Heilbronn, den 27.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen

Blatt 3

Aufgabe 1. Anschaulich ist klar, dass wenn $F \to G$ wahr ist, es nicht sein kann, dass F wahr und G falsch ist.

Zeigen Sie durch Anwenden der Rechengesetze

$$\begin{aligned} F \to G &= \neg F \vee G \\ \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G \\ \neg\neg F &= F \end{aligned}$$

dass

$$F \to G \quad = \quad \neg(F \wedge \neg G).$$

Beweisen Sie hiermit, dass das Produkt aus einer rationalen Zahl $a \neq 0$ und einer irrationalen Zahl b, keine rationale Zahl sein kann. Es handelt sich hierbei um 3 Teilaussagen:

F: $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

G: $b \notin \mathbb{Q}$.

H: $ab \notin \mathbb{Q}$.

Zu zeigen ist somit die Aussage

$$(F \wedge G) \to H.$$

Diese Aussage ist wie oben gezeigt äquivalent zu

$$\neg(F \wedge G \wedge \neg H).$$

Den Beweis der Negation einer Aussagen kann man durch Widerspruch führen. Nehmen Sie dazu an, dass

$$F \wedge G \wedge \neg H$$

wahr ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch. Sie müssen hierzu nur die Definition einer rationalen Zahl verwenden. Machen Sie auch klar, an welcher Stelle Sie die Annahme $a \neq 0$ verwendet haben. Für $a = 0$ würde die Aussagen ja nicht stimmen!

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} F \to G &= \neg F \vee G \\ &= \neg\neg(\neg F \vee G) \\ &= \neg(\neg\neg F \wedge \neg G) \\ &= \neg(F \wedge \neg G). \end{aligned}$$

Annahme: $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $b \notin \mathbb{Q}$, $ab \in \mathbb{Q}$.

Da $a \in \mathbb{Q}$ existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $y \neq 0$ und

$$a = \frac{x}{y}.$$

Da $a \neq 0$ folgt $x \neq 0$.

Da $ab \in \mathbb{Q}$ existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $v \neq 0$ und

$$ab = \frac{u}{v}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}b &= \frac{u}{v} \\ b &= \frac{uy}{vx}. \end{aligned}$$

Die Division durch x durfte durchgeführt werden, da $x \neq 0$. Folglich kann b als Quotient von zwei ganzen Zahlen uy und vx dargestellt werden und ist somit rational, was im Widerspruch zur Annahme $b \notin \mathbb{Q}$ steht.

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel für zwei Aussagen $F(x)$ und $G(x)$ so dass

$$\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$$

falsch ist, aber

$$(\exists x\ F(x)) \wedge (\exists x\ G(x))$$

wahr.

Lösung von Aufgabe 2. Sei $F(x)$ die Aussage "$x \in \mathbb{N}$" und $G(x)$ die Aussage "$x \notin \mathbb{N}$". Dann ist

$$\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$$

falsch, da es kein x geben kann, dass sowohl in $\mathbb{N}$ als auch nicht in $\mathbb{N}$ ist.

Die Aussagen

$$(\exists x\ F(x)) \quad \text{und} \quad (\exists x\ G(x))$$

sind beide wahr. Folglich ist auch

$$(\exists x\ F(x)) \wedge (\exists x\ G(x))$$

wahr.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Gleichung

$$F \to (G \to H) \quad = \quad (F \wedge G) \to H.$$

Verwenden Sie hierzu keine Wahrheitstabellen sondern bereits bekannte Gesetze der Aussagenlogik wie

$$F \to G \quad = \quad \neg F \vee G,$$

die Gesetze von de Morgan und das Assoziativgesetz von $\wedge$ und $\vee$.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} F \to (G \to H) &= \neg F \vee (G \to H) \\ &= \neg F \vee (\neg G \vee H) \\ &= (\neg F \vee \neg G) \vee H \\ &= \neg(F \wedge G) \vee H \\ &= (F \wedge G) \to H. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei F die Aussage

$$x \in \{2, 3, 5\}$$

und G die Aussage

$$x \in \{2, 3, 7\}.$$

- Finden Sie zu jeder der folgenden Aussagen einen Wert für x so dass die Aussage wahr ist und einen Wert für x so dass die Aussage falsch ist.

$$F \wedge G,\ F \vee G,\ F \to G,\ G \to F,\ F \leftrightarrow G.$$

- Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $F \to G$ für $x = 2, 4, 5, 7$.

Lösung von Aufgabe 4.

- $F \wedge G$ wahr für $x = 2$, falsch für $x = 5$
- $F \vee G$ wahr für $x = 2$, falsch für $x = 4$
- $F \to G$ wahr für $x = 7$, falsch für $x = 5$
- $G \to F$ wahr für $x = 5$, falsch für $x = 7$
- $F \leftrightarrow G$ wahr für $x = 4$, falsch für $x = 5$

	$x = 2$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 7$
$F \to G$	w	w	f	w

Aufgabe 5. Die Symbole $\forall x$ und $\exists x$ bedeuten "für alle x gilt" bzw. "es gibt ein x so dass". Entscheiden Sie von den folgenden beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

$$\forall x\ (x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N})$$
$$\exists x\ (x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N})$$

Lösung von Aufgabe 5. Die Aussage

$$\forall x\ x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N}$$

ist falsch. Für z.B. $x = 3$ erhält man die Aussage

$$3 \in \mathbb{N} \to 3 \notin \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist falsch da $3 \in \mathbb{N}$ wahr ist und $3 \notin \mathbb{N}$ falsch ist. Somit ist es nicht wahr, dass für alle x gilt, dass $x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N}$. Die Aussage

$$\exists x \; x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N}$$

ist wahr. Für z.B. $x = -1$ erhält man die Aussage

$$-1 \in \mathbb{N} \to -1 \notin \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist wahr da $-1 \in \mathbb{N}$ falsch ist und $-1 \notin \mathbb{N}$ wahr ist. Somit existiert ein x so dass $x \in \mathbb{N} \to x \notin \mathbb{N}$.

Aufgabe 6. Eine Relation R heißt transitiv wenn gilt:

$$\forall a, b, c \; (aRb \wedge bRc) \to aRc.$$

So ist z.B. die Relation $\leq_{\mathbb{N}}$ transitiv. Die Aussage

$$(a \leq_{\mathbb{N}} b \wedge b \leq_{\mathbb{N}} c) \to a \leq_{\mathbb{N}} c$$

ist wahr für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine endliche Relation, die transitiv ist.
- Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine unendliche Relation, die nicht transitiv ist.

Lösung von Aufgabe 6. Beispiele für endliche, transitive Relationen sind

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \\ R &= \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\} \\ R &= \{(3,4)\} \\ R &= \emptyset. \end{aligned}$$

Beispiele für unendliche, nicht transitive Relationen sind

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\} \\ R &= \leq_{\mathbb{N}} \setminus \{(3,7)\} \\ R &= \neq_{\mathbb{N}} . \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Die Menge $(\mathbb{R}^2)^3$ ist die Menge aller Tripel mit Komponenten aus $\mathbb{R}^2$. Ein Tripel von Paaren ist z.B.

$$\big((2,2),(-3,0),(5,6)\big).$$

Nennen Sie ein weiteres Element aus der Menge $(\mathbb{R}^2)^3$.

Lösung von Aufgabe 7. Ein Element ist z.B.

$$((1,2),(-3,0),(4,4)) .$$

Aufgabe 8. Ist das Tripel

$$f = \big(\{1,2,3\},\{4,5\},\{(1,4),(2,4),(3,4)\}\big)$$

eine Funktion? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 8. Es ist eine Funktion, da

$$\{(1,4),(2,4),(3,4)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{4,5\}$$

und es zu jedem $a \in \{1,2,3\}$ genau ein $b \in \{4,5\}$ gibt mit

$$(a,b) \in \{(1,4),(2,4),(3,4)\}.$$

Aufgabe 9.

- Gibt es eine Relation R so dass
$$\big(\{1,2\},\{3\},R\big)$$
eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.
- Nennen Sie alle Relationen R so dass
$$\big(\{1\},\{2,3\},R\big)$$
eine Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 9.

- Einzige Möglichkeit ist $R = \{(1,3),(2,3)\}$.
- Es gibt zwei Möglichkeiten:
$$\begin{aligned} R &= \{(1,2)\} \\ R &= \{(1,3)\} \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Sei f eine reelle Funktion.

- Das Schaubild von
$$g(x) = f(x) + c$$
ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach oben verschoben.
- Das Schaubild von
$$g(x) = f(x+c)$$
ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach links verschoben.
- Das Schaubild von
$$g(x) = af(x)$$
ist das Schaubild von $f(x)$ um Faktor a vertikal gestreckt.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(ax)$$

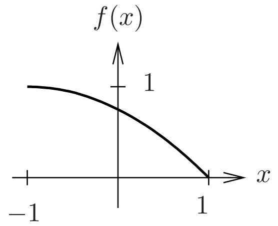
ist das Schaubild von $f(x)$ horizontal um Faktor a gestaucht.

Ist a negativ, bewirkt dies zusätzlich eine Spiegelung. Ein Streckfaktor kleiner eins bewirkt eine Stauchung und umgekehrt.

Sei

$$f \in [-1, 1] \to [0, 1]$$

durch folgendes Bild gegeben:

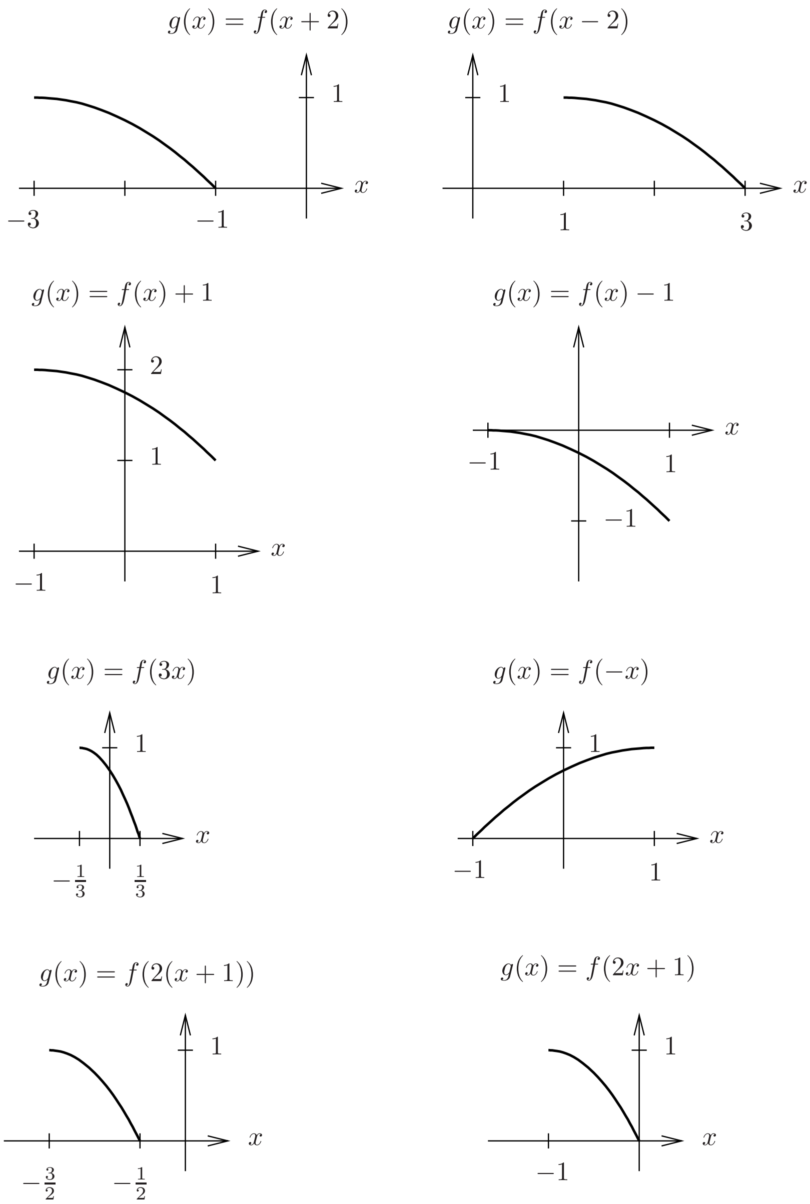


Skizzieren Sie den Graph der Funktion $g(x)$ und geben Sie auch an, von wo nach wo diese abbildet für folgende Fälle:

- $g(x) = f(x + 2)$
- $g(x) = f(x - 2)$
- $g(x) = f(x) + 1$
- $g(x) = f(x) - 1$
- $g(x) = f(3x)$
- $g(x) = f(-x)$
- $g(x) = f(2(x + 1))$
- $g(x) = f(2x + 1)$

Lösung von Aufgabe 10.

- $g \in [-3, -1] \to [0, 1]$, $g(x) = f(x + 2)$
- $g \in [1, 3] \to [0, 1]$, $g(x) = f(x - 2)$
- $g \in [-1, 1] \to [1, 2]$, $g(x) = f(x) + 1$
- $g \in [-1, 1] \to [-1, 0]$, $g(x) = f(x) - 1$
- $g \in [-1/3, 1/3] \to [0, 1]$, $g(x) = f(3x)$
- $g \in [-1, 1] \to [0, 1]$, $g(x) = f(-x)$
- $g \in [-3/2, -1/2] \to [0, 1]$, $g(x) = f(2(x + 1))$
- $g \in [-1, 0] \to [0, 1]$, $g(x) = f(2x + 1)$



Aufgabe 11. Die Komposition von rellen Funktionen ist definiert durch

$$\circ \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \quad (f \circ g)(x) \quad = \quad f(g(x)).$$

Das Argument der Funktion $\circ$ ist ein Paar von Funktionen aus der Mengen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der Funktionswert ist wiederum eine Funktion aus der Menge $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Addition von reellen Funktionen ist definiert durch

$$+ \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Definieren Sie entsprechend die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl.

Lösung von Aufgabe 11. Die Multiplikation nimmt als Argument ein Paar bestehend aus einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ und einer Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. ein Element aus $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Der Funktionswert ist wiederum eine Funktion $af \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\cdot \in (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \to \mathbb{R})) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \quad (af)(x) = af(x).$$

Aufgabe 12. Wie viele Elemente hat die Menge $\{0,1,2\} \to \{0,1\}$? Stellen Sie ein Element dieser Menge als Tripel (A, B, R) dar.

Lösung von Aufgabe 12. $\{0,1,2\} \to \{0,1\}$ hat $2^3 = 8$ Elemente.

$$f = (\{0,1,2\}, \{0,1\}, \{(0,0), (1,0), (2,1)\})$$

Aufgabe 13. Wie lässt sich formal ausdrücken, dass f eine Funktion ist, die jeder reellen Zahl außer 3 und 5 ein Tripel von natürlichen Zahlen zuordnet?

Lösung von Aufgabe 13.

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{3,5\} \to \mathbb{N}^3$$

Aufgabe 14. Gegeben ist die Menge

$$A = \{2,3,4,5\}$$

und die Funktion

$$f = (A, A, \{(2,2), (3,4), (4,3), (5,2)\}).$$

Finden Sie eine Relation R so dass

$$f \circ f \circ f = (A, A, R).$$

Lösung von Aufgabe 14. Zunächst berechnet man

$$\begin{aligned}
f(f(f(2))) &= f(f(2)) &= f(2) &= 2\\
f(f(f(3))) &= f(f(4)) &= f(3) &= 4\\
f(f(f(4))) &= f(f(3)) &= f(4) &= 3\\
f(f(f(5))) &= f(f(2)) &= f(2) &= 2
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f \circ f \circ f = (A, A, \{(2,2), (3,4), (4,3), (5,2)\}).$$

Aufgabe 15. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei injektive Funktionen. Begründen Sie, weshalb dann auch $f \circ g$ eine injektive Funktion ist. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie über f, g wissen und was Sie über $f \circ g$ zeigen müssen.

Lösung von Aufgabe 15. Annahme: $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind injektiv.
zu zeigen: $f \circ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\; x_1 \neq x_2 \to (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2).$$

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$. Da g injektiv ist, folgt

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

Da f injektiv ist, folgt

$$f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)).$$

Damit ist

$$(f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2).$$

Aufgabe 16. Die Funktion $f \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{Q}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = x/y.$$

Ist f injektiv bzw. surjektiv? Geben Sie jeweils einen Satz Begründung.

Lösung von Aufgabe 16. Die Funktion ist nicht injektiv, da z.B.

$$f(1,1) = f(2,2) \text{ aber } (1,1) \neq (2,2).$$

Die Funktion ist surjektiv, da man zu jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ einen Zähler $x \in \mathbb{Z}$ und einen Nenner $y \in \mathbb{N}$ finden kann so dass

$$q = x/y.$$

Aufgabe 17. Für jede Relation R ist die Umkehrrelation R^{-1} definiert durch

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid bRa\}.$$

Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Finden Sie eine Relation R so dass

- (A, A, R) und (A, A, R^{-1}) Funktionen sind
- (A, A, R) eine Funktion ist, aber (A, A, R^{-1}) keine Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 17.

- Mit
$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$
ist sowohl (A, A, R) und (A, A, R^{-1}) eine Funktion.
- Mit
$$R = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$$
ist (A, A, R) eine Funktion aber (A, A, R^{-1}) ist keine Funktion.

Aufgabe 18. Sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \quad &\in \quad \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}^2 \ \rightarrow \ \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}, \\ \neg \quad &\in \quad \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\} \ \rightarrow \ \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\} \end{aligned}$$

injektiv bzw. surjektiv?

Lösung von Aufgabe 18. Die Funktionen

$$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \quad \in \quad \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}^2 \ \rightarrow \ \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\},$$

sind nicht injektiv aber surjektiv.

Die Funktion

$$\neg \quad \in \quad \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\} \ \rightarrow \ \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$$

ist injektiv und surjektiv.

Aufgabe 19. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + e^x \\ g(x) &= x \sin(x+1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(g(x))$ und für $g(f(x))$.

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x \sin(x+1)) \\ &= (x \sin(x+1))^2 + e^{x \sin(x+1)} \\ g(f(x)) &= g(x^2 + e^x) \\ &= (x^2 + e^x) \sin(x^2 + e^x + 1). \end{aligned}$$