

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 14

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ haben.

Lösung von Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{n} \\x'_n &= -\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(x_n) &= 1 \\f(x'_n) &= -1.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt damit

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) &= -1.\end{aligned}$$

Damit wurden zwei Folgen x_n und x'_n gefunden, die beide gegen Null konvergieren, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren. Somit hat $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int \cos^4(x) \tan(x) dx.$$

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x) \tan(x) dx &= \int \cos^4(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= \int \cos^3(x) \sin(x) dx.\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}g &= \cos(x) \\ \frac{dg}{dx} &= -\sin(x) \\ dx &= -\frac{1}{\sin(x)} dg\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x) \sin(x) dx &= \int g^3 \sin(x) \left(-\frac{1}{\sin(x)} \right) dg \\ &= -\int g^3 dg \\ &= -\frac{1}{4}g^4 + C \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4(x) + C.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Überlegen Sie sich, wie die Funktion

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

für sehr große Werte von ω aussieht. Überlegen Sie sich dann anschaulich, wie groß das bestimmte Integral von $f(t)$ zwischen $t = a \dots b$ und sehr großes ω ist. Berechnen Sie dann

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(\omega t) dt.$$

Lösung von Aufgabe 3. Die Funktion $f(t) = \cos(\omega t)$ ist eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω . Wenn ω sehr groß ist, oszilliert die Schwingung sehr schnell. Zwischen a und b durchläuft eine hochfrequente Schwingung viele Perioden. Die Fläche innerhalb einer Periode ist Null. Es bleibt somit nur die Fläche unter einer Teilperiode übrig und da ω sehr groß ist, ist diese Teilperiode sehr kurz und die Fläche darunter sehr klein.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(\omega t) dt &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} [\sin(\omega t)]_a^b \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} (\sin(\omega a) - \sin(\omega b)).\end{aligned}$$

Da $\sin(\omega a)$ und $\sin(\omega b)$ für alle ω Werte zwischen 1 und -1 annehmen und $1/\omega \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$, folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} (\sin(\omega a) - \sin(\omega b)) = 0.$$

Aufgabe 4. Ein Polynom vom Grad n ist immer identisch mit seinem Taylor Polynom vom Grad n zu jedem beliebigen Entwicklungspunkt.

Verifizieren Sie dies am Spezialfall $n = 2$. Sei also $f(x)$ ein Polynom vom Grad 2 und \hat{x} beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 4. Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad 2, d.h.

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

und \hat{x} beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}f'(x) &= b + 2cx \\f''(x) &= 2c.\end{aligned}$$

Auswerten bei \hat{x} ergibt

$$\begin{aligned}f(\hat{x}) &= a + b\hat{x} + c\hat{x}^2 \\f'(\hat{x}) &= b + 2c\hat{x} \\f''(\hat{x}) &= 2c.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 \\&= a + b\hat{x} + c\hat{x}^2 + (b + 2c\hat{x})(x - \hat{x}) + c(x - \hat{x})^2 \\&= a + b\hat{x} + c\hat{x}^2 + bx - b\hat{x} + 2c\hat{x}x - 2c\hat{x}^2 + cx^2 - 2c\hat{x}x + c\hat{x}^2 \\&= a + bx + cx^2 \\&= f(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei f ein Polynom vom Grad 3.

- Begründen Sie, weshalb f genau einen Wendepunkt hat, d.h. eine Stelle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}f''(\hat{x}) &= 0 \\f'''(\hat{x}) &\neq 0.\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass f punktsymmetrisch zu dieser Wendestelle ist.

Hinweis: Verschieben Sie das Polynom so, dass der Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt und zeigen Sie, dass die so verschobene Funktion ungerade ist. Dies geht wiederum sehr einfach wenn Sie f durch sein Taylor Polynom vom Grad 3 zum Entwicklungspunkt \hat{x} darstellen, d.h.

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\hat{x})(x - \hat{x})^3.$$

Lösung von Aufgabe 5. Da f ein Polynom vom Grad 3 ist, gibt es a_0, a_1, a_2, a_3 mit $a_3 \neq 0$ so dass

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \\f''(x) &= 2a_2 + 6a_3x \\f'''(x) &= 6a_3.\end{aligned}$$

Da $a_3 \neq 0$ hat f'' genau eine Nullstelle bei

$$\begin{aligned}\hat{x} &= -\frac{2a_2}{6a_3} = -\frac{a_2}{3a_3} \\f'''(\hat{x}) &= 6a_3 \neq 0.\end{aligned}$$

Verschiebt man f so dass der Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt, erhält man

$$g(x) = f(x + \hat{x}) - f(\hat{x}).$$

Das Taylor Polynom von f zum Entwicklungspunkt \hat{x} vom Grad 3 ist gleich dem Polynom selbst, d.h.

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\hat{x})(x - \hat{x})^3.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})x + \frac{1}{2}f''(\hat{x})x^2 + \frac{1}{6}f'''(\hat{x})x^3 - f(\hat{x}) \\ &= f'(\hat{x})x + \frac{1}{6}f'''(\hat{x})x^3. \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom, in dem nur ungerade Potenzen von x auftreten. Folglich gilt

$$g(-x) = -g(x),$$

d.h. g ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe 6. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{1}{1+j} \right)^{10}.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+j} &= \frac{1-j}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \\ \left(\frac{1}{1+j} \right)^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}^{10}} e^{-j\pi 5/2} \\ &= \frac{1}{2^5} e^{-j\pi(2+1/2)} \\ &= \frac{1}{32} e^{-2\pi j} e^{-j\pi/2} \\ &= \frac{1}{32} e^{-j\pi/2} \\ &= \frac{1}{32} (-j). \end{aligned}$$

Der Realteil ist somit Null, der Imaginärteil $-1/32$.

Aufgabe 7. Sei $z \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$z(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}.$$

Zeichnen Sie die Zahl $z(\omega)$ in die komplexe Ebene ein für einige Werte von ω , z.B. $\omega = 0$, $\omega = \pm 1$ und $\omega \rightarrow \infty$.

Zeigen Sie dann, dass alle Zahlen $z(\omega)$ auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $1/2$ liegen. Hinweis: Sie müssen zeigen, dass

$$|z(\omega) - 1/2|$$

konstant ist, d.h. unabhängig von ω . Berechnen Sie den Radius dieses Kreises.

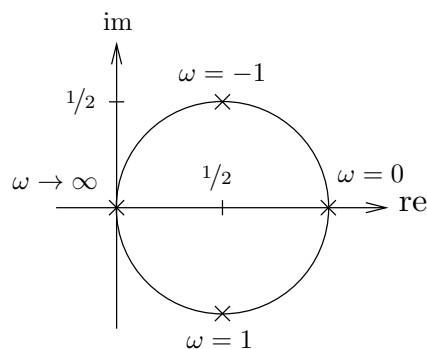
Zeichnen Sie dann alle Zahlen von $z(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ in die Ebene ein. Eine solche Darstellung der Funktion $z(\omega)$ heißt Ortskurve und spielt u.a. in der Regelungstechnik eine wichtige Rolle.

Lösung von Aufgabe 7. Es gilt

$$z(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} - j \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z(0) &= 1 \\ z(1) &= \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \\ z(-1) &= \frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} z(\omega) &= 0. \end{aligned}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} z(\omega) - \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (1 + j\omega)}{2(1 + j\omega)} = \frac{1 - j\omega}{2(1 + j\omega)} \\ \left| z(\omega) - \frac{1}{2} \right|^2 &= \frac{|(1 - j\omega)|^2}{|2(1 + j\omega)|^2} = \frac{1 + \omega^2}{4(1 + \omega^2)} = \frac{1}{4} \\ \left| z(\omega) - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Abstand von $z(\omega)$ zu $1/2$ unabhängig von ω immer gleich $1/2$. Folglich liegen alle Zahlen $z(\omega)$ auf einem Kreis um $1/2$ mit Radius $1/2$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$e^{z+1} = j.$$

Hinweis: Stellen Sie z in Kartesischen Koordinaten dar.

Lösung von Aufgabe 8. Sei $z = a + jb$. Umformen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} e^{z+1} &= j \\ e^{a+1+jb} &= j \\ e^{a+1}e^{jb} &= e^{j\pi/2} \\ e^{a+1} &= 1 \\ a+1 &= \ln(1) = 0 \\ a &= -1 \\ b &= \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$z = -1 + j(\pi/2 + 2k\pi).$$

Aufgabe 9. In einen See fließen

$$f_{\text{zu}}(t) = \cos(t) + 1$$

Liter pro Sekunde zu und

$$f_{\text{ab}}(t) = f_{\text{zu}}(t - 1)$$

Liter pro Sekunde ab. Berechnen Sie die Amplitude, mit der die Wassermenge im See schwingt.

Lösung von Aufgabe 9. Es gilt

$$f_{\text{ab}}(t) = \cos(t - 1) + 1.$$

Damit ist die Menge Wasser $h(t)$ im See

$$\begin{aligned} h(t) &= \int (f_{\text{zu}} - f_{\text{ab}})(t) dt \\ &= \int f_{\text{zu}}(t) dt - \int f_{\text{ab}}(t) dt \\ &= \sin(t) + t - (\sin(t - 1) + t) + C \\ &= \sin(t) - \sin(t - 1) + C \\ &= \frac{1}{2j} (e^{jt} - e^{-jt} - e^{j(t-1)} + e^{-j(t-1)}) + C \\ &= \frac{1}{2j} (e^{jt}(1 - e^{-j}) - e^{-jt}(1 - e^j)) + C \\ &= \text{im}(e^{jt}(1 - e^{-j})) + C. \end{aligned}$$

Sei

$$1 - e^{-j} = Ae^{j\varphi}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \operatorname{im}(e^{jt} Ae^{j\varphi}) + C \\ &= \operatorname{Aim}(e^{j(t+\varphi)}) + C \\ &= A \sin(t + \varphi) + C. \end{aligned}$$

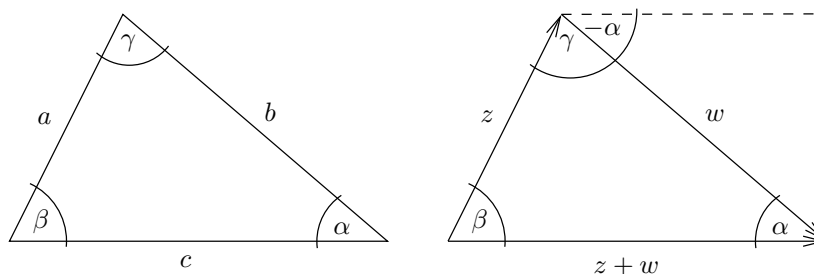
Die Amplitude der Schwingung ist somit

$$\begin{aligned} A &= |1 - e^{-j}| \\ &= |1 - \cos(1) + j \sin(1)| \\ &= \sqrt{(1 - \cos(1))^2 + \sin(1)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2 \cos(1) + \cos(1)^2 + \sin(1)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(1)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10. In einem beliebigen Dreieck mit Winkeln α, β, γ und gegenüberliegenden Seiten a, b, c gilt der Sinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}.$$

Dieser Satz soll mit komplexen Zahlen bewiesen werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Dreieck so gedreht werden, dass die Seite c parallel zur reellen Achse in der komplexen Ebene liegt, siehe nachfolgendes Bild.



Die Seiten a und b können durch Pfeile dargestellt werden, die den komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z &= ae^{j\beta} \\ w &= be^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

entsprechen. Da die Unterseite des Dreiecks parallel zur reellen Achse liegt, gilt

$$\operatorname{im}(z + w) = 0.$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$\begin{aligned}a \sin(\beta) &= \operatorname{im}(z) \\ b \sin(\alpha) &= -\operatorname{im}(w).\end{aligned}$$

Leiten Sie hiermit den Sinussatz her.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned}b \sin(\beta) &= b \operatorname{im}(e^{j\beta}) = \operatorname{im}(be^{j\beta}) = \operatorname{im}(z) \\ a \sin(\alpha) &= a \operatorname{im}(e^{j\alpha}) = \operatorname{im}(ae^{j\alpha}) = \operatorname{im}(\bar{w}) = -\operatorname{im}(w).\end{aligned}$$

Aus

$$\operatorname{im}(z + w) = 0$$

folgt

$$\operatorname{im}(z) = -\operatorname{im}(w)$$

und damit

$$b \sin(\beta) = a \sin(\alpha)$$

bzw.

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}.$$

Aufgabe 11. Der komplexe Logarithmus $\ln(z)$ kann ähnlich wie die komplexe Wurzel einfach in Polarkoordinaten berechnet werden. Auch hier muss der Winkel von z auf das Intervall $]-\pi, \pi]$ normiert werden damit der Funktionswert eindeutig ist. Sämtliche Rechengesetze des reellen Logarithmus übertragen sich auf den komplexen Logarithmus. Es gilt somit

$$\ln(re^{j\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{j\varphi}) = \ln(r) + j\varphi.$$

Berechnen Sie hiermit

$$\ln(1 + j), \ln(-1) \text{ und } \ln(-3j).$$

Berechnen Sie eine Menge B so dass

$$f \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B, \quad f(z) = \ln(z)$$

surjektiv ist. Ist diese Funktion injektiv?

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}\ln(1 + j) &= \ln\left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right) = \frac{1}{2}\ln(2) + j\frac{\pi}{4} \\ \ln(-1) &= \ln(e^{j\pi}) = j\pi \\ \ln(-3j) &= \ln\left(3e^{-j\pi/2}\right) = \ln(3) - j\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existieren r, φ so dass

$$z = re^{j\varphi} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \varphi \in]-\pi, \pi].$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(\ln(z)) &= \ln(r) \\ \operatorname{im}(\ln(z)) &= \varphi. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\operatorname{im}(\ln(z)) \in]-\pi, \pi].$$

Da r eine beliebige, positive Zahl ist, kann $\ln(r)$ jede reelle Zahl annehmen.

Folglich ist

$$B = \{a + jb \mid a \in \mathbb{R} \text{ und } -\pi < b \leq \pi\}.$$

Die Funktion ist injektiv: Seien

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{j\varphi_2} \end{aligned}$$

mit $r_1, r_2 \neq 0$ und Winkel $-\pi < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$. Wenn $z_1 \neq z_2$ dann ist $r_1 \neq r_2$ oder $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Da die reelle Logarithmusfunktion injektiv ist, ist $\ln(r_1) \neq \ln(r_2)$ oder $\varphi_1 \neq \varphi_2$ und folglich $\ln(z_1) \neq \ln(z_2)$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Lösung von Aufgabe 12. Sei $z = a + jb$. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^{a+jb}} \\ &= \overline{e^a e^{jb}} \\ &= e^a \overline{e^{jb}} \\ &= e^a e^{-jb} \\ &= e^{a-jb} \\ &= \overline{e^{a+jb}} \\ &= e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Lösung von Aufgabe 13. Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+2} + \frac{c_3}{(x+2)^2} \\ 2x^2 + x - 3 &= c_1(x+2)^2 + c_2(x-1)(x+2) + c_3(x-1) \end{aligned}$$

Spezialfall $x = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &= 9c_1 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Spezialfall $x = -2$

$$\begin{aligned} 3 &= -3c_3 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

Einsetzen von c_1, c_3 und Spezialfall $x = 0$.

$$\begin{aligned} -3 &= -2c_2 + 1 \\ -4 &= -2c_2 \\ c_2 &= 2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = 2 \ln|x+2| + \frac{1}{x+2}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Lösung von Aufgabe 14. Substitution.

$$u = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{1}{e^x} du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{u+1} \frac{1}{e^x} du \\ &= \int \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du \\ &= \int \frac{1}{u(u+1)} du. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(u+1)} &= \frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{u+1} \\ 1 &= c_1(u+1) + c_2u. \end{aligned}$$

Spezialfall $u = 0$ ergibt $c_1 = 1$. Spezialfall $u = -1$ ergibt $c_2 = -1$. Damit ist

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u(u+1)} du &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \ln |u| - \ln |u+1| \\ &= \ln |e^x| - \ln |e^x + 1| \\ &= \ln(e^x) - \ln(e^x + 1) \quad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \\ &= x - \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine rationale Funktion, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind und der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Weiter habe $q(x)$ nur einfache Nullstellen z_1, \dots, z_n und führenden Koeffizient 1, d.h.

$$q(x) = \prod_{i=1}^n (x - z_i).$$

Damit ist der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - z_1} + \frac{c_2}{x - z_2} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n}.$$

Zeigen Sie, dass die Konstanten c_i berechnet werden können durch

$$c_i = \frac{p(z_i)}{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (z_i - z_\ell)}.$$

Damit ist auch bewiesen, dass die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung eindeutig sind.

Lösung von Aufgabe 15. Aus

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - z_1} + \frac{c_2}{x - z_2} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n}$$

folgt durch Multiplikation mit $q(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{c_1}{x - z_1} q(x) + \frac{c_2}{x - z_2} q(x) + \dots + \frac{c_n}{x - z_n} q(x) \\ &= c_1 \prod_{\ell \neq 1} (x - z_\ell) + c_2 \prod_{\ell \neq 2} (x - z_\ell) + \dots + c_n \prod_{\ell \neq n} (x - z_\ell). \end{aligned}$$

Auswerten bei $x = z_i$ ergibt

$$\begin{aligned} p(z_i) &= c_1 \prod_{\ell \neq 1} (z_i - z_\ell) + c_2 \prod_{\ell \neq 2} (z_i - z_\ell) + \dots + c_n \prod_{\ell \neq n} (z_i - z_\ell) \\ &= c_i \prod_{\ell \neq i} (z_i - z_\ell) \end{aligned}$$

da alle Summanden außer dem i -ten einen Faktor Null enthalten und damit wegfallen. Damit ist

$$c_i = \frac{p(z_i)}{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (z_i - z_\ell)}$$

Aufgabe 16. Sei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine reelle rationale Funktion wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind, $q(x)$ nur einfache Nullstellen z_1, \dots, z_n hat und der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Damit hat $f(x)$ die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{c_1}{x - z_1} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n}.$$

Weiterhin habe $q(x)$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar, d.h.

$$z_\ell = \overline{z_k}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch für die zugehörigen Koeffizienten gilt

$$c_\ell = \overline{c_k}.$$

Hinweis: Die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung sind eindeutig. Da $f(x)$ reell ist, gilt

$$\overline{f(x)} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Stellen Sie daher zunächst die PBZ von $f(x)$ auf und konjugieren Sie diese komplex. Die dabei auftretenden Summanden mit gleichen Nenner müssen aufgrund der Eindeutigkeit der PBZ gleich sein, d.h. gleiche Zähler haben.

Lösung von Aufgabe 16. Umstellen der Summanden in der Partialbruchzerlegung ergibt

$$f(x) = \frac{c_\ell}{x - z_\ell} + \frac{c_k}{x - z_k} + \sum_{i \neq \ell, k} \frac{c_i}{x - z_i}.$$

Da $f(x)$ reell ist, erhält man eine weitere Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \overline{f(x)} \\
 &= \frac{\overline{c_\ell}}{x - \overline{z_\ell}} + \frac{\overline{c_k}}{x - \overline{z_k}} + \sum_{i \neq \ell, k} \frac{\overline{c_i}}{x - \overline{z_i}} \\
 &= \frac{\overline{c_\ell}}{x - \overline{z_\ell}} + \frac{\overline{c_k}}{x - \overline{z_k}} + \sum_{i \neq \ell, k} \frac{\overline{c_i}}{x - \overline{z_i}} \\
 &= \frac{\overline{c_\ell}}{x - \overline{z_k}} + \frac{\overline{c_k}}{x - \overline{z_\ell}} + \sum_{i \neq \ell, k} \frac{\overline{c_i}}{x - \overline{z_i}} \\
 &= \frac{\overline{c_k}}{x - \overline{z_\ell}} + \frac{\overline{c_\ell}}{x - \overline{z_k}} + \sum_{i \neq \ell, k} \frac{\overline{c_i}}{x - \overline{z_i}}
 \end{aligned}$$

Da die Partialbruchzerlegung eindeutig ist, erhält man durch Vergleich der Zähler der ersten beiden Partialbrüche mit gleichem Nenner

$$\begin{aligned}
 c_\ell &= \overline{c_k} \\
 c_k &= \overline{c_\ell}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Sie dürfen dabei alle Gesetze der reellen Arithmetik verwenden — machen Sie aber deutlich an welcher Stelle Sie diese benutzen.

Lösung von Aufgabe 17. Zu zeigen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Folglich existieren $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & a(\vec{x} + \vec{y}) \\ &= a \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \\ &= a \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} && \text{(Def. Vektor Addition)} \\ &= \begin{pmatrix} a(x_1 + y_1) \\ \vdots \\ a(x_n + y_n) \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multiplikation)} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + ay_1 \\ \vdots \\ ax_n + ay_n \end{pmatrix} && \text{(Reelles Distributivgesetz)} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 \\ \vdots \\ ay_n \end{pmatrix} && \text{(Def. Vektor Addition)} \\ &= a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multiplikation)} \\ &= a\vec{x} + a\vec{y}. \end{aligned}$$

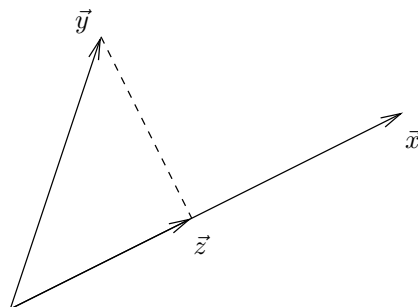
Aufgabe 18. Zeichnen Sie zwei Pfeile Ihrer Wahl in ein Koordinatensystem ein, die zueinander senkrecht stehen. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie das Skalarprodukt der beiden zugehörigen Vektoren berechnen.

Lösung von Aufgabe 18. Orthogonal sind z.B. die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ihr Skalarprodukt ist Null.

Aufgabe 19. In folgendem Bild ist die Orthogonalprojektion eines Vektors \vec{y} auf einen Vektor \vec{x} dargestellt.



Zeigen Sie, dass man den Ergebnisvektor \vec{z} durch die Formel

$$\vec{z} = (\vec{y} \circ \vec{e}_x) \vec{e}_x$$

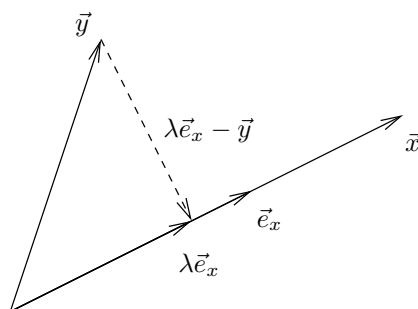
berechnen kann, wobei \vec{e}_x der normierte Richtungsvektor von \vec{x} ist. Hinweis: Schauen Sie sich dazu die Konstruktion an, mit der im Skript die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$$

hergeleitet wird. Das meiste davon können Sie übernehmen.

Lösung von Aufgabe 19. Für die im folgenden Bild eingezeichneten Vektoren gilt

$$\vec{z} = \lambda \vec{e}_x.$$



Da \vec{e}_x und $\lambda \vec{e}_x - \vec{y}$ senkrecht zueinander stehen, gilt

$$(\lambda \vec{e}_x - \vec{y}) \circ \vec{e}_x = 0.$$

Aus den Gesetzen des Skalarprodukts folgt

$$\lambda (\vec{e}_x \circ \vec{e}_x) - \vec{y} \circ \vec{e}_x = 0.$$

Da \vec{e}_x ein normierter Vektor ist, folgt

$$\lambda = \vec{y} \circ \vec{e}_x.$$

Damit ist

$$\vec{z} = (\vec{y} \circ \vec{e}_x) \vec{e}_x.$$