Heilbronn, den 25.6.2026 Prof. Dr. V. Stahl SS 26

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 15

Aufgabe 1. Sei

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \left(\ln(x), \frac{1}{x}\right)$$
$$g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+, \quad g(x,y) = 1 + |x+y|$$

Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{array}{rcl} f \circ g & \in & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (f \circ g)(x,y) & = & f(g(x,y)) \\ & = & f(1 + |x+y|) \\ & = & \left(\ln(1+|x+y|), \dfrac{1}{1+|x+y|}\right) \\ g \circ f & \in & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g\left(\ln(x), \dfrac{1}{x}\right) \\ & = & 1 + \left|\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right| \end{array}$$

Aufgabe 2. Gibt es eine Relation R so dass

$$\big(\{1,2,3\}, \{3\}, R\big)$$

eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 2. Die einzige Möglichkeit ist $R = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$.

Aufgabe 3. Die Funktion $f \in {\mathbb{R}^+}^2 \to {\mathbb{R}^+}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1/x_2)$$

ist bijektiv. Berechnen Sie $f^{-1}(8,2)$ und finden Sie dann einen Funktionsterm für f^{-1}.

Lösung von Aufgabe 3. Gesucht sind Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ so dass

$$\begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & 8 \\ x_1/x_2 & = & 2. \end{array}$$

Aus der zweite Gleichung folgt $x_1 = 2x_2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2x_2^2 = 8$ bzw. $x_2 = 2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x_1 = 4$. Somit ist

$$f^{-1}(8,2) = (4,2).$$

Sei

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2),$$

d.h.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 x_2 \\ y_2 &= x_1/x_2. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$x_1 = y_2 x_2.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$y_1 = y_2 x_2^2$$

und somit

$$x_2 = \sqrt{y_1/y_2}.$$

Einsetzen von x_2 in

$$x_1 = y_2 x_2$$

ergibt

$$x_1 = y_2 \sqrt{y_1/y_2} = \sqrt{y_1 y_2}.$$

Somit ist $f^{-1} \in {\mathbb{R}^+}^2 \to {\mathbb{R}^+}^2$ definiert durch

$$f(y_1, y_2) = (\sqrt{y_1 y_2}, \sqrt{y_1/y_2}).$$

Aufgabe 4. Die Funktion

$$f \in \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\big) \to \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\big), \qquad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 1/x_2)$$

ist bijektiv. Berechnen Sie einen Funktionsterm für f^{-1}.

Lösung von Aufgabe 4. Es gilt

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

genau dann wenn

$$f^{-1}(y_1, y_2) = (x_1, x_2).$$

Gegeben ist nun (y_1, y_2), gesucht (x_1, x_2). Weiterhin ist bekannt, dass

$$(y_1, y_2) = (x_1 + x_2, 1/x_2).$$

Aus dieser Gleichung von Paaren folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= 1/x_2. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$x_2 = 1/y_2.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - x_2 \\ &= y_1 - 1/y_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 - 1/y_2, 1/y_2).$$

Aufgabe 5. Ist die Funktion

$$f = \big(\{0,1\}, \{0,2\}, \{(0,2), (1,0)\}\big)$$

invertierbar? Falls ja berechnen Sie die Umkehrfunktion.

Lösung von Aufgabe 5.

$$f^{-1} = \big(\{0,2\}, \{0,1\}, \{(2,0), (0,1)\}\big).$$

Aufgabe 6. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f'(\hat{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x}.$$

<u>Hinweis</u>: Die Ableitung ist definiert durch

$$f'(\hat{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x},$$

Laut Definition des Grenzwerts einer Funktion bedeutet dies, dass für jede Folge x_n mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } x_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x} + x_n) - f(\hat{x})}{x_n} = f'(\hat{x}).$$

Sie müssen nun zeigen, dass für jede beliebige Folge y_n mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ und } y_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - y_n)}{y_n} = f'(\hat{x}).$$

Wählen Sie $x_n = -y_n$.

Lösung von Aufgabe 6. Sei y_n eine beliebige Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ und } y_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - y_n)}{y_n} \quad = \quad f'(\hat{x}).$$

Sei $x_n = -y_n$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } x_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - y_n)}{y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} + x_n)}{-x_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x} + x_n) - f(\hat{x})}{x_n} \\
&= f'(\hat{x}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Sei

$$f(x) \quad = \quad \operatorname{sign}(x) x^2$$

wobei

$$\operatorname{sign}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ differenzierbar ist obwohl $\operatorname{sign}(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ einen Sprung hat. Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 7. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= 2x.
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 \\
f'(x) &= -2x.
\end{aligned}$$

Für $\hat{x} = 0$ berechnet sich die Ableitung durch den Grenzwert

$$\begin{aligned}
f'(\hat{x}) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{sign}(\hat{x} + \Delta x)(\hat{x} + \Delta x)^2 - \operatorname{sign}(\hat{x})\hat{x}^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{sign}(\Delta x)\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{sign}(\Delta x)\Delta x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, ist f an der Stelle $\hat{x} = 0$ differenzierbar und

$$f'(0) \quad = \quad 0.$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \quad \begin{cases} 2x & \text{falls } x > 0 \\ -2x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \\ &= \quad 2|x|. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Sei

$$f(x, y) \quad = \quad \frac{x + y}{3x\sin(y) + 1}.$$

Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad &= \quad \frac{3x\sin(y) + 1 - (x + y)3\sin(y)}{(3x\sin(y) + 1)^2} \\ &= \quad \frac{1 - 3y\sin(y)}{(3x\sin(y) + 1)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad &= \quad \frac{3x\sin(y) + 1 - (x + y)3x\cos(y)}{(3x\sin(y) + 1)^2} \\ &= \quad \frac{1}{3x\sin(y) + 1} - \frac{3x(x + y)\cos(y)}{(3x\sin(y) + 1)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x, y) \quad = \quad x\sin(x + y)e^{xy}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad &= \quad \sin(x + y)e^{xy} + x(\cos(x + y)e^{xy} + \sin(x + y)ye^{xy}) \\ &= \quad e^{xy}(\sin(x + y)(1 + xy) + x\cos(x + y)) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad &= \quad x(\cos(x + y)e^{xy} + \sin(x + y)xe^{xy}) \\ &= \quad e^{xy}\big(x\cos(x + y) + x^2\sin(x + y)\big). \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad -\int_b^a f(x)dx.$$

Lösung von Aufgabe 10. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-\int_b^a f(x)dx &= -[F(x)]_b^a \\
&= -(F(a) - F(b)) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= [F(x)]_a^b \\
&= \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x} dx.$$

Lösung von Aufgabe 11. Umformen.

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x} dx = \int \frac{(3\ln(x))^2}{x} dx.$$

Substitution.

$$\begin{aligned}
g &= \ln(x) \\
\frac{dg}{dx} &= \frac{1}{x} \\
dx &= x dg.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{(3\ln(x))^2}{x} dx &= \int \frac{(3g)^2}{x} x dg \\
&= 9 \int g^2 dg \\
&= 3g^3 + C \\
&= 3\ln(x)^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int f(x) f'(x) dx.$$

Lösen Sie die Aufgabe einmal mit Substitution und einmal mit partieller Integration.

Lösung von Aufgabe 12.

- Lösung mit Substitution.

$$\begin{aligned}
u &= f(x) \\
\frac{du}{dx} &= f'(x) \\
dx &= \frac{1}{f'(x)} du.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)f'(x)dx &= \int uf'(x)\frac{1}{f'(x)}du \\
&= \int udu \\
&= \frac{1}{2}u^2 + C \\
&= \frac{1}{2}f(x)^2 + C.
\end{aligned}$$

- Lösung mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int f(x)f'(x)dx &= f(x)f(x) - \int f'(x)f(x)dx \\
2\int f(x)f'(x)dx &= f(x)^2 + C \\
\int f(x)f'(x) &= \frac{1}{2}f(x)^2 + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

für alle x, für die das Integral existiert.

Lösung von Aufgabe 13. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du &= \frac{d}{dx}\left[F(u)\right]_a^x \\
&= \frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) \\
&= \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}F(a) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Die Ableitung von $F(a)$ nach x ist Null, da $F(a)$ eine Konstante ist.

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\int_{-2}^{2} \sin(|x+1| - 2)dx.$$

Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung durch, ob $x + 1$ positiv oder negativ ist um die Betragsfunktion zu eliminieren. Zerlegen Sie dann das Integral in zwei entsprechende Teilintegrale.

Lösung von Aufgabe 14. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(|x+1| - 2) &= \begin{cases} \sin(x+1-2) & \text{falls } x+1 \geq 0 \\ \sin(-(x+1)-2) & \text{falls } x+1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sin(x-1) & \text{falls } x \geq -1 \\ \sin(-x-3) & \text{falls } x < -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sin(|x+1|-2)dx &= \int_{-2}^{-1} \sin(-x-3)dx + \int_{-1}^{2} \sin(x-1)dx \\
&= -\int_{-2}^{-1} \sin(x+3)dx + \int_{-1}^{2} \sin(x-1)dx \\
&= -[-\cos(x+3)]_{-2}^{-1} + [-\cos(x-1)]_{-1}^{2} \\
&= [\cos(x+3)]_{-2}^{-1} - [\cos(x-1)]_{-1}^{2} \\
&= \cos(2) - \cos(1) - (\cos(1) - \cos(-2)) \\
&= \cos(2) - \cos(1) - \cos(1) + \cos(2) \\
&= 2\cos(2) - 2\cos(1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\int_{1}^{5} x^3 dx$$
$$\int_{-2}^{4} \sin(3x)dx$$
$$\int_{-3}^{-1} e^{-2x}dx$$

Lösung von Aufgabe 15.

- $$\begin{aligned}
\int_{1}^{5} x^3 dx &= \left[1/4x^4\right]_{1}^{5} \\
&= 1/4(5^4 - 1^4) \\
&= 156
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\int_{-2}^{4} \sin(3x)dx &= [-\cos(3x)/3]_{-2}^{4} \\
&= -1/3\,[\cos(3x)]_{-2}^{4} \\
&= -1/3(\cos(12) - \cos(-6)) \\
&= 0.03877
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\int_{-3}^{-1} e^{-2x}dx &= \left[-1/2e^{-2x}\right]_{-3}^{-1} \\
&= -1/2\left[e^{-2x}\right]_{-3}^{-1} \\
&= -1/2(e^2 - e^6) \\
&= 198.02
\end{aligned}$$

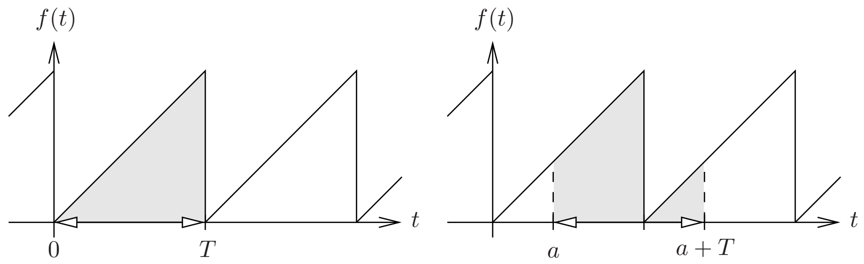
Aufgabe 16. Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) \quad = \quad f(t)$$

für alle t. Zeigen Sie, dass für beliebiges a gilt

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_0^T f(t)dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter $f(t)$ in einer Periode unabhängig davon ist, wo die Periode beginnt. In folgendem Bild wird dies am Beispiel einer Sägezahnfunktion dargestellt.



Hinweis:

- Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale:

$$\int_a^{a+T} \dots \quad = \quad \int_a^0 \dots + \int_0^{a+T} \dots .$$

- Führen Sie im ersten Integral eine Substitution $u = t + T$ durch. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen zu

$$\int_{a+T}^T \dots .$$

- Im Integrand dieses Integrals nutzen Sie nun die Periodizität von f, indem Sie $f(u-T)$ durch $f(u)$ ersetzen. Die Integrationsvariable u ersetzen Sie danach wieder durch t.
- Da die Integranden der beiden Integrale nun wieder gleich sind, können Sie die Integrale zu einem Integral zusammensetzen. Sie müssen hierzu lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^T \dots + \int_0^{a+T} \quad &= \quad \int_0^{a+T} \dots + \int_{a+T}^T \dots \\ &= \quad \int_0^T \dots . \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 16.

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_a^0 f(t)dt + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Substitution im ersten Integral.

$$\begin{aligned} u &= t + T \\ \frac{du}{dt} &= 1 \\ du &= dt \\ t &= u - T. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a+T}^{T} f(u-T)du + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Da $f(t)$ eine T-periodische Funktion ist, gilt

$$f(u-T) = f(u).$$

Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a+T}^{T} f(u)du + \int_0^{a+T} f(t)dt.$$

Die Integrationsvariable darf beliebig umbenannt werden. Ersetzt man im ersten Integral u wieder durch t, erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_{a+T}^{T} f(t)dt + \int_0^{a+T} f(t)dt \\ &= \int_0^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{T} f(t)dt \\ &= \int_0^{T} f(t)dt. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

eine Stammfunktion von $f(x)$. Der Beweis geht wie folgt: Sei $\hat{F}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\ &= \left[\hat{F}(u)\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \hat{F}(x) - \hat{F}(-\infty). \end{aligned}$$

Da $\hat{F}(-\infty)$ eine Konstante ist, gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \hat{F}'(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Somit ist $F'(x) = f(x)$ und daher $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.
Sei nun

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Fläche unter $f(x)$ Null ist, ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Damit ist aber

$$F'(x) \neq f(x) \quad \text{für } x = 0$$

und somit ist $F(x)$ keine Stammfunktion von $f(x)$ im Widerspruch zu obiger Aussage. Woran liegt's?

Lösung von Aufgabe 17. Die Flächenberechnung mit Hilfe der Stammfunktion setzt voraus, dass $f(x)$ im Integrationsbereich stetig ist. Die gegebene Funktion $f(x)$ ist jedoch an der Stelle $x = 0$ nicht stetig. Tatsächlich hat $f(x)$ keine Stammfunktion: Es gibt keine Funktion $F(x)$, die überall Steigung 0 hat, nur an der Stelle $x = 0$ die Steigung 1.

Aufgabe 18. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty xe^{-x}dx &= \underbrace{\left[xe^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty -e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \\ &= -\left[e^{-x}\right]_0^\infty \\ &= -(0-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von

$$z = \frac{(2+j)^2}{2-3j}.$$

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned} \frac{(2+j)^2}{2-3j} &= \frac{(4+4j-1)(2+3j)}{13} \\ &= \frac{1}{13}(3+4j)(2+3j) \\ &= \frac{1}{13}(6+9j+8j-12) \\ &= \frac{1}{13}(-6+17j). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{re}(z) = -\frac{6}{13}, \qquad \mathrm{im}(z) = \frac{17}{13}.$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{1+j}{1-\frac{1}{j-1}}.$$

Lösung von Aufgabe 20.

$$\begin{aligned}
\frac{1+j}{1-\frac{1}{j-1}} &= \frac{(1+j)(j-1)}{j-1-1} \\
&= -\frac{(1+j)(1-j)}{j-2} \\
&= -\frac{2}{j-2} \\
&= \frac{2}{2-j} \\
&= \frac{2(2+j)}{5} \\
&= \frac{4+2j}{5}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(z) &= \frac{4}{5} \\
\mathrm{im}(z) &= \frac{2}{5} \\
|z| &= \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 21. Zeigen Sie dass für alle komplexen Zahlen z, z_1, z_2 und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= \overline{z_1 z_2} \\
\overline{z_1} + \overline{z_2} &= \overline{z_1 + z_2} \\
\overline{z}^n &= \overline{z^n}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie hiermit, dass für jedes Polynom mit reellen Koeffizienten

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

gilt

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

Begründen Sie damit wiederum, dass die Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

Lösung von Aufgabe 21. Sei

$$z = re^{j\varphi}, \quad z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} = a_1 + jb_1, \quad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2} = a_2 + jb_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= \overline{r_1 e^{j\varphi_1}}\,\overline{r_2 e^{j\varphi_2}} \\
&= r_1 e^{-j\varphi_1} r_2 e^{-j\varphi_2} \\
&= r_1 r_2 e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)} \\
&= \overline{r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}} \\
&= \overline{z_1 z_2} \\
\overline{z_1} + \overline{z_2} &= a_1 - jb_1 + a_2 - jb_2 \\
&= a_1 + a_2 - j(b_1 + b_2) \\
&= \overline{z_1 + z_2}. \\
\overline{z}^n &= \left(re^{-j\varphi}\right)^n \\
&= r^n e^{-jn\varphi} \\
&= \overline{r^n e^{jn\varphi}} \\
&= \overline{z^n}.
\end{aligned}$$

Sei

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{f(z)}.
\end{aligned}$$

Ist z eine Nullstelle von f, d.h.

$$f(z) = 0,$$

dann gilt

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0,$$

d.h. auch $\overline{z}$ ist eine Nullstelle von f.

Aufgabe 22. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von

$$\frac{(j-1)e^{j\pi/3}}{2j}.$$

Lösung von Aufgabe 22.

$$\begin{aligned}\frac{(j-1)e^{j\pi/3}}{2j} &= \frac{\sqrt{2}e^{j3\pi/4}e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi(3/4+1/3-1/2)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j7\pi/12}\end{aligned}$$

Damit ist

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \frac{7\pi}{12}.$$

Aufgabe 23. Finden Sie eine Menge B so dass die Funktion

$$f \in \mathbb{C} \to B, \quad f(z) = \sqrt{z}$$

bijektiv ist.

Lösung von Aufgabe 23. Die Funktion ist injektiv: Wenn $z_1 \neq z_2$ dann ist auch $\sqrt{z_1} \neq \sqrt{z_2}$. Damit die Funktion auch surjektiv ist, muss gelten

$$\begin{aligned}B &= \{\sqrt{z}\,|\,z \in \mathbb{C}\}\\ &= \{\sqrt{r}e^{j\varphi/2}\,|\,r \in \mathbb{R}_0^+, -\pi < \varphi \leq \pi\}\\ &= \{re^{j\varphi}\,|\,r \in \mathbb{R}_0^+, -\pi/2 < \varphi \leq \pi/2\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 24. Die reelle e-Funktion ist streng monoton steigend und damit injektiv. Ist auch die komplexe e-Funktion

$$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = e^z$$

injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 24. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_2 = z_1 + 2\pi j.$$

Dann ist $z_1 \neq z_2$ aber

$$e^{z_2} = e^{z_1+2\pi j} = e^{z_1}\underbrace{e^{2\pi j}}_{=1} = e^{z_1}.$$

Folglich ist die komplexe e-Funktion nicht injektiv.

Aufgabe 25. Der Zusammenhang zwischen Spannung $u(t)$ und Stromstärke $i(t)$ an einem Widerstand R ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}.$$

Schwieriger ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke an einem Kondensator und an einer Spule. Im Spezialfall einer Wechselspannung

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

mit Amplitude u_0, Kreisfrequenz ω und Phasenwinkel φ kann man das Problem jedoch sehr einfach mit komplexen Zahlen lösen:

- Zunächst wird $u(t)$ komplex in Polarkoordinaten dargestellt.

$$u(t) \quad = \quad \mathrm{re}(u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}).$$

- Nun wechselt man ins Komplexe und schleppt den Imaginärteil mit. Damit ist $u(t)$ eine komplexe Spannung

$$u(t) \quad = \quad u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}.$$

- Im Komplexen gilt für Spulen und Kondensatoren das einfache, Ohmsche Gesetz. Der komplexe Widerstand eines Kondensators mit Kapazität C bzw. einer Spule mit Induktivität L ist

$$R_C \;=\; \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{bzw.} \qquad R_L \;=\; j\omega L.$$

  Die Widerstände hängen von der Kreisfrequenz ω ab. Bei hoher Frequenz ist der Betrag des komplexen Widerstand eines Kondensators klein, der einer Spule groß.

- Man erhält nach dem Ohmschen Gesetz somit komplexe Ströme

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{u(t)}{R_C} = u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\, j\omega C \quad \text{bzw.} \\ i(t) &= \frac{u(t)}{R_L} = \frac{u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}}{j\omega L}. \end{aligned}$$

- Zum Schluss kehrt man in's Reelle zurück und nimmt von den berechneten, komplexen Strömen den Realteil.

$$\begin{tikzcd}
u(t) = u_0 \cos(\omega t+\varphi) \arrow[d, "\text{Komplex}"'] & & i(t) \\
u(t) = u_0 e^{j(\omega t+\varphi)} \arrow[rr, "\text{Ohmsches Gesetz}", "{R_C = \frac{1}{j\omega C},\quad R_L = j\omega L}"'] & & i(t) = \frac{u(t)}{R_C} \text{ bzw. } i(t) = \frac{u(t)}{R_L} \arrow[u, "\text{Realteil}"]
\end{tikzcd}$$

- Berechnen Sie auf diese Weise $i(t)$ für einen Kondensator C bzw. eine Spule L, an denen die Spannung

$$u(t) \quad = \quad u_0 \cos(\omega t+\varphi)$$

  anliegt und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Am Einfachsten geht es, wenn Sie R_C und R_L in Polarkoordinaten darstellen, in Polarkoordinaten multiplizieren bzw. dividieren und das Ergebnis in kartesische Koordinaten umrechnen um den Realteil zu erhalten.

- Wie bei Ohmschen Widerstände werden auch komplexe Widerstände addiert, wenn sie hintereinandergeschaltet werden. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, wenn ein Kondensator mit $C = 2$ Farad, eine Spule mit $L = 3$ Henry und ein Ohmscher Widerstand mit $R = 5$ Ohm hintereinandergeschaltet werden bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 2$ rad/s.

Lösung von Aufgabe 25. Kondensator in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \end{aligned}$$

Komplexer Strom durch Kondensator.

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{u(t)}{R_C} \\ &= u_0 e^{j(\omega t+\varphi)} \omega C e^{j\pi/2} \\ &= u_0 \omega C e^{j(\omega t+\varphi+\pi/2)} \end{aligned}$$

Reeller Strom durch Kondensator.

$$\mathrm{re}(i(t)) = u_0 \omega C \cos(\omega t + \varphi + \pi/2).$$

Spule in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} R_L &= j\omega L \\ &= \omega L e^{j\pi/2} \end{aligned}$$

Komplexer Strom durch Spule.

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{u(t)}{R_L} \\ &= \frac{u_0}{\omega L} e^{j(\omega t+\varphi)} e^{-j\pi/2} \\ &= \frac{u_0}{\omega L} e^{j(\omega t+\varphi-\pi/2)} \end{aligned}$$

Reeller Strom durch Spule.

$$\mathrm{re}(i(t)) = \frac{u_0}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2).$$

Hintereinanderschaltung eines Kondensators mit $C = 2$ Farad, einer Spule mit $L = 3$ Henry und einem Ohmschen Widerstand mit $R = 5$ Ohm bei $\omega = 2$ rad/s.

$$\begin{aligned} R + R_C + R_L &= R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \\ &= 5 + \frac{1}{4j} + 6j \\ &= 5 - \frac{j}{4} + 6j \\ &= \frac{20 - j + 24j}{4} \\ &= \frac{20 + 23j}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 26. In der Regelungstechnik (4. Semester) spielen sog. Standard Übertragungsglieder eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist das PT1-Glied, das durch eine Übertragungsfunktion

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + Tj\omega}$$

gegeben ist mit $\omega, T \in \mathbb{R}^+$. Anschaulich handelt es sich um ein System, das eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω um den Faktor $|G(\omega)|$ verstärkt (Amplitudengang) und zu einer Phasenverschiebung $\sphericalangle G(\omega)$, Phasengang führt.

Berechnen Sie Amplituden- und Phasengang des PT1-Gliedes in Abhängigkeit von T und ω.

Lösung von Aufgabe 26. Der Nenner $1+Tj\omega$ hat Realteil 1 und Imaginärteil $T\omega > 0$. Damit hat man die Darstellung in Polarkoordinaten

$$1 + Tj\omega = \sqrt{1 + (T\omega)^2}\, e^{j\alpha} \qquad \text{mit } \alpha = \arctan(T\omega).$$

Folglich ist

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

und

$$\begin{aligned} \sphericalangle G(\omega) &= -\alpha \\ &= -\arctan(T\omega). \end{aligned}$$

Aufgabe 27. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$$

genau dann wenn

$$\operatorname{re}(\lambda) < 0.$$

Lösung von Aufgabe 27. Sei

$$\lambda = a + jb \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{(a+jb)t} \\ &= e^{at} e^{jbt} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + j\sin(bt)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$$

genau dann wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{at} = 0.$$

Dies ist wiederum genau dann der Fall wenn $a < 0$ bzw.

$$\operatorname{re}(\lambda) < 0.$$

Aufgabe 28. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 = (1+j)^2.$$

Lösung von Aufgabe 28. Umformen in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}(1+j)^2 &= \left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^2 \\ &= 2e^{j\pi/2} \\ z^5 &= \left(re^{j\varphi}\right)^5 \\ &= r^5e^{j5\varphi}.\end{aligned}$$

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}r^5e^{j5\varphi} &= 2e^{j\pi/2} \\ r &= \sqrt[5]{2} \\ 5\varphi &= \pi/2 + 2\pi k \\ \varphi &= \frac{\pi}{10} + 2\pi\frac{k}{5}, \qquad k = 0,1,2,3,4.\end{aligned}$$

Lösungen

$$z = \sqrt[5]{2}\, e^{j(\pi/10\, +\, 2\pi k/5)}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{-3} + 1 = j.$$

Lösung von Aufgabe 29. Umstellen der Gleichung ergibt

$$z^{-3} = j - 1 = \sqrt{2}\, e^{j3\pi/4}.$$

Sei $z = re^{j\varphi}$. Dann ist

$$z^{-3} = r^{-3}e^{-j3\varphi}.$$

Die Gleichung ist damit

$$r^{-3}e^{-j3\varphi} = \sqrt{2}e^{j3\pi/4}.$$

Folglich gilt für den Betrag r von z

$$\begin{aligned}r^{-3} &= \sqrt{2} \\ r^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ r &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.\end{aligned}$$

Für den Winkel φ gilt

$$\begin{aligned}-3\varphi &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \varphi &= -\frac{\pi}{4} - \frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0,1,2.\end{aligned}$$

Damit ist

$$z = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{-j\pi(1/4+2k/3)}, \qquad k = 0,1,2.$$

Aufgabe 30. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die jeder reellen Zahl x eine komplexe Zahl $f(x)$ zuordnet. Man kann den Funktionswert von f an der Stelle x in Realteil und Imaginärteil aufspalten, d.h.

$$f(x) = f_{\text{re}}(x) + j f_{\text{im}}(x)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{\text{re}}(x) &= \text{re}(f(x)) \\ f_{\text{im}}(x) &= \text{im}(f(x)) \end{aligned}$$

und $f_{\text{re}}, f_{\text{im}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

- Sei nun konkret

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = (2+j)e^{jx}.$$

Berechnen Sie je einen Funktionsterm für die Funktionen

$$f_{\text{re}}(x), \;\; f_{\text{im}}(x), \;\; f'_{\text{re}}(x), \;\; f'_{\text{im}}(x), \;\; f'(x)$$

sowie den Realteil und den Imaginärteil von $f'(x)$.

- Begründen Sie kurz, weshalb für jede differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$f'(x) = f'_{\text{re}}(x) + j f'_{\text{im}}(x).$$

Sie müssen hierbei lediglich die Ableitungsregeln anwenden.

- Begründen Sie damit, weshalb allgemein gilt

$$\text{re}(f'(x)) = f'_{\text{re}}(x).$$

Es ist somit bei einer Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egal, ob man zuerst den Realteil nimmt und dann ableitet oder umgekehrt.

- Begründen Sie, weshalb allgemein gilt

$$\overline{f(x)}' = \overline{f'(x)}.$$

Es ist somit egal, ob man zuerst ableitet und dann komplex konjugiert oder umgekehrt.

- Kann man auch allgemein sagen, dass

$$|f(x)|' = |f'(x)|?$$

Lösung von Aufgabe 30.

-

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+j)(\cos(x) + j\sin(x)) \\ &= 2\cos(x) - \sin(x) + j(2\sin(x) + \cos(x)) \\ f_{\text{re}}(x) &= 2\cos(x) - \sin(x) \\ f_{\text{im}}(x) &= 2\sin(x) + \cos(x) \\ f'_{\text{re}}(x) &= -2\sin(x) - \cos(x) \\ f'_{\text{im}}(x) &= 2\cos(x) - \sin(x) \\ f'(x) &= (2+j)je^{jx} \\ &= (2j-1)(\cos(x) + j\sin(x)) \\ &= -2\sin(x) - \cos(x) + j(2\cos(x) - \sin(x)). \end{aligned}$$

- Mit der Summenregel und der Regel für konstante Faktoren (hier j) gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(f_{\mathrm{re}}(x) + j f_{\mathrm{im}}(x)\right)' \\
&= f'_{\mathrm{re}}(x) + (j f_{\mathrm{im}}(x))' \\
&= f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x).
\end{aligned}
$$

- Da $f_{\mathrm{re}}(x)$ und $f_{\mathrm{im}}(x)$ reell sind, sind auch die Ableitungen $f'_{\mathrm{re}}(x)$ und $f'_{\mathrm{im}}(x)$ reell. Ausgehend von

$$
f'(x) = f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x)
$$

kann man auf beiden Seiten den Realteil nehmen und erhält

$$
\mathrm{re}(f'(x)) = f'_{\mathrm{re}}(x).
$$

- $$
\begin{aligned}
\overline{f(x)}' &= (f_{\mathrm{re}}(x) - j f_{\mathrm{im}}(x))' \\
&= f'_{\mathrm{re}}(x) - j f'_{\mathrm{im}}(x) \\
&= \overline{f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x)} \\
&= \overline{f'(x)}
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \sqrt{f_{\mathrm{re}}(x)^2 + f_{\mathrm{im}}(x)^2} \\
|f'(x)| &= |f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x)| \\
&= \sqrt{f'_{\mathrm{re}}(x)^2 + f'_{\mathrm{im}}(x)^2} \\
|f(x)|' &= \left(\sqrt{f_{\mathrm{re}}(x)^2 + f_{\mathrm{im}}(x)^2}\right)' \\
&= \frac{f_{\mathrm{re}}(x) f'_{\mathrm{re}}(x) + f_{\mathrm{im}}(x) f'_{\mathrm{im}}(x)}{\sqrt{f_{\mathrm{re}}(x)^2 + f_{\mathrm{im}}(x)^2}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt im Allgemeinen

$$
|f'(x)| \neq |f(x)|'.
$$

Aufgabe 31. Sei

$$
z = \frac{1}{1 + e^{j\varphi}}.
$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(z)$. Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von φ.

Lösung von Aufgabe 31.

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{1+\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)}\\
&= \frac{1+\cos(\varphi)-j\sin(\varphi)}{(1+\cos(\varphi))^2+\sin^2(\varphi)}\\
&= \frac{1+\cos(\varphi)-j\sin(\varphi)}{1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}\\
&= \frac{1+\cos(\varphi)-j\sin(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)}\\
\mathrm{re}(z) &= \frac{1+\cos(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 32. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \sin(x)e^x.$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e-Funktionen dar. Im Ergebnis dürfen aber keine komplexen Zahlen mehr auftreten.

Lösung von Aufgabe 32.

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^x dx &= \int \mathrm{im}(e^{jx})e^x dx\\
&= \int \mathrm{im}(e^{jx}e^x dx)\\
&= \mathrm{im}\left(\int e^{x(1+j)}dx\right)\\
&= \mathrm{im}\left(\frac{1}{1+j}e^{x(1+j)}\right)\\
&= e^x\mathrm{im}\left(\frac{1}{1+j}e^{jx}\right)\\
&= e^x\mathrm{im}\left(\frac{1-j}{2}(\cos(x)+j\sin(x))\right)\\
&= \frac{1}{2}e^x(\sin(x)-\cos(x)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 33. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z \quad = \quad \frac{\sqrt{e^{(1+j)\pi}}}{1+j}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 33.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{e^{(1+j)\pi}}}{1+j} &= \frac{\sqrt{e^{\pi}e^{j\pi}}(1-j)}{2}\\ &= \frac{\sqrt{-e^{\pi}}(1-j)}{2}\\ &= \frac{j\sqrt{e^{\pi}}(1-j)}{2}\\ &= \frac{\sqrt{e^{\pi}}(1+j)}{2}\\ &= \frac{\sqrt{e^{\pi}}}{2}(1+j).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{re}(z) &= \frac{\sqrt{e^{\pi}}}{2}\\ \mathrm{im}(z) &= \frac{\sqrt{e^{\pi}}}{2}\\ |z| &= \frac{\sqrt{e^{\pi}}}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{e^{\pi}}{2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 34. Leiten Sie die Gleichung

$$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

unter Verwendung von komplexen Zahlen her.

Lösung von Aufgabe 34.

$$\begin{aligned}\sin(2\varphi) &= \mathrm{im}\big(e^{j2\varphi}\big)\\ &= \mathrm{im}\Big(\big(e^{j\varphi}\big)^2\Big)\\ &= \mathrm{im}\Big(\big(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)\big)^2\Big)\\ &= \mathrm{im}\big(\cos^2(\varphi)+2j\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin^2(\varphi)\big)\\ &= 2\sin(\varphi)\cos(\varphi).\end{aligned}$$

Aufgabe 35. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von $1/j$.

Lösung von Aufgabe 35.

$$\begin{aligned}\frac{1}{j} &= \frac{j}{j^2}\\ &= -j\\ &= e^{-j\pi/2}.\end{aligned}$$

Damit ist $r = 1$ und $\varphi = -\pi/2$.

Aufgabe 36. Zeigen Sie unter Verwendung von komplexen Zahlen, dass

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y).$$

Lösung von Aufgabe 36. Aus der Euler Gleichung

$$e^{j\varphi} \quad = \quad \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

folgt mit $\varphi = x + y$

$$e^{j(x+y)} \quad = \quad \cos(x+y) + j\sin(x+y).$$

Nimmt man den Imaginärteil auf beiden Seiten, erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \mathrm{im}(e^{j(x+y)}) \\
&= \mathrm{im}(e^{jx}e^{jy}) \\
&= \mathrm{im}((\cos(x) + j\sin(x))(\cos(y) + j\sin(y))) \\
&= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 37. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{re}(je^{j(x+\pi/2)}) \quad = \quad -\mathrm{re}(e^{jx})$$

Lösung von Aufgabe 37.

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(je^{j(x+\pi/2)}) &= \mathrm{re}(je^{jx}e^{j\pi/2}) \\
&= \mathrm{re}(j^2e^{jx}) \\
&= -\mathrm{re}(e^{jx}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 38. Wie Sie wissen, gilt

$$\sin(x)' \quad = \quad \cos(x).$$

Beweisen Sie diese Gleichung mit Hilfe von komplexen Zahlen. Hinweis:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \mathrm{im}(e^{jx}) \\
&= \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 38.

$$\begin{aligned}
\sin(x)' &= \left(\frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})\right)' \\
&= \frac{1}{2j}(je^{jx} + je^{-jx}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie die Polarkoordinaten r, φ von

$$\left(\frac{j+1}{e^j}\right)^4.$$

Lösung von Aufgabe 39.

$$\begin{aligned}\frac{j+1}{e^j} &= \sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-j} \\ &= \sqrt{2}e^{j(\pi/4-1)}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{j+1}{e^j}\right)^4 &= \sqrt{2}^4 e^{4j(\pi/4-1)} \\ &= 4e^{j(\pi-4)}\end{aligned}$$

Somit ist

$$r = 4, \qquad \varphi = \pi - 4.$$

Aufgabe 40. Zerlegen Sie die rationale Funktion

$$\frac{2x^4 + x^3 - x}{x^2 - 1}$$

in eine Summe aus einem ganzrationalen Teil und einem gebrochen rationalen Teil, bei dem Zählergrad kleiner als Nennergrad ist.

Lösung von Aufgabe 40.

$$\frac{2x^4 + x^3 - x}{x^2 - 1} = 2x^2 + x + 2 + \frac{2}{x^2 - 1}$$

Aufgabe 41. Sei

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6.$$

Eine Nullstelle von $f(x)$ ist $z_1 = 1 + j$. Berechnen Sie die anderen Nullstellen und stellen Sie das Polynom in faktorisierter Form dar.

Lösung von Aufgabe 41. Da $z_1 = 1 + j$ eine Nullstelle ist und $f(x)$ reelle Koeffizienten hat, muss auch $z_2 = 1 - j$ eine Nullstelle sein. Folglich kann man den Faktor

$$\begin{aligned}(x - z_1)(x - z_2) &= (x - (1 + j))(x - (1 - j)) \\ &= x^2 - x(1 + j + 1 - j) + (1 + j)(1 - j) \\ &= x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

abspalten. Polynomdivision ergibt

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6}{x^2 - 2x + 2} = x^2 - 4x + 3.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind

$$\begin{aligned}z_{3,4} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} \\ &= 2 \pm 1.\end{aligned}$$

Damit ist

$$z_3 = 3, \quad z_4 = 1.$$

Die Faktorisierung von $f(x)$ ist somit

$$f(x) = (x - (1 + j))(x - (1 - j))(x - 3)(x - 1).$$

Aufgabe 42. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + x - 2)}.$$

Lösung von Aufgabe 42. Nullstellen des Nenners:

$$(x^2 + x - 1) = (x - 1)(x + 2).$$

Faktorisierung des Nenners:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)^2(x + 2)}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 1}{(x - 1)^2(x + 2)} &= \frac{c_1}{x - 1} + \frac{c_2}{(x - 1)^2} + \frac{c_3}{x + 2} \\
2x^2 - 1 &= c_1(x - 1)(x + 2) + c_2(x + 2) + c_3(x - 1)^2
\end{aligned}$$

- Spezialfall $x = -2$.
$$7 = 9c_3, \quad c_3 = 7/9.$$
- Spezialfall $x = 1$.
$$1 = 3c_2, \quad c_2 = 1/3.$$
- Spezialfall $x = 0$.
$$\begin{aligned}
-1 &= -2c_1 + 2c_2 + c_3 \\
&= -2c_1 + 2/3 + 7/9 \\
&= -2c_1 + 13/9 \\
-22/9 &= -2c_1 \\
c_1 &= 11/9.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f(x) = \frac{11/9}{x - 1} + \frac{1/3}{(x - 1)^2} + \frac{7/9}{x + 2}.$$

Aufgabe 43. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 1}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass kein j mehr darin vorkommt. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Ableitung berechnen. Hinweise:

- Partialbruchzerlegung.
- Für die Stammfunktion brauchen Sie den komplexen Logarithmus von $x+j$. Rechnen Sie dazu $x+j$ in Polarkoordinaten um. Es gilt

  $$\ln\left(re^{j\varphi}\right) = \ln(r) + j\varphi.$$

  wobei $-\pi < \varphi \le \pi$.
- Da der Winkel von $x+j$ für alle x zwischen 0 und π liegt, kann er mit arccos ohne Fallunterscheidung berechnet werden, d.h.

  $$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

  Um diesen Ausdruck zu vereinfachen können Sie folgende Formel verwenden:

  $$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \text{ für alle } x.$$

  Die Ableitung der arctan Funktion ist

  $$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Lösung von Aufgabe 43. Faktorisierung des Nenners:

$$x^2 + 1 = (x+j)(x-j).$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x^2+1} &= \frac{c_1}{x+j} + \frac{c_2}{x-j} \\ x-4 &= c_1(x-j) + c_2(x+j) \end{aligned}$$

Spezialfall $x = -j$.

$$\begin{aligned} -j-4 &= -2jc_1 \\ c_1 &= \frac{4+j}{2j} \\ &= \frac{1-4j}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 2j \\ c_2 &= \overline{c_1} \\ &= \frac{1}{2} + 2j. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - 2j\right)\frac{1}{x+j} + \left(\frac{1}{2} + 2j\right)\frac{1}{x-j}.$$

Die beiden Summanden sind konjugiert komplex. Es genügt also eine Stammfunktion eines Summanden zu berechnen, die Stammfunktion des andern ist konjugiert komplex. Da nur eine Stammfunktion gesucht ist, wird die Integrationskonstante vernachlässigt.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+j}dx &= \ln(x+j) \\
&= \ln(re^{j\varphi}) \\
&= \ln(r) + j\varphi.
\end{aligned}$$

Umrechnen von $x + j$ in Polarkoordinatem.

$$\begin{aligned}
x + j &= re^{j\varphi} \\
r &= \sqrt{x^2+1} \\
\varphi &= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(x).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{2} - 2j\right) \frac{1}{x+j}dx &= \left(\frac{1}{2} - 2j\right) \int \frac{1}{x+j}dx \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 2j\right) (\ln(r) + j\varphi)}_{z} \\
\int f(x)dx &= z + \overline{z} \\
&= 2\mathrm{re}(z) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\ln(r) + 2\varphi\right) \\
&= \ln(r) + 4\varphi \\
&= \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + 4\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctan(x) + 2\pi.
\end{aligned}$$

Da zu einer Stammfunktion eine beliebige Konstante addiert werden kann, wäre auch

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctan(x)$$

eine Stammfunktion von $f(x)$. Berechnung der Ableitung.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x - \frac{4}{1+x^2} \\
&= \frac{x}{x^2+1} - \frac{4}{1+x^2} \\
&= \frac{x-4}{x^2+1} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 44. Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{x^4 + x^3 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Lösung von Aufgabe 44. Polynomdivision

$$\frac{x^4 + x^3 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - x + 1 - \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 1}$$

Faktorisierung des Nenners

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{(x+1)^2} &= \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{(x+1)^2} \\ x + 4 &= c_1(x+1) + c_2 \\ &= c_1 x + c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 3$$

Integration des gebrochenen Teils

$$\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = \ln(|x+1|) - \frac{3}{x+1} + C.$$

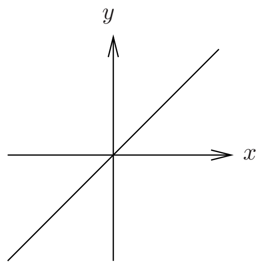
Integration der gesamten Funktion

$$\begin{aligned} &\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{x+4}{x^2+2x+1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(|x+1|) + \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

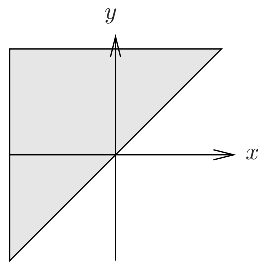
Aufgabe 45. Wie Sie wissen, ist eine Relation eine Menge von Paaren. Eine Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und somit eine Menge von zweistelligen Vektoren, die man als Punkte in einem Koordinatensystem darstellen kann. Zeichnen Sie die Elemente der folgenden Relationen als Punkte in einem Koordinatensystem ein:

$$=_{\mathbb{R}},\ \leq_{\mathbb{R}},\ >_{\mathbb{R}},\ \{(x,y) \mid y = x^2\},\ \{(x,y) \mid x = y^2\}.$$

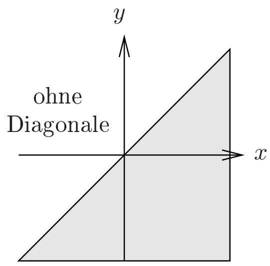
Lösung von Aufgabe 45.



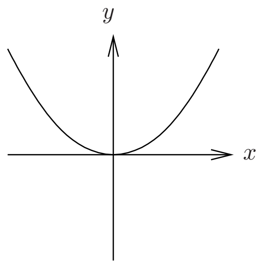
$\{(x,y) \mid x = y\}$



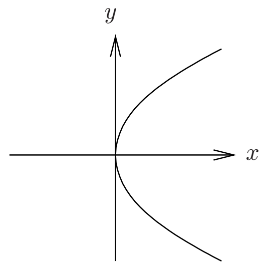
$\{(x,y) \mid x \leq y\}$



$\{(x,y) \mid x > y\}$



$\{(x,y) \mid y = x^2\}$



$\{(x,y) \mid x = y^2\}$

Aufgabe 46. Berechnen Sie die skalare Multiplikation

$$-3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie diese Operation grafisch durch Pfeile in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

Lösung von Aufgabe 46.

$$-3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 47. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die beiden Vektoren kollinear bzw. orthogonal?

Lösung von Aufgabe 47. Die Vektoren sind weder orthogonal noch kollinear. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 7.$$

Aufgabe 48. Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Ursprungskugel wenn es ein $r > 0$ gibt so dass

$$K = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| = r\}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ursprungskugel und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ursprungsgerade. Zeigen Sie, dass

$$|K \cap G| = 2.$$

Grafisch ausgedrückt bedeutet dies, dass eine Urspungskugel und eine Ursprungsgerade genau zwei Schnittpunkte haben. Berechnen Sie diese Schnittpunkte.

Lösung von Aufgabe 48. Sei $K, G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ursprungskugel bzw. eine Ursprungsgerade. Dann existiert ein $r > 0$ und ein $\vec{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ so dass

$$\begin{aligned} K &= \{\vec{x} \,|\, \|\vec{x}\| = r\} \\ G &= \{a\vec{s} \,|\, a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\vec{x} \in K \cap G$ genau dann wenn

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= r \text{ und} \\ \vec{x} &= a\vec{s} \end{aligned}$$

bzw.

$$\|a\vec{s}\| = r$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} |a|\|\vec{s}\| &= r \\ |a| &= \frac{r}{\|\vec{s}\|} \\ a &= \pm\frac{r}{\|\vec{s}\|}. \end{aligned}$$

Damit gibt es genau zwei Vektoren in der Schnittmenge

$$r\frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} \text{ und } -r\frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}.$$

Aufgabe 49. Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

kann man als Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen.

- Wie liegen die Punkte

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

  geometrisch zueinander? Zeichnen Sie ggf. zunächst ein paar Beispielpunkte ein.
- Eine zweistellige Relation auf $R \subseteq \mathbb{R}^2$ kann als Punktmenge in einem Koordinatensystem dargetellt werden. Wie liegen die Punktmengen R und R^{-1} geometrisch zueinander?
- Wie kann man folglich das Schaubild der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Schaubild von f grafisch konstruieren?

- Eine Relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt symmetrisch wenn

$$R^{-1} \quad = \quad R.$$

Welcher geometrischen Eigenschaft entspricht dies, wenn man R als Punktmenge darstellt?

- Eine Relation R heißt reflexiv auf $\mathbb{R}$ wenn

$$xRx \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

So ist z.B. $\leq_{\mathbb{R}}$ reflexiv auf $\mathbb{R}$, da $x \leq_{\mathbb{R}} x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welcher geometrischen Eigenschaft entspricht dies, wenn man R als Punktmenge zeichnet?

Lösung von Aufgabe 49.

- Die Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden.
- Die Punktmenge von $\mathbb{R}^{-1}$ erhält man aus der Punktmenge von R indem man sie an der Winkelhalbierenden spiegelt.
- Sei $f = (A, B, R)$. Dann ist $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$. Das Schaubild von f erhält man, indem man R als Punktmenge zeichnet. Das Schaublid von f^{-1} erhält man folglich aus dem Schaubild von f indem man es an der Winkelhalbierdenden spiegelt.
- R ist symmetrisch genau dann wenn die Punktmenge von R symmetrisch zur Winkelhalbierenden ist.
- R ist reflexiv auf $\mathbb{R}$ genau dann wenn die Punktmenge von R die komplette Winkelhalbierende enthält.

Aufgabe 50. Zeigen, dass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y}$ gleich Null ist. Sie dürfen dabei *nicht* verwenden, dass $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht. Das stimmt ja auch nur wenn keiner der beteiligten Vektoren gleich dem Nullvektor ist. Beginnen Sie stattdessen mit $\vec{x} \circ (\vec{x} \times \vec{y})$, setzen Sie die Definition des Kreuzprodukts und des Skalarprodukts ein und formen Sie so lange um, bis Null herauskommt.

Lösung von Aufgabe 50. Definition des Skalarprodukts und des Kreuzprodukts:

$$\begin{aligned}
&\vec{x} \circ (\vec{x} \times \vec{y}) \\
&\quad = \quad x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\quad = \quad x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1) \\
&\quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 51. Wenn man für beliebige Konstanten u, v den Graph einer Funktion

$$f(x, y) \quad = \quad ux + vy$$

dreidimensional zeichnet, entsteht das Bild einer Ursprungsebene. Zeigen Sie, dass die Menge

$$E \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

tatsächlich eine Ursprungsebene laut Definition ist. Sie müssen dazu E auf die Form

$$\{a\vec{r} + b\vec{s} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

bringen.

Lösung von Aufgabe 51. Sei

$$E \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu zeigen: E ist eine Ursprungsebene.
Zu zeigen: Es gibt $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$, nicht kollinear so dass

$$E \quad = \quad \{a\vec{r} + b\vec{s} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} E \quad &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ ux + vy \end{pmatrix} \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \quad \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \quad \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$$

ist somit

$$E \quad = \quad \{a\vec{r} + b\vec{s} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dass $\vec{r}$ und $\vec{s}$ nicht kollinear sind, erkennt man an den ersten beiden Komponenten. Wären $\vec{r}$ und $\vec{s}$ kollinear, dann gäbe es ein c so dass

$$\vec{s} \quad = \quad c\vec{r}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 1 &= 0 \\ v &= cu \end{aligned}$$

was nicht lösbar ist.

Aufgabe 52. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 52.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 53. Berechnen Sie $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass $\vec{z}$ tatsächlich senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht und dass gilt

$$||\vec{z}|| = ||\vec{x}||\,||\vec{y}||\sin(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Lösung von Aufgabe 53.

$$\vec{z} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Prüfen, dass $\vec{z}$ senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

$$\begin{aligned}
||\vec{x}|| &= \sqrt{14} \\
||\vec{y}|| &= \sqrt{6} \\
||\vec{z}|| &= \sqrt{35} \\
\cos(\alpha) &= \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{||\vec{x}||||\vec{y}||} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = 0.764. \\
\alpha &= 40.2^\circ \\
||\vec{x}||\,||\vec{y}||\sin(\alpha) &= \sqrt{14}\sqrt{6}\sin(40.2) \\
&= 5.92 \\
&= ||\vec{z}||.
\end{aligned}$$

Aufgabe 54. Zeigen Sie, dass

$$\vec{x} \times \vec{y} \quad = \quad -(\vec{y} \times \vec{x}).$$

Das Kreuzprodukt ist somit *nicht* kommutativ.

Beginnen Sie mit $\vec{x} \times \vec{y}$, setzen Sie die Definition des Kreuzprodukts ein und formen Sie so lange um, bis $-(\vec{y} \times \vec{x})$ herauskommt.

Lösung von Aufgabe 54.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \times \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} \\
&= -\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= -(\vec{y} \times \vec{x}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 55. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

und der Ebenen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung von Aufgabe 55. Mit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

gilt $\vec{x} \in G \cap E$ genau dann wenn

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für bestimmte a, b, c. Gleichsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Umformen ergibt

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten der Vektorgleichung sind

$$\begin{aligned} a - c &= -2 \\ -a - 2b - c &= -12 \\ 2a + b + c &= 11. \end{aligned}$$

Indem man ein Vielfaches der ersten Gleichung zur zweiten und dritten addiert, kann man a aus diesen elminieren:

$$\begin{aligned} -2b - 2c &= -14 \\ b + 3c &= 15 \end{aligned}$$

Addiert man die erste und zwei mal die zweite, wird b eliminiert:

$$4c = 16.$$

Daraus folgt $c = 4$. Einsetzen in

$$b + 3c = 15$$

ergibt $b = 3$. Einsetzen in

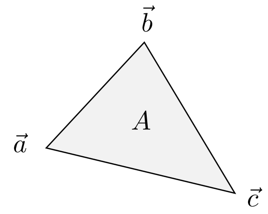
$$a - c = -2$$

ergibt $a = 2$. Den Schnittpunkt erhält man, indem man $c = 4$ in die Geradengleichung einsetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

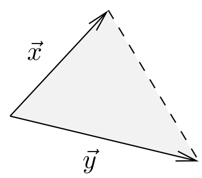
Aufgabe 56. Berechnen Sie die Fläche A des Dreiecks mit Eckpunkten

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



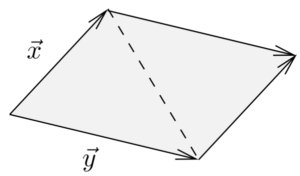
Lösung von Aufgabe 56. Zwei Seitenvektoren des Dreiecks erhält man durch

$$\vec{x} \;=\; \vec{b} - \vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} \;=\; \vec{c} - \vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Die Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| \;=\; \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \;=\; \sqrt{25+4+1} \;=\; \sqrt{30}.$$



Damit ist die Fläche des Dreiecks

$$\frac{\sqrt{30}}{2} \;=\; \sqrt{\frac{30}{4}} \;=\; \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Aufgabe 57. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie diese Operation grafisch durch Pfeile in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

Lösung von Aufgabe 57.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, deren Komponenten Funktionen von t sind, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung eines Vektors ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt die Produktregel der Ableitung gilt, d.h.

$$(\vec{x} \circ \vec{y})' = \vec{x}' \circ \vec{y} + \vec{x} \circ \vec{y}'.$$

Lösung von Aufgabe 58.

$$\begin{aligned}
(\vec{x} \circ \vec{y})' &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t) y_i(t) \right)' \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) y_i(t))' \qquad \text{(Summenregel der Ableitung)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) y_i(t) + x_i(t) y_i'(t) \qquad \text{(Produktregel der Ableitung)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(t) y_i'(t) \\
&= \vec{x}' \circ \vec{y} + \vec{x} \circ \vec{y}'.
\end{aligned}$$

Aufgabe 59. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Vektoren in ein Koordinatensystem ein und prüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Geodreieck.

Lösung von Aufgabe 59.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\vec{x}\circ\vec{y}}{||\vec{x}||||\vec{y}||}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{13}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{26}}\\ \alpha &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)\\ &\approx 78.69^\circ.\end{aligned}$$

Aufgabe 60. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$||\vec{x}+\vec{y}|| = \sqrt{||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2},$$

indem Sie ausschließlich Rechengesetze des Skalarprodukts und der Euklidischen Norm verwenden. Hinweis:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x}\circ\vec{x}}.$$

Lösung von Aufgabe 60. Da $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal sind, gilt $\vec{x}\circ\vec{y} = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}||\vec{x}+\vec{y}|| &= \sqrt{(\vec{x}+\vec{y})\circ(\vec{x}+\vec{y})}\\ &= \sqrt{\vec{x}\circ\vec{x}+\vec{x}\circ\vec{y}+\vec{y}\circ\vec{x}+\vec{y}\circ\vec{y}}\\ &= \sqrt{\vec{x}\circ\vec{x}+\vec{y}\circ\vec{y}}\\ &= \sqrt{||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 61. Ein komplexer Vektor ist ein Vektor, dessen Komponenten komplexe Zahlen sind. Alle Rechenoperationen, die Sie für reelle Vektoren kennen, gelten genau so auch für komplexe Vektoren — mit einer Ausnahme: dem Skalarprodukt. Eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts war ja die positive Definitheit, d.h.

$$\vec{x}\circ\vec{x} \geq 0 \text{ für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\vec{x}\circ\vec{x} = 0 \text{ genau dann wenn } \vec{x} = \vec{0}.$$

Diese Eigenschaft ist so nützlich, dass man sie gerne auf komplexe Vektoren übertragen würde. Problematisch dabei ist, dass für zwei komplexe Vektoren das Skalarprodukt in der Regel eine komplexe Zahl liefern würde, und der Vergleich ≥ 0 gar nicht definiert wäre. Die Lösung besteht darin, das komplexe Skalarprodukt für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ wie folgt zu definieren:

$$\vec{x}\circ\vec{y} = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n$$

wobei $\overline{x}_i$ die konjugiert komplexe Zahl von x_i ist. Zeigen Sie, dass das so definierte komplexe Skalarprodukt tatsächlich positiv definit ist. Zeigen Sie weiterhin, dass gilt

$$\vec{x}\circ\vec{y} = \overline{\vec{y}\circ\vec{x}}.$$

Das komplexe Skalarprodukt ist also *nicht* kommutativ!

Lösung von Aufgabe 61. Sei $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{x} \circ \vec{x} &= \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \cdots + \overline{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.\end{aligned}$$

Da jeder Summand $|x_i|^2$ größer oder gleich Null ist, ist die Summe auch größer oder gleich Null. Die Summe ist genau dann Null, wenn jeder Summand Null ist, d.h. wenn $\vec{x} = \vec{0}$. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{\vec{y} \circ \vec{x}} &= \overline{\overline{y}_1 x_1 + \overline{y}_2 x_2 + \cdots + \overline{y}_n x_n} \\ &= \overline{\overline{y}_1 x_1} + \overline{\overline{y}_2 x_2} + \cdots + \overline{\overline{y}_n x_n} \\ &= y_1 \overline{x}_1 + y_2 \overline{x}_2 + \cdots + y_n \overline{x}_n \\ &= \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n \\ &= \vec{x} \circ \vec{y}.\end{aligned}$$

Aufgabe 62. Berechnen Sie die Menge aller Schnittpunkte der Geraden

$$\begin{aligned}G &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ G' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Wie liegen die beiden Geraden geometrisch zueinander?

Lösung von Aufgabe 62. Sei $\vec{x} \in G \cap G'$. Dann exsitieren a, b so dass

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Definition der skalaren Multiplikation und der Vektor Addition sowie der Gleichheitsrelation von Tripeln ergibt

$$\begin{aligned}-a - b &= -1 \\ a - 2b &= 1 \\ 2a &= -2\end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $a = -1$. Einsetzen von a in die erste Gleichung ergibt $b = 2$. Diese Werte sind jedoch keine Lösung für die zweite Gleichung, folglich hat das LGS keine Lösung. Es gibt also keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren der beiden Geraden nicht kollinear sind, sind die beiden Geraden windschief.

Aufgabe 63. Sei

$$M \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 3 \right\}.$$

Beschreiben Sie, was für eine Figur entsteht, wenn man die Elemente von M als Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnet.

Lösung von Aufgabe 63. Kreis mit Radius 3 mit Mittelpunt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 64. Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 3x - y + z &= 4 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 64.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 \\ & 5 & 1 & -5 \\ & 5 & 1 & -6 \end{array}$$

Da die letzten beiden Gleichungen inkompatibel sind, hat das LGS keine Lösung.

Aufgabe 65. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie den Gauß Algorithmus wie im Skript durch. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.
- Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Lösung von Aufgabe 65.

$$
\begin{array}{ccc|c}
3 & 6 & 0 & 6 \\
2 & 4 & 3 & -5 \\
1 & 2 & 2 & -4 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 4 & 3 & -5 \\
1 & 2 & 2 & -4 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 3 & -9 \\
 & & 2 & -6 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 1 & -3 \\
 & & 2 & -6 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 1 & -3 \\
 & & 0 & 0
\end{array}
$$

Die Lösung ist

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -3 \\
x_2 &= \text{beliebig} \\
x_1 &= 2 - 2x_2
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} 2-2x_2 \\ x_2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 66. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ des LGS

$$
\begin{array}{rrr|r}
3 & 6 & 3 & 9 \\
2 & 5 & 5 & 10 \\
-3 & -3 & 6 & 3 \\
2 & 2 & -4 & -2
\end{array}
$$

mit dem Gauß Algorithmus. Der Rechenweg muss ersichtlich sein. Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Lösung von Aufgabe 66.

$$
\begin{array}{rrr|r}
3 & 6 & 3 & 9 \\
2 & 5 & 5 & 10 \\
-3 & -3 & 6 & 3 \\
2 & 2 & -4 & -2 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
2 & 5 & 5 & 10 \\
-3 & -3 & 6 & 3 \\
2 & 2 & -4 & -2 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
 & 1 & 3 & 4 \\
 & 3 & 9 & 12 \\
 & -2 & -6 & -8 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
 & 1 & 3 & 4 \\
 & & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Die Lösung ist

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \text{beliebig} \\
x_2 &= 4 - 3x_3 \\
x_1 &= 3 - 2x_2 - x_3 \;=\; 3 - 2(4 - 3x_3) - x_3 \;=\; -5 + 5x_3
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} -5 + 5x_3 \\ 4 - 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$