Heilbronn, den 11.6.2026 Prof. Dr. V. Stahl SS 26

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 13

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$1000^x - 2 * 100^x = 3 * 10^x.$$

Lösung von Aufgabe 1. Mit den Potenzrechengesetzen gilt

$$\begin{aligned} 1000^x &= (10^3)^x \\ &= 10^{3x} \\ &= (10^x)^3. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = 10^x$ erhält man somit

$$\begin{aligned} 1000^x &= u^3 \\ 100^x &= u^2 \end{aligned}$$

und damit die Gleichung

$$u^3 - 2u^2 = 3u.$$

Da $u \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ kann man beide Seiten durch u teilen und erhält

$$\begin{aligned} u^2 - 2u &= 3 \\ u^2 - 2u - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel erhält man

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \\ &= 1 \pm 2. \end{aligned}$$

Für $u_1 = -1$ existiert kein x mit $10^x = u$. Für $u_2 = 3$ erhält man

$$x = \log_{10}(3).$$

Aufgabe 2. Sei $f \in (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x, y) = \left(\frac{5}{x^3}, 3 \right)$$

Berechnen Sie einen Term für die Komposition $f \circ f$ und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}
f(f(x,y)) &= f\left(\frac{5}{x^3}, 3\right) \\
&= \left(\frac{5}{(5/x^3)^3}, 3\right) \\
&= \left(\frac{5}{5^3/x^9}, 3\right) \\
&= \left(\frac{x^9}{25}, 3\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ungerade wenn

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive, ungerade Funktion. Zeigen Sie dass dann auch f^{-1} ungerade ist.

Hinweis: Sie müssen zeigen, dass für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y).$$

Beginnen Sie mit der Annahme

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da f bijektiv ist, gilt dies insbesondere auch für $x = f^{-1}(y)$, d.h. Sie können auf beiden Seiten x durch $f^{-1}(y)$ ersetzen. Danach muss man nur noch umformen.

Lösung von Aufgabe 3. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

Annahme:

$$f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x = f^{-1}(y)$ folgt hieraus

$$f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y)).$$

Da f^{-1} Umkehrfunktion von f ist,folgt hieraus

$$f(-f^{-1}(y)) = -y.$$

Anwenden von f^{-1} auf beiden Seiten ergibt

$$-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y).$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sqrt{|\cos(x)|}$$

keinen Grenzwert für $x \to \infty$ hat.

Lösung von Aufgabe 4. Sei

$$\begin{aligned} x_n &= 2\pi n \\ x'_n &= 2\pi n + \pi/2. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = \infty$$

aber

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{|\cos(x_n)|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{|1|} \\ &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{|\cos(x'_n)|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{|0|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Aufgabe 5. Definieren Sie eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $\hat{x} = 2$ stetig ist, dort aber nicht differenzierbar ist. Zeichnen Sie eine Skizze dieser Funktion in der Nähe von $\hat{x}$.

Lösung von Aufgabe 5. $f(x) = |x - 2|$.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f' \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = ax^{a-1}.$$

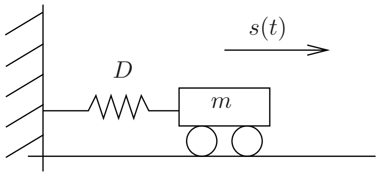
Sie dürfen hierbei die Ketteneregel verwenden und die Ableitung der e- und der ln-Funktion. Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a\ln(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned} \left(e^{a\ln(x)}\right)' &= e^{a\ln(x)}(a\ln(x))' \\ &= x^a\, a\, \frac{1}{x} \\ &= ax^a\, x^{-1} \\ &= ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. In nachfolgendem Bild ist ein Wagen der Masse m an einer Federung mit Federkonstante D befestigt und kann sich reibungsfrei horizontal bewegen. Die Position des Wagens zum Zeitpunkt t sei $s(t)$.



Auf den Wagen wirkt somit nur die Federkraft

$$F_D(t) \quad = \quad -Ds(t).$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass diese Kraft nach links zieht, wenn $s(t)$ positiv ist.

Nach dem Trägheitsgesetz ist die Summe aller Kräfte auf einen Körper gleich Masse mal Beschleunigung. Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} -Ds(t) &= ma(t) \\ ma(t) + Ds(t) &= 0 \\ ms''(t) + Ds(t) &= 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Beschleunigung gleich der zweiten zeitlichen Ableitung der Position ist. Eine Gleichung dieser Form heißt Differentialgleichung. Gesucht ist die Funktion $s(t)$.

Anschaulich ist klar, dass der Wagen eine Schwingung ausführen muss, d.h. die Funktion $s(t)$ hat die Form

$$s(t) \quad = \quad a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t).$$

Berechnen Sie damit $s''(t)$ und setzen Sie $s(t)$ und $s''(t)$ in die Differentialgleichung ein. Da die rechte Seite Null ist, müssen die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen Null sein und Sie erhalten somit zwei Gleichungen.

Berechnen Sie hieraus die Kreisfrequenz ω der Schwingung. Verifizieren Sie, dass eine harte Federung und eine geringere Masse zu einer schnelleren Schwingung führt.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned} s'(t) &= a\omega\cos(\omega t) - b\omega\sin(\omega t) \\ s''(t) &= -a\omega^2\sin(\omega t) - b\omega^2\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} ms''(t) + Ds(t) &= 0 \\ -ma\omega^2\sin(\omega t) - mb\omega^2\cos(\omega t) + Da\sin(\omega t) + Db\cos(\omega t) &= 0. \\ \sin(\omega t)(-ma\omega^2 + Da) + \cos(\omega t)(-mb\omega^2 + Db) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -ma\omega^2 + Da &= 0 \\ -mb\omega^2 + Db &= 0 \end{aligned}$$

Wenn der Wagen nicht in Ruhe ist, sind nicht sowohl a als auch b Null und es folgt

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + D &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{D}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}. \end{aligned}$$

Da D im Zähler steht und m im Nenner, führt ein größeres D und ein kleineres m zu einer höheren Kreisfrequenz ω.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu der Funktion

$$f(x) = \sin(x)e^x$$

und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind. Hinweis: Wenn man $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Einheitskreis einzeichnet, erkennt man dass

$$\sin(x) = -\cos(x) \quad \text{für } x = {}^{3\pi}/_4 \text{ und } x = -{}^{\pi}/_4.$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)e^x \\ f'(x) &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x \\ &= (\sin(x) + \cos(x))e^x \\ f''(x) &= (\cos(x) - \sin(x))e^x + (\sin(x) + \cos(x))e^x \\ &= 2\cos(x)e^x. \end{aligned}$$

Nullstellen der ersten Ableitung hat man für

$$\begin{aligned} x &= {}^{3\pi}/_4 + k2\pi \\ x &= -{}^{\pi}/_4 + k2\pi \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Ableitung ist im ersten Fall negativ, im zweiten Fall positiv. Daher hat $f(x)$ ein lokales Maximum für

$$x = {}^{3\pi}/_4 + k2\pi$$

und ein lokales Minimum für

$$x = -{}^{\pi}/_4 + k2\pi$$

Aufgabe 9. Ein Taylor Polynom ist eine Approximation an eine Funktion f in der Nähe des Entwicklungspunktes $\hat{x}$. Es stellt sich natürlich die Frage, wie gut diese Approximation im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ ist.

Allgemein lässt sich zeigen, dass es für jedes x einen Wert ξ zwischen $\hat{x}$ und x gibt so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x-\hat{x})^i}_{\text{Taylor Polynom } p(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\hat{x})^{n+1}}_{\text{Restglied}}.$$

Der Approximationsfehler des Taylor Polynoms vom Grad n an einer beliebigen Stelle $x \in [\hat{x}, x_{\max}]$ ist damit garantiert nicht größer als

$$m\frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

wobei

$$m = \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|.$$

- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom von $f(x) = \cos(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 3$ mit Grad n. Berechnen Sie mit o.g. Formel eine Obergrenze für den Approximationsfehler des Taylor Polynoms im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 10$ für beliebiges n, für $n = 10$ und für $n = 20$.
- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom vom Grad 3 von $f(x) = \sqrt{x}$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Berechnen Sie eine Obergrenze für den Approximationsfehler von $p(x)$ im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 3$.

Lösung von Aufgabe 9.

- Da die Ableitungen der Cosinus Funktion immer zwischen 1 und -1 liegen, gilt
$$m = \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| = 1.$$
Damit erhält man die Obergrenze für den Approximationsfehler
$$\frac{1}{(n+1)!}7^{n+1}.$$
Für $n = 10$ erhält man den Wert 49.5, für $n = 20$ den Wert 0.01.
- Die Ableitungen der Wurzel Funktion sind wie folgt.
$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} \\ f''''(x) &= -\frac{15}{16}x^{-7/2} \end{aligned}$$
Im Intervall $[1, 3]$ ist die vierte Ableitung im Betrag maximal
$$m = \frac{15}{16}.$$

Damit ist eine Obergrenze für den Approximationsfehler

$$\frac{15}{16}\frac{2^4}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Aufgabe 10. Sei

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \sinh(x).\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ für $x \geq 0$ monoton steigend sind.
- Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 3 der sinh-Funktion zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$.
- Berechnen Sie eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $\sinh(x)$ für $x \in [0, 2]$.
- Zeigen Sie, dass für alle x gilt

$$\begin{aligned}|\sinh(x)| &\leq e^{|x|}\\ |\cosh(x)| &\leq e^{|x|}.\end{aligned}$$

- Sei $p_n(x)$ das Taylor Polynom vom Grad n für $\sinh(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) - \sinh(x) = 0$$

  für alle x. Man erhält somit beliebig genaue Approximationen an die sinh-Funktion, wenn man den Grad des Taylor Polynoms groß genug macht.

Lösung von Aufgabe 10.

-

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x})\\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x})\\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ &= \sinh(x).\end{aligned}$$

- Taylor Polynom.

$$\begin{aligned} \sinh(0) &= 0 \\ \sinh'(0) &= \cosh(0) = 1 \\ \sinh''(0) &= \sinh(0) = 0 \\ \sinh'''(0) &= \cosh(0) = 1. \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom der sinh-Funktion vom Grad 3 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$

$$\begin{aligned} p(x) &= \sinh(0) + \sinh'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}\sinh''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\sinh'''(0)(x-0)^3 \\ &= x + \frac{1}{3!}x^3. \end{aligned}$$

- Zu zeigen: Für $x \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} \sinh'(x) &\geq 0 \\ \cosh'(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die e-Funktion ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. Sei $x \geq 0$. Dann ist $x \geq -x$ und folglich

$$\begin{aligned} e^x &\geq e^{-x} \qquad \text{und} \\ e^x \pm e^{-x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \cosh(x) &\geq 0 \\ \sinh(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \sinh'(x) &\geq 0 \\ \cosh'(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

- Der Abstand zwischen Taylor Polynom und Funktion ist begrenzt durch

$$\max_{\xi\in[0,2]} |\sinh''''(\xi)| \frac{(2-0)^4}{4!} = \max_{\xi\in[0,2]} |\sinh(\xi)| \frac{(2-0)^4}{4!}.$$

Da $\sinh(x)$ im Intervall $[0,2]$ monoton steigend ist, folgt

$$\max_{\xi\in[0,2]} |\sinh''''(\xi)| = \sinh(2).$$

Der Fehler ist somit begrenzt durch

$$\begin{aligned} \sinh(2)\frac{16}{24} &= \frac{e^2 - e^{-2}}{3} \\ &\approx 2.42 \end{aligned}$$

Da das Taylor Polynom für $n = 3$ und $n = 4$ gleich ist, erhielte man sogar die bessere Grenze

$$\begin{aligned}\max_{\xi\in[0,2]} |\sinh'''''(\xi)|\frac{(2-0)^5}{5!} &= \cosh(2)\frac{32}{120} \\ &= (e^2+e^{-2})\frac{2}{15} \\ &\approx 1.\end{aligned}$$

- Da die e-Funktion monoton steigend ist, gilt

$$e^{|x|} \geq e^x.$$

Weiterhin gilt $e^x > 0$ für alle x. Damit ist

$$\begin{aligned}|\sinh(x)| &= \frac{|e^x - e^{-x}|}{2} \\ &\leq \frac{|e^x| + |e^{-x}|}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\leq \frac{e^{|x|} + e^{|x|}}{2} \\ &= e^{|x|} \\ |\cosh(x)| &= \frac{|e^x + e^{-x}|}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\leq \frac{e^{|x|} + e^{|x|}}{2} \\ &= e^{|x|}.\end{aligned}$$

- Der Fehler zwischen Taylor Polynom vom Grad n und sinh-Funktion an der Stelle x ist damit begrenzt durch

$$\begin{aligned}\max_{\xi\in[0,x]} |\sinh^{(n+1)}(\xi)|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &\leq \max_{\xi\in[0,x]} e^{|\xi|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Da die Fakultätsfunktion schneller wächst als die Potenzfunktion, geht der Fehler für beliebiges x gegen Null wenn n gegen unendlich geht.

Aufgabe 11. Ein See enthält zu jedem Zeitpunkt t die Wassermenge $q(t)$ Liter, wobei die Funktion $q(t)$ bekannt ist. Der See hat einen Zufluss aber keinen Abfluss.

- Wie viele Liter Wasser fließen in den See im Intervall $[t, t + \Delta t]$?
- Die Stromstärke im Zufluss wird in Liter pro Sekunde gemessen. Wie kann die Stromstärke in Abhängigkeit von $q(t)$ berechnet werden?

- Es ist viel einfacher, die Stromstärke $i(t)$ zu messen statt $q(t)$. Kann $q(t)$ aus $i(t)$ berechnet werden?
- Stellen Sie eine möglichst einfache Formel zur Berechnung von $q(t)$ in Abhängigkeit von $i(t)$ auf wenn zusätzlich bekannt ist, dass $q(0) =$ 100 Liter.
- Berechnen Sie $q(t)$ wenn $q(0) = 100$ Liter und $i(t) = 1 + \sin(t)$ Liter pro Sekunde.

Lösung von Aufgabe 11.

- Im Intervall $[t, t + \Delta t]$ fließen
$$q(t + \Delta t) - q(t)$$
Liter den See.
- Für die Stromstärke gilt
$$\begin{aligned} i(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \\ &= q'(t). \end{aligned}$$
- $q(t)$ ist eine Stammfunktion von $i(t)$, d.h.
$$q(t) = \int i(t) dt.$$
Ohne Startwert ist jedoch nicht klar, welche Stammfunktion genommen werden muss.
- Wenn zusätzlich $q(0) = 100$ gilt, kann man $q(t)$ berechnen durch
$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t i(\tau) d\tau + C \\ q(0) &= \int_0^0 i(\tau) d\tau + C \\ &= C = 100. \end{aligned}$$
und damit
$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau + 100.$$
- Für $i(t) = 1 + \sin(t)$ ist somit
$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t (1 + \sin(\tau)) d\tau + 100 \\ &= [\tau - \cos(\tau)]_0^t + 100 \\ &= t - \cos(t) + cos(0) + 100 \\ &= t - \cos(t) + 101. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$g(x) = \int_0^x f(u)du.$$

Zeigen Sie, dass g eine Stammfunktion von f ist und dass $g(0) = 0$ gilt.

Lösung von Aufgabe 12. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(u)du \\ &= [F(u)]_0^x \\ &= F(x) - F(0), \end{aligned}$$

d.h. $g(x)$ und $F(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante $F(0)$. Damit ist $g(x)$ genau wie $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Aus

$$g(x) = F(x) - F(0)$$

folgt

$$g(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = 1 - \overline{z}.$$

Lösung von Aufgabe 13. Sei $z = a + jb$. Umformen der Gleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} (a + jb)^2 &= 1 - (a - jb) \\ a^2 + 2jab - b^2 &= 1 - a + jb \\ a^2 + a - 1 - b^2 + j(2ab - b) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung muss für Real- und Imaginärteil erfüllt sein. Folglich erhält man zwei reelle Gleichungen:

$$\begin{aligned} a^2 + a - 1 - b^2 &= 0 \\ 2ab - b &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt falls $b = 0$ oder $a = 1/2$.

- Fall $b = 0$. Die erste Gleichung ist erfüllt falls

$$\begin{aligned} a^2 + a - 1 &= 0 \\ a_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

- Fall $a = 1/2$. Die erste Gleichung ist erfüllt falls

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 &= b^2 \\ -\frac{1}{4} &= b^2. \end{aligned}$$

  Da b reell ist, hat diese Gleichung keine Lösung.

Die Gleichung hat somit nur die beiden reellen Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(jz) &= -\mathrm{im}(z) \\ \mathrm{im}(jz) &= \mathrm{re}(z) \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 14. Sei

$$z = a + jb.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(jz) &= \mathrm{re}(j(a+jb)) \\ &= \mathrm{re}(ja - b) \\ &= -b \\ &= -\mathrm{im}(z) \\ \mathrm{im}(jz) &= \mathrm{im}(j(a+jb)) \\ &= \mathrm{im}(ja - b) \\ &= a \\ &= \mathrm{re}(z). \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$z = \frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1+j)}.$$

Berechnen Sie $|z|$ in Abhängigkeit von x.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1+j)} \right| \\ &= \frac{|e^{j(x+1)}|}{|e^x(1+j)|} \\ &= \frac{1}{|e^x|\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{e^x\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Begründen Sie, weshalb

$$\lim_{x\to\infty} e^{(-1+j)x} = 0.$$

Berechnen Sie dann

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx.$$

Hinweis: Stellen Sie die cos-Funktion als Realteil einer komplexen e-Funktion dar.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned} e^{(-1+j)x} &= e^{-x}e^{jx} \\ &= e^{-x}\cos(x) + je^{-x}\sin(x) \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

und die sin- und cos-Funktion beschränkt sind, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos(x) &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{x\to\infty} e^{(-1+j)x} = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx &= \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{re}\big(e^{jx}\big)dx \\ &= \int_0^\infty \mathrm{re}\big(e^{-x}e^{jx}dx\big) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{re}\Big(e^{(-1+j)x}dx\Big) \\ &= \mathrm{re}\left(\int_0^\infty e^{(-1+j)x}dx\right) \\ &= \mathrm{re}\left(\left[\frac{1}{-1+j}e^{(-1+j)x}\right]_0^\infty\right) \\ &= \mathrm{re}\left(\frac{-1-j}{2}\left[e^{(-1+j)x}\right]_0^\infty\right) \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{re}((1+j)(0-1)) \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{re}((-1-j)) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Definieren Sie den Begriff

"x ist k-fache Nullstelle der Funktion f".

Lösung von Aufgabe 17. x ist k-fache Nullstelle von f wenn gilt

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ f'(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f^{(k-1)}(x) & = & 0 \quad \text{und} \\ f^{(k)}(x) & \neq & 0. \end{array}$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie die Polynomdivision

$$(x^3 + x + 1) \;:\; (2x^2 + 1).$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\frac{x^3 + x + 1}{2x^2 + 1} \quad = \quad \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}x + 1}{2x^2 + 1}.$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x^4 - 1}$$

Lösung von Aufgabe 19. Nullstellen des Nenners:

$$\begin{array}{rcl} x^4 - 1 & = & 0 \\ x^4 & = & 1 \end{array}$$

hat Lösungen $\pm 1, \pm j$.

Ansatz der PBZ:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x-j)(x+j)} \quad = \quad \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+1} + \frac{c_3}{x-j} + \frac{c_4}{x+j}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & c_1(x+1)(x-j)(x+j) + c_2(x-1)(x-j)(x+j) \\ & + & c_3(x-1)(x+1)(x+j) + c_4(x-1)(x+1)(x-j). \end{array}$$

Spezialfall $x = 1$ ergibt

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 2c_1(1-j)(1+j) \quad = \quad 4c_1 \\ c_1 & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

Spezialfall $x = -1$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= -2c_2(-1-j)(-1+j) &= -4c_2 \\ c_2 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Spezialfall $x = j$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= 2jc_3(j-1)(j+1) &= -4j \\ c_3 &= -\frac{1}{4j} &= \frac{j}{4} \\ c_4 &= \overline{c_3} &= -\frac{j}{4}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$f(x) = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{j/4}{x-j} + \frac{-j/4}{x+j}.$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2x^2 - 8x - 8}{(x^2+4)^2}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Konstanten, die man leicht durch Spezialfälle bekommt und setzen Sie diese ein. Die restlichen Konstanten erhält man dann sehr einfach.

Lösung von Aufgabe 20. Faktorisierung des Nenners.

$$(x^2+4)^2 = \left((x-2j)(x+2j)\right)^2 = (x-2j)^2(x+2j)^2.$$

Damit ist

$$\frac{2x^2 - 8x - 8}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 8}{(x-2j)^2(x+2j)^2}.$$

Ansatz der Partialbruchzerlegung.

$$\frac{2x^2 - 8x - 8}{(x-2j)^2(x+2j)^2} = \frac{c_1}{x-2j} + \frac{c_2}{(x-2j)^2} + \frac{c_3}{x+2j} + \frac{c_4}{(x+2j)^2}$$

Multiplikation mit dem Nenner.

$$\begin{aligned} &2x^2 - 8x - 8 \\ &= c_1(x-2j)(x+2j)^2 + c_2(x+2j)^2 + c_3(x-2j)^2(x+2j) + c_4(x-2j)^2 \end{aligned}$$

- Spezialfall $x = 2j$.

$$\begin{aligned} -16 - 16j &= c_2(4j)^2 \\ -16 - 16j &= -16c_2 \\ c_2 &= 1 + j \end{aligned}$$

- Spezialfall $x = -2j$.

$$\begin{aligned} -16 + 16j &= c4(-4j)^2 \\ -16 + 16j &= -16c_4 \\ c_4 &= 1 - j \end{aligned}$$

Einsetzen von c_2 und c_4.

$$\begin{aligned} c_2(x+2j)^2 + c_4(x-2j)^2 &= (1+j)(x+2j)^2 + (1-j)(x-2j)^2 \\ &= 2\mathrm{re}\big((1+j)(x+2j)^2\big) \\ &= 2\mathrm{re}\big((1+j)(x^2+4jx-4)\big) \\ &= 2\big(x^2-4-4x\big) \\ &= 2x^2-8x-8. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &2x^2-8x-8 \\ &= c_1(x-2j)(x+2j)^2 + c_3(x-2j)^2(x+2j) + 2x^2 - 8x - 8 \\ 0 &= c_1(x^2+4)(x+2j) + c_3(x^2+4)(x-2j). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$c_1 = c_3 = 0.$$

Die Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{2x^2-8x-8}{(x^2+4)^2} = \frac{1+j}{(x-2j)^2} + \frac{1-j}{(x+2j)^2}.$$

Aufgabe 21. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}.$$

Lösung von Aufgabe 21. Faktorisierung des Nenners.

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)^2} &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} \\ x &= c_1(x-1) + c_2 \\ x &= c_1x + c_2 - c_1 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \\ F(x) &= \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$