/2} \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3} \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ ist somit

$$F(x) = \operatorname{sign}(x)\frac{2}{3}\sqrt{|x|^3}.$$

Aufgabe 8. Sei f eine T-periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t.$$

Sei weiterhin

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$g(t) \quad = \quad \int_0^t f(\tau)d\tau$$

eine T-periodische Funktion ist, d.h.

$$g(t+T) \quad = \quad g(t) \text{ für alle } t.$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} g(t+T) &= \int_0^{t+T} f(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^T f(\tau)d\tau}_{=0} + \int_T^{t+T} f(\tau)d\tau \\ &= \int_T^{t+T} f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Um die Grenzen des Integrals um T nach unten zu verschieben, wird substituiert:

$$u = \tau - T, \quad d\tau = du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(t+T) &= \int_0^t f(u+T)du \\ &= \int_0^t f(u)du \qquad \text{da } f \text{ eine } T\text{-periodische Funktion ist} \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^t \cos(u)e^u du.$$

Hinweis: Stellen Sie die Cosinus Funktion als Realteil der komplexen e-Funktion dar und verwenden Sie die Rechengesetze der e-Funktion. Das Ergebnis muss aber reell sein.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \cos(u)e^u du &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{re} e^{ju} e^u du \\
&= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{re} e^{ju} e^u du \\
&= \mathrm{re}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{ju} e^u du\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{(1+j)u} du\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1}{1+j}\left[e^{(1+j)u}\right]_{-\infty}^{t}\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1}{1+j}\left[e^u(\cos(u) + j\sin(u)\right]_{-\infty}^{t}\right) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1}{1+j} e^t(\cos(t) + j\sin(t)\right) \\
&= e^t \mathrm{re}\left(\frac{1-j}{2}(\cos(t) + j\sin(t)\right) \\
&= \frac{1}{2} e^t(\cos(t) + \sin(t)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Lösung von Aufgabe 10. Sei $z = re^{j\varphi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
z\overline{z} &= re^{j\varphi}\overline{re^{j\varphi}} \\
&= re^{j\varphi}re^{-j\varphi} \\
&= r^2 e^{j(\varphi-\varphi)} \\
&= r^2 e^0 \\
&= r^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{jx}$. Berechnen Sie

$$\int \mathrm{im}(f(x))dx \quad \text{und} \quad \mathrm{im}\left(\int f(x)dx\right).$$

Die komplexe Zahl j dürfen Sie hierbei gleich behandeln wie eine reelle Konstante. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{re}(f(x))dx &= \mathrm{re}\left(\int f(x)dx\right) \\
\int \mathrm{im}(f(x))dx &= \mathrm{im}\left(\int f(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{jx}$.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{im}(f(x))dx &= \int \sin(x)dx \\
&= -\cos(x) + C \\
\mathrm{im}\left(\int f(x)dx\right) &= \mathrm{im}\left(\int e^{jx}dx\right) \\
&= \mathrm{im}\left(\frac{1}{j}e^{jx}dx\right) \\
&= -\mathrm{im}\left(j(\cos(x) + j\sin(x))\right) + C \\
&= -\cos(x) + C.
\end{aligned}$$

Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sei $f_{\mathrm{re}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{\mathrm{im}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Realteil und Imaginärteil von f, d.h.

$$f(x) = f_{\mathrm{re}}(x) + jf_{\mathrm{im}}(x).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int (f_{\mathrm{re}}(x) + jf_{\mathrm{im}}(x))dx \\
&= \int f_{\mathrm{re}}(x)dx + j\int f_{\mathrm{im}}(x)dx.
\end{aligned}$$

Nimmt man den Real- bzw. Imaginärteil auf beiden Seiten, erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}\left(\int f(x)dx\right) &= \int f_{\mathrm{re}}(x)dx \\
&= \int \mathrm{re}(f(x))dx \\
\mathrm{im}\left(\int f(x)dx\right) &= \int f_{\mathrm{im}}(x)dx \\
&= \int \mathrm{im}(f(x))dx.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil aller Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = 3z^2 - z + 1.$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6} \\
&= \frac{1 \pm j\sqrt{11}}{6}.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{6} + j\frac{\sqrt{11}}{6} \\
z_2 &= \frac{1}{6} - j\frac{\sqrt{11}}{6}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}^2$ und $g \in \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y, x-y) \\ g(x,y) &= y + jx \end{aligned}$$

Von wo nach wo bildet die Funktion $g \circ f$ ab? Berechnen Sie einen Term für die Funktion $g \circ f$.

Lösung von Aufgabe 13. Für die Funktion $g \circ f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g(x+y, x-y) \\ &= x - y + j(x+y). \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$z\overline{z} - z^2 = 1.$$

Lösung von Aufgabe 14. Sei

$$z = a + jb.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= a^2 + b^2 \\ z^2 &= a^2 - b^2 + j(2ab). \end{aligned}$$

Die Gleichung ist damit

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - j(2ab) &= 1 \\ 2b^2 - j(2ab) &= 1. \end{aligned}$$

Für Real- und Imaginärteil gilt somit

$$\begin{aligned} 2b^2 &= 1 \\ -2ab &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$b = \pm\sqrt{1/2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $a = 0$. Die Gleichung hat folglich zwei Lösungen

$$z = \pm\frac{j}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 15. Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl mit kartesischen Koordinaten a, b und Polarkoordinaten r, φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für a, b so dass

$$\varphi = \arcsin({}^{b}\!/_{r}).$$

Lösung von Aufgabe 15. Da $z \neq 0$ gilt $r \neq 0$ und damit

$$\sin(\varphi) \quad = \quad {}^{b}\!/_{r}.$$

Weiter ist

$$\arcsin(\sin(\varphi)) \quad = \quad \varphi$$

genau dann wenn

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Für genau diese Winkel gilt daher

$$\varphi \quad = \quad \arcsin({}^{b}\!/_{r}).$$

Weiterhin gilt $-{}^{\pi}\!/_{2} \leq \varphi \leq {}^{\pi}\!/_{2}$ genau dann wenn $a \geq 0$.
Somit gilt

$$\varphi = \arcsin({}^{b}\!/_{r}) \quad \text{genau dann wenn} \quad a \geq 0.$$

Aufgabe 16. Sei

$$z \quad = \quad re^{j\varphi} \; \neq \; 0.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$z^j \quad = \quad e^{-\varphi}(\cos(\ln(r)) + j\sin(\ln(r))).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Rechengesetze der e-Funktion und die Gleichheit

$$r \quad = \quad e^{\ln(r)} \text{ für } r > 0.$$

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned}
z^j &= \left(re^{j\varphi}\right)^j \\
&= r^j \left(e^{j\varphi}\right)^j \\
&= \left(e^{\ln(r)}\right)^j e^{-\varphi} \\
&= e^{j\ln(r)} e^{-\varphi} \\
&= e^{-\varphi}(\cos(\ln(r)) + j\sin(\ln(r))).
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie für beliebige Konstanten a, ω

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt.$$

Hinweis: Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Sie brauchen hierfür die Gesetze der komplexen Zahlen, insbesondere

$$\begin{aligned}
z - \overline{z} &= 2j\mathrm{im}(z) \\
\mathrm{im}(e^{j\varphi}) &= \sin(\varphi).
\end{aligned}$$

Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $\omega = 0$. Verwenden Sie die si-Funktion, die definiert ist durch

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Das Ergebnis ist dann $2a\mathrm{si}(\omega a)$.

Lösung von Aufgabe 17. Der Spezialfall $\omega = 0$ wird separat betrachtet, da im folgenden Rechenweg durch ω dividiert wird.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} \left[e^{j\omega t} \right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} \right). \end{aligned}$$

Da $e^{j\omega a}$ und $e^{-j\omega a}$ konjugiert komplex sind, ist

$$\begin{aligned} e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} &= 2j\mathrm{im}(e^{j\omega a}) \\ &= 2j\sin(\omega a). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} 2j\sin(\omega a) \\ &= \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) \\ &= 2a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a} \\ &= 2a\mathrm{si}(\omega a). \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \int_{-a}^{a} 1 dt \\ &= 2a \\ &= 2a\mathrm{si}(\omega a). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt = 2a\mathrm{si}(\omega a)$$

für alle a, ω.

Aufgabe 18. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 = (1+j)^2.$$

Lösung von Aufgabe 18. Umformen in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} (1+j)^2 &= \left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^2 \\ &= 2e^{j\pi/2} \\ z^5 &= \left(re^{j\varphi}\right)^5 \\ &= r^5 e^{j5\varphi}. \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} r^5 e^{j5\varphi} &= 2e^{j\pi/2} \\ r &= \sqrt[5]{2} \\ 5\varphi &= \pi/2 + 2\pi k \\ \varphi &= \frac{\pi}{10} + 2\pi\frac{k}{5}, \qquad k = 0,1,2,3,4. \end{aligned}$$

Lösungen

$$z = \sqrt[5]{2}\, e^{j(\pi/10 + 2\pi k/5)}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$z = \left(\frac{1+j}{e^{j\pi/4}(1-j)}\right)^4.$$

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned} \frac{1+j}{e^{j\pi/4}(1-j)} &= \frac{\sqrt{2}e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} \\ &= e^{j\pi/4} \\ \left(e^{j\pi/4}\right)^4 &= e^{j\pi} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(z) &= -1 \\ \mathrm{im}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$(z+1)^4 = 1.$$

Stellen Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten dar.

Lösung von Aufgabe 20. Substitution $z + 1 = u$.

$$u^4 = 1$$

Mit $u = re^{j\varphi}$ folgt

$$\begin{aligned} r^4 e^{j4\varphi} &= e^{2\pi jk}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ r &= 1 \\ \varphi &= k\pi/2, \quad k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

Lösungen für u sind somit

$$1, j, -1, -j.$$

Mit $z = u - 1$ erhält man

$$\mathbb{L} = \{0, -1+j, -2, -1-j\}.$$