# Übungen zu Mathematik 1
# mit Musterlösungen

*Blatt 2*

---

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass

$$\ln(2-\sqrt{3}) \quad = \quad -\ln(2+\sqrt{3}).$$

**Lösung von Aufgabe 1.**

$$\begin{aligned} -\ln(2+\sqrt{3}) \quad &= \quad \ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \\ &= \quad \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\right) \\ &= \quad \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}\right) \\ &= \quad \ln(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Am 19.11.20 erschien folgender Tweet zum Wachstum der Anzahl positiver Corona Tests.

`https://twitter.com/jens140180/status/1329377474065674241`

Der renommierte Epidemiologe Prof. Dr. Christian Drosten erwiderte hierauf: “Sie verbreiten Desinformation”:

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329384476561059841`

Hat er recht?

Kurz darauf kommentiert Prof. Dr. Stefan Homburg

`https://twitter.com/SHomburg/status/1329406816531468295`

was sofort als “Regelverstoß” gemeldet wurde. Hat er gegen die Regeln der Mathematik verstoßen?

Weshalb entwickelte sich so eine lange und erfolglose Debatte, obwohl es doch um ein rein mathematisches Problem ging?

Das Ende vom Lied war übrigens:

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329457311270768644`

**Lösung von Aufgabe 2.** Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad e^{ax}$$

wächst exponentiell für jede Konstante $a > 0$. Im vorliegenden Fall ist aber $a$ keine Konstante sondern von $x$ (d.h. der Zeit) abhängig, was Homburg Drosten (leider vergeblich) zu erklären versucht. Ist zum Beispiel

$$a \quad = \quad \frac{1}{x}$$

dann ist $a > 0$ für alle $x > 0$ und

$$f(x) \quad = \quad e^{x/x} \; = \; e$$

eine konstante Funktion, die überhaupt nicht wächst und schon gar nicht exponentiell.

Für

$$a \quad = \quad \frac{1}{x^2}$$

ist $a > 0$ für alle $x \neq 0$ und

$$f(x) \quad = \quad e^{1/x}$$

sogar streng monoton fallend für $x \neq 0$ da

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{1}{x^2} e^{1/x} \; < \; 0.$$

Exponentielles Wachstum liegt laut Homburg vor wenn die Steigung einer Funktion proportional ist zum Funktionswert, d.h.

$$f'(x) \quad = \quad af(x)$$

für eine positive Konstante $a$. Dies ist eine Differentialgleichung mit Lösung

$$f(x) \quad = \quad f(0)e^{ax},$$

die tatsächlich exponentiell wächst falls $f(0) > 0$.

Tatsächlich wurden die Zahlen im Wochenabstand genannt, d.h. es handelt sich um eine Folge

$$f_n \quad = \quad f(n\Delta t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t = \; 1 \text{ Woche}$$

und

$$f_n \quad = \quad (1+c)f_{n-1}.$$

Diese Folge wächst exponentiell falls $c > 0$ eine Konstante ist. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} f_n &= (1+c)f_{n-1} \\ &= (1+c)^2 f_{n-2} \\ &= \dots \\ &= (1+c)^n f_0 \\ &= f_0 e^{n \ln(1+c)}. \end{aligned}$$

Da aber $c$ im vorliegenden Fall mit der Zeit immer kleiner wird, gilt das nicht. Ist z.B.

$$c = e^{1/n} - 1$$

dann ist $c > 0$ für alle $n > 0$ und

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 e^{n \ln(e^{1/n})} \\ &= f_0 e^{n/n} \\ &= f_0 e. \end{aligned}$$

Dies ist eine konstante Folge, die natürlich nicht exponentiell wächst.

Die Diskussion entstand, weil Drosten die Definition des Begriffs "exponentielles Wachstum" nicht kannte und auch nicht zur Kenntnis nehmen wollte. Dies zeigt, wie wichtig Definitionen sind. Stattdessen argumentierte er mit Beispielen, in denen der Wachstumsparameter eine Konstante war, was aber im Widerspruch zum ursprünglichen Tweet stand, der ja darauf abhob, dass das prozentuale Wachstum nicht konstant ist und mit der Zeit kleiner wird.

**Aufgabe 3.** Der anthropogene (d.h. vom Menschen verursachte) Anteil am gesamten $CO_2$ Ausstoß beträgt 3%, der Rest hat natürliche Ursachen.

Derzeit verursacht Deutschland ca. 2% des weitweiten, anthropogenen $CO_2$.

Um wie viel Prozent würde somit der $CO_2$ Ausstoß des Planeten zurückgehen, wenn Deutschland "klimaneutral" wäre?

Hinweis: Es sind *nicht* 6%.

**Lösung von Aufgabe 3.**

$$3\% \cdot 6\% = \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{6}{10000} = \frac{6/100}{100} = \frac{6}{100}\% = 0.06\%.$$

**Aufgabe 4.** Bringen Sie folgenden Term auf einen Bruch und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{\frac{x+1}{x}}{x + \frac{1}{x+2}}.$$

**Lösung von Aufgabe 4.**

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x+1}{x}}{x + \frac{1}{x+2}} &= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x(x+2)+1}{x+2}} \\ &= \frac{x+1}{x} \frac{x+2}{x^2+2x+1} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{x+2}{x(x+1)} \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.** Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{x}{x+1} + x = 0.$$

**Lösung von Aufgabe 5.** Multiplikation mit $x+1$ ergibt

$$\begin{aligned} x + x(x+1) &= 0 \\ x^2 + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung ist somit $x = 0$. Division durch $x$ ergibt

$$x + 2 = 0.$$

Die zweite Lösung ist damit $x = -2$.

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(e^x) = 1.$$

**Lösung von Aufgabe 6.** Damit

$$\cos(e^x) = 1$$

ist, muss

$$e^x = 2k\pi$$

sein für eine beliebige ganze Zahl $k$. Folglich gilt

$$x = \ln(2k\pi).$$

Da die ln-Funktion nur für positive Argumente definiert ist, muss $k \in \mathbb{N}$ gelten. Folglich ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{\ln(2k\pi) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

**Aufgabe 7.** Vereinfachen Sie den Term

$$x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(3^x)$$

so weit wie möglich.

**Lösung von Aufgabe 7.**

$$\begin{aligned} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(3^x) &= -x\ln(x) + x\ln(3) \\ &= x(\ln(3) - \ln(x)) \\ &= x \ln\left(\frac{3}{x}\right). \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.** Ersetzen Sie alle Vorkommen des Variablensymbols $x$ in dem Term

$$\sqrt{x + \sin(2x + 5)y}$$

durch den Term

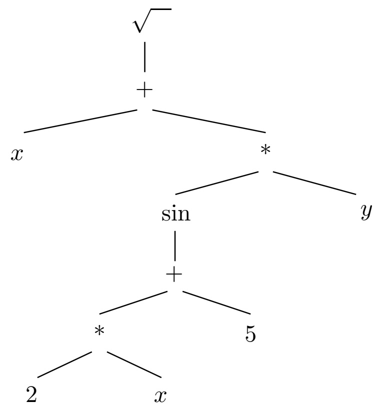
$$\cos(y) + 3.$$

Stellen Sie den Term vor und nach der Ersetzung jeweils als Baum dar.

**Lösung von Aufgabe 8.** Darstellung des Terms

$$\sqrt{x + \sin(2x + 5)y}$$

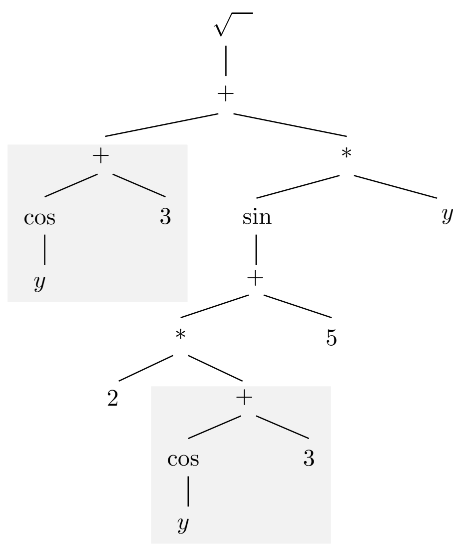
als Baum:




Ersetzt man alle $x$ durch $\cos(y) + 3$ erhält man den Term

$$\sqrt{(\cos(y) + 3) + \sin(2(\cos(y) + 3) + 5)y}$$

mit der Baum Darstellung



**Aufgabe 9.** Viele Aussagen in der Mathematik haben die Form

$$F \to G.$$

Zum Beispiel

$$\underbrace{(A \subseteq B \wedge B \subseteq C)}_{F} \to \underbrace{A \subseteq C}_{G}.$$

- Wenn man so eine Aussagen beweisen will, geht man so vor, dass man annimmt, dass $F$ wahr ist und mit diesem Wissen zeigt, dass auch $G$ wahr ist. Warum hat man damit bewiesen, dass $F \to G$ wahr ist?
- Wäre es auch korrekt, anzunehmen dass $G$ falsch ist und damit zu beweisen, dass auch $F$ falsch ist?
- Wäre es auch korrekt, anzunehmen dass $F$ falsch ist und damit zu beweisen, dass auch $G$ falsch ist?

**Lösung von Aufgabe 9.**

- Aus der Wahrheitstabelle folgt, dass $F \to G$ immer wahr ist ausser wenn $F$ wahr ist und $G$ falsch. Es genügt folglich zu zeigen, dass wenn $F$ wahr ist, $G$ nicht falsch sein kann, d.h. wahr sein muss.
- Aus der Wahrheitstabelle folgt, dass $F \to G$ und $\neg G \to \neg F$ logisch äquivalent sind. Statt $F \to G$ kann man also genauso gut $\neg G \to \neg F$ beweisen.
- Nein. Die Aussagen $F \to G$ und $\neg F \to \neg G$ sind logisch nicht äquivalent. Wenn z.B. $F$ wahr und $G$ falsch ist, ist $F \to G$ falsch, aber $\neg F \to \neg G$ wahr.

**Aufgabe 10.** Ähnlich wie es Rechengesetze für Zahlen gibt, z.B.

$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 + 2ab + b^2,$$

die für alle Zahlen $a, b$ gelten, gibt es auch Rechengesetze für Wahrheitswerte. So gilt z.B.

$$\neg F \vee G \quad = \quad F \to G$$

für alle Wahrheitswerte $F, G$. Hierbei bedeutet $\neg$ die Negation, $\vee$ oder und $\to$ wenn–dann. Die Negation bindet stärker als alle anderen logischen Funktionen, man kann sich also um $\neg F$ Klammern denken.

Formeln für Wahrheitswerte sind viel einfacher zu beweisen als Formeln für Zahlen, da es nur zwei Wahrheitswerte gibt aber unendlich viele Zahlen. Für die beiden Wahrheitswerte $F$ und $G$ gibt es somit nur vier Kombinationen. Damit lässt sich o.g. Formel in einer Wahrheitstabelle beweisen, indem man alle Kombinationen ausrechnet und zeigt, dass auf beiden Seiten immer der gleiche Wert herauskommt:

| $F$ | $G$ | $\neg F \vee G$ | $F \to G$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | f | f |
| f | w | w | w |
| f | f | w | w |

Beweisen Sie damit auch die sog. Gesetze von de Morgan:

$$\begin{aligned}\neg(F \wedge G) &= \neg F \vee \neg G \\ \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G.\end{aligned}$$

Beweisen Sie weiterhin

$$F \leftrightarrow G \quad = \quad (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

wobei $\leftrightarrow$ genau dann wenn bedeutet: $F \leftrightarrow G$ ist wahr, wenn $F$ und $G$ den gleichen Wahrheitswert haben und falsch sonst.

**Lösung von Aufgabe 10.**

| $F$ | $G$ | $\neg(F \wedge G)$ | $\neg F \vee \neg G$ | $\neg(F \vee G)$ | $\neg F \wedge \neg G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | f | f |
| w | f | w | w | f | f |
| f | w | w | w | f | f |
| f | f | w | w | w | w |

| $F$ | $G$ | $F \leftrightarrow G$ | $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | f | f |
| f | w | f | f |
| f | f | w | w |

**Aufgabe 11.** Die Symbole $\forall x$ und $\exists x$ bedeuten "für alle $x$ gilt" bzw. "es gibt ein $x$ so dass". Entscheiden Sie von den folgenden beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

$$\begin{aligned}&\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N}) \\ &\exists x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N})\end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 11.** Die Aussage

$$\forall x\ x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

ist falsch. Für z.B. $x = 3$ erhält man die Aussage

$$3 \in \mathbb{N} \rightarrow 3 \notin \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist falsch da $3 \in \mathbb{N}$ wahr ist und $3 \notin \mathbb{N}$ falsch ist. Somit ist es nicht wahr, dass für alle $x$ gilt, dass $x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N}$. Die Aussage

$$\exists x\ x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N}$$

ist wahr. Für z.B. $x = -1$ erhält man die Aussage

$$-1 \in \mathbb{N} \rightarrow -1 \notin \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist wahr da $-1 \in \mathbb{N}$ falsch ist und $-1 \notin \mathbb{N}$ wahr ist. Somit existiert ein $x$ so dass $x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N}$.

**Aufgabe 12.** Vereinfachen Sie die aussagenlogischen Terme

$$(F \to F) \to F \quad \text{und} \quad F \to (F \to F)$$

so weit wie möglich.

**Lösung von Aufgabe 12.** Aus

$$F \to G \quad = \quad \neg F \vee G$$

folgt

$$F \to F \quad = \quad \neg F \vee F \quad = \quad \mathrm{w}.$$

Damit gilt

$$\begin{array}{lllllll} (F \to F) \to F & = & \mathrm{w} \to F & = & \mathrm{f} \vee F & = & F \\ F \to (F \to F) & = & F \to \mathrm{w} & = & \neg F \vee \mathrm{w} & = & \mathrm{w}. \end{array}$$

**Aufgabe 13.** Vereinfachen Sie den Term

$$F \wedge (F \to G)$$

so weit wie möglich unter Anwendung der Gesetze der Aussagenlogik.

**Lösung von Aufgabe 13.**

$$\begin{array}{lll} F \wedge (F \to G) & = & F \wedge (\neg F \vee G) \\ & = & (F \wedge \neg F) \vee (F \wedge G) \\ & = & \text{ falsch } \vee (F \wedge G) \\ & = & F \wedge G. \end{array}$$

**Aufgabe 14.** Sei $F$ die Aussage

$$x \in \{2, 3, 5\}$$

und $G$ die Aussage

$$x \in \{2, 3, 7\}.$$

- Finden Sie zu jeder der folgenden Aussagen einen Wert für $x$ so dass die Aussage wahr ist und einen Wert für $x$ so dass die Aussage falsch ist.

$$F \wedge G,\ F \vee G,\ F \to G,\ G \to F,\ F \leftrightarrow G.$$

- Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $F \to G$ für $x = 2, 4, 5, 7$.

**Lösung von Aufgabe 14.**

- $F \wedge G$ wahr für $x = 2$, falsch für $x = 5$

- $F \vee G$ wahr für $x = 2$, falsch für $x = 4$
- $F \to G$ wahr für $x = 7$, falsch für $x = 5$
- $G \to F$ wahr für $x = 5$, falsch für $x = 7$
- $F \leftrightarrow G$ wahr für $x = 4$, falsch für $x = 5$

| | $x = 2$ | $x = 4$ | $x = 5$ | $x = 7$ |
|---|---|---|---|---|
| $F \to G$ | w | w | f | w |

**Aufgabe 15.** Finden Sie zwei Mengen $A, B$ für die weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$ gilt.

**Lösung von Aufgabe 15.** Ein Beispiel ist

$$A = \{1, 2\} \text{ und } B = \{2, 3\}.$$

**Aufgabe 16.** Nennen Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Hinweis: Es sind 8 Stück.

**Lösung von Aufgabe 16.**

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset.$$

**Aufgabe 17.** Finden Sie jeweils eine Zahl $x$ so dass gilt

- $x \in \mathbb{Z}$ aber $x \notin \mathbb{N}$
- $x \in \mathbb{Q}$ aber $x \notin \mathbb{Z}$
- $x \in \mathbb{R}$ aber $x \notin \mathbb{Q}$.

**Lösung von Aufgabe 17.**

- $-2 \in \mathbb{Z}$ aber $-2 \notin \mathbb{N}$
- $1/2 \in \mathbb{Q}$ aber $1/2 \notin \mathbb{Z}$
- $\pi \in \mathbb{R}$ aber $\pi \notin \mathbb{Q}$.

**Aufgabe 18.** Welche Aussagen sind wahr? Finden Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel.

- Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.
- Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element.
- Jede nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element.
- Jede nichtleere Teilmenge der Menge der positiven reellen Zahlen hat ein kleinstes Element.

**Lösung von Aufgabe 18.**

- Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element ist wahr.
- Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element ist falsch. Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ aber es gibt keine größte gerade natürliche Zahl.

- Jede nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element ist wahr.
- Jede nichtleere Teilmenge der Menge der positiven reellen Zahlen hat ein kleinstes Element ist falsch. Z.B. die Menge

  $$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 2\}$$

  ist eine Teilmenge der positiven reellen Zahlen, hat aber kein kleinstes Element.

**Aufgabe 19.** Finden Sie zwei endliche Mengen $A, B$ so dass sowohl $A \subseteq B$ als auch $A \in B$ gilt.

**Lösung von Aufgabe 19.** Zum Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \Big\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\Big\}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 20.** Es gibt Mengen, die Element von sich selbst sind wie z.B. die Menge $M$ aller Mengen oder die Menge $U$ aller Mengen mit unendlich vielen Elementen. "Normale" Mengen sind aber nicht Element von sich selbst, wie z.B. die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, da $\mathbb{N}$ eine Menge ist, aber keine natürliche Zahl. Es gilt also z.B. $M \in M$, $U \in U$, aber $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$.

Angenommen es gibt eine Menge, deren Elemente genau die Mengen sind, die nicht Element von sich selbst sind, d.h.

$$R = \{x \mid x \text{ ist Menge} \wedge x \notin x\}$$

ist eine Menge. Damit wäre z.B. $\mathbb{N} \in R$, $M \notin R$ und $U \notin R$. Die Frage ist nun, ob $R$ Element von sich selbst ist oder nicht.

- Nehmen Sie an, dass $R \in R$ und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.
- Da $R \in \mathbb{R}$ falsch ist, muss $R \notin R$ wahr sein. Schließen Sie hieraus, dass die Annahme, dass $R$ eine Menge ist, falsch gewesen sein muss.

**Lösung von Aufgabe 20.** Angenommen

$$R = \{x \mid x \text{ ist Menge} \wedge x \notin x\}$$

ist eine Menge.

- Annahme $R \in R$.

  Aus der Annahme folgt mit der Definition von $R$
  - $R$ ist Menge und
  - $R \notin \mathbb{R}$.

  Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $R \in R$.

- Annahme $R \notin R$.
  Aus der Annahme folgt mit der Definition von $R$, dass die Aussage "$R$ ist Menge und $R \notin R$" falsch ist, d.h.

  $$\neg(R \text{ ist Menge} \wedge R \notin R).$$

  Mit dem Gesetz von de Morgan folgt

  $$\neg(R \text{ ist Menge}) \vee R \in R.$$

  Da laut Annahme $R \notin R$ ist, folgt hieraus

  $$\neg(R \text{ ist Menge})$$

  bzw.

  $$R \text{ ist keine Menge.}$$

  Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $R$ eine Menge ist. Folglich ist $R$ keine Menge. Bei der Definition des Begriffs Menge muss man daher sehr vorsichtig sein, um Widersprüche zu vermeiden.