

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $P(x)$ eine Aussage, in der x auftritt, z.B. “ x ist rot”.

Die Aussage “nicht jedes Objekt ist rot” lässt sich formal ausdrücken durch

$$\neg \forall x P(x).$$

Diese Aussage ist äquivalent zu “es gibt ein Objekt, das nicht rot ist” bzw.

$$\exists x \neg P(x).$$

Tatsächlich gilt für jede Aussage $P(x)$ das Gesetz

$$\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x).$$

Beweisen Sie hiermit und unter Verwendung von $\neg \neg P(x) = P(x)$, dass

$$\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x).$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} \forall x \neg P(x) &= \neg \neg \forall x \neg P(x) \\ &= \neg \exists x \neg \neg P(x) \\ &= \neg \exists x P(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{4, 5\}. \end{aligned}$$

Begründen Sie weshalb es in der Menge $A \rightarrow B$ keine bijektive Funktion gibt.

Lösung von Aufgabe 2. Da A mehr Elemente als B hat, kann es keine injektive Funktion in $A \rightarrow B$ geben. Es muss mindestens zwei Elemente in A geben, denen das selbe Element aus B zugeordnet wird.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \{1, 2\}.$$

Begründen Sie, weshalb

$$A^3 \cap (A \times A^2) = \emptyset.$$

Lösung von Aufgabe 3. Jedes Element von A^3 ist ein Paar, dessen erste Komponente ein Paar ist. Jedes Element von $A \times A^2$ ist ein Paar dessen erste Komponente Element von A ist. Da A keine Paare enthält, kann kein Element von A^3 auch Element von $A \times A^2$ sein, folglich ist die Schnittmenge leer.

Aufgabe 4. Sei

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 \sin(xy).$$

Finden Sie zwei Funktionen g, h so dass

$$f = g \circ h.$$

Lösung von Aufgabe 4. Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.

$$\begin{aligned} h &\in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, & h(x, y) &= (x^2, \sin(xy)) \\ g &\in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= xy. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

Finden Sie eine Relation $R \subseteq A \times B$ so dass

- a.) (A, B, R) und (B, A, R^{-1}) Funktionen sind.
- b.) (A, B, R) eine Funktion ist, (B, A, R^{-1}) aber keine Funktion ist.
- c.) (A, B, R) keine Funktion ist, (B, A, R^{-1}) aber eine Funktion ist.
- d.) Weder (A, B, R) noch (B, A, R^{-1}) eine Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 5.

- a.) $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}.$
- b.) $R = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}.$
- c.) $R = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8)\}.$
- d.) $R = \{(1, 6)\}.$

Aufgabe 6. Berechnen Sie für alle Wahrheitswerte F, G den Wahrheitswert von

$$(F \rightarrow G) \rightarrow F.$$

Lösung von Aufgabe 6.

F	G	$F \rightarrow G$	$(F \rightarrow G) \rightarrow F$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	w	f
f	f	w	f

Aufgabe 7. In der Vorlesung wurden Terme als Zeichenketten definiert. Folglich sind die Terme

$$1 + 1$$

und

$$2$$

unterschiedlich: Die erste Zeichenkette ist 3 Symbole lang, die zweite nur eines. Trotzdem besteht kein Zweifel daran, dass die Aussage

$$1 + 1 = 2$$

wahr ist. Versuchen Sie den scheinbaren Widerspruch zu erklären. Sind die bekannten Rechengesetze wie z.B. das Distributivgesetz

$$x(y + z) = xy + xz$$

nun richtig oder falsch?

Lösung von Aufgabe 7. Die Terme $1 + 1$ und 2 sind tatsächlich als Zeichenketten betrachtet ungleich. Die *Bedeutung* der beiden Terme ist jedoch gleich. Man sagt auch, die Terme sind *syntaktisch* ungleich aber *semantisch* gleich. Im Alltagsleben interessiert man sich natürlich vor allem für die Bedeutung, d.h. die Semantik. Andererseits haben Computer keine Ahnung, was Zeichenketten bedeuten und können diese nur nach syntaktischen Regeln umformen.

Aufgabe 8. Finden Sie Wahrheitswerte für F, G, H so dass sowohl

$$F \rightarrow (G \rightarrow H)$$

wahr ist als auch

$$(F \rightarrow G) \rightarrow H$$

falsch.

Lösung von Aufgabe 8. Wenn F falsch ist, dann ist

$$F \rightarrow (G \rightarrow H)$$

wahr, unabhängig davon, was G und H ist.

Außerdem ist dann auch $F \rightarrow G$ wahr. Damit in diesem Fall

$$(F \rightarrow G) \rightarrow H$$

falsch ist, muss H falsch sein. Der Wahrheitswert von G ist beliebig.

Aufgabe 9. Sei A eine Menge, R eine Relation und c ein Objekt mit folgender Eigenschaft:

für alle x gilt

$$(x, c) \in R \leftrightarrow x \in A \text{ und } (x, x) \notin R.$$

- Zeigen Sie, dass hieraus folgt $c \notin A$ und $(c, c) \notin R$.
- Sei nun A die Menge aller Mengen und R die Element-von Relation. Zeigen Sie mit dem o.g. Ergebnis, dass

$$c = \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}$$

keine Menge sein kann.

- Veranschaulichen Sie sich die Situation dadurch, dass A die Einwohner eines Dorfes sind, R die Menge aller Paare (x, y) ist mit y schneidet Haare von x , und c ein Frisör, der genau denen die Haare schneidet, die in dem Dorf wohnen und sich die Haare nicht selbst schneiden. Es wird dann schnell klar, dass c kein Einwohner des Dorfes sein kann.

Lösung von Aufgabe 9.

- Da die Eigenschaft

$$(x, c) \in R \leftrightarrow x \in A \text{ und } (x, x) \notin R$$

für alle x gilt, gilt sie insbesondere auch für den Spezialfall $x = c$, d.h.

$$(c, c) \in R \leftrightarrow c \in A \text{ und } (c, c) \notin R.$$

Wäre $c \in A$ wahr, würde hieraus folgen

$$(c, c) \in R \leftrightarrow (c, c) \notin R,$$

was falsch ist. Folglich ist die Annahme $c \in A$ falsch und es muss gelten $c \notin A$. Hieraus folgt

$$(c, c) \in R \leftrightarrow \text{falsch}$$

und somit $(c, c) \notin R$.

- Sei A die Menge aller Mengen, R die Element-von Relation und

$$c = \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}.$$

Damit erfüllt c die folgende Eigenschaft:

für alle x gilt

$$x \in c \leftrightarrow x \in A \text{ und } (x, x) \notin R.$$

Wie oben allgemein gezeigt, folgt hieraus $c \notin A$, d.h. c ist keine Menge.

Aufgabe 10. Beweisen Sie, dass die Funktionskomposition assoziativ ist, d.h.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x). \end{aligned}$$

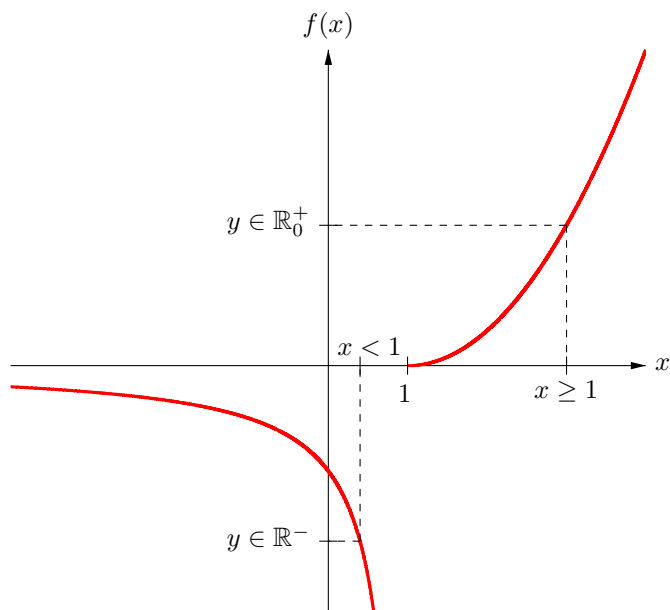
Aufgabe 11. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f .

Hinweis: Eine Skizze der Funktion hilft.

Lösung von Aufgabe 11.



Es gilt

$$f^{-1} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei

$$g \in \{x \mid x \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad g(x) = (x-1)^2$$

und

$$h \in \{x \mid x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^-, \quad h(x) = \frac{3}{x-1}.$$

Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \geq 1 \\ h(x) & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$

Weiter ist

$$g^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \{x \mid x \geq 1\}, \quad g^{-1}(y) = \sqrt{y} + 1$$

und

$$h^{-1} \in \mathbb{R}^- \rightarrow \{x \mid x < 1\}, \quad h^{-1}(y) = \frac{3}{y} + 1.$$

Folglich ist

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} + 1 & \text{falls } y \in \mathbb{R}_0^+ \\ \frac{3}{y} + 1 & \text{falls } y \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Funktion

$$f = (\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{(1, 4), (2, 3)\}).$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$f^{-1} = (\{3, 4\}, \{1, 2\}, \{(4, 1), (3, 2)\}).$$

Aufgabe 13. Sei

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls ja, berechnen Sie diese, falls nein, begründen Sie weshalb f keine Umkehrfunktion hat.

Lösung von Aufgabe 13. f ist bijektiv. Für $y \in \mathbb{R}_0^+$ erhält man das zugehörige $x \in \mathbb{R}_0^+$ durch Lösen der Gleichung.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1} \\ y^2 &= e^{\sqrt{x}} - 1 \\ y^2 + 1 &= e^{\sqrt{x}} \\ \ln(y^2 + 1) &= \sqrt{x} \\ \ln(y^2 + 1)^2 &= x. \end{aligned}$$

Damit ist

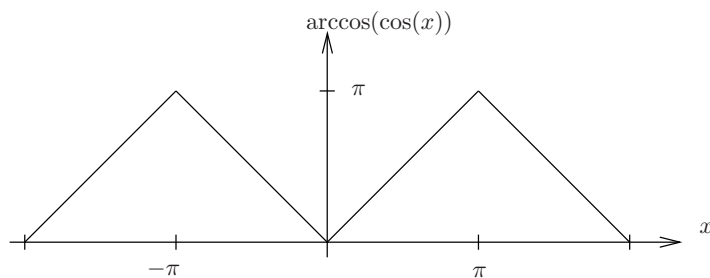
$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f^{-1}(y) = \ln(y^2 + 1)^2.$$

Aufgabe 14. Skizzieren Sie die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \arccos(\cos(x))$$

im Bereich $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Lösung von Aufgabe 14.



Aufgabe 15. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(2x - 3) = \frac{1}{2}.$$

Begründen Sie bei jedem Umformungsschritt, weshalb die Lösungsmenge dabei erhalten bleibt.

Lösung von Aufgabe 15. Die Gleichung ist nur definiert falls $2x - 3 > 0$. Im Folgenden darf dies also vorausgesetzt werden. Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten gibt

$$e^{\ln(2x-3)} = e^{1/2}.$$

Da $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$2x - 3 = \sqrt{e}.$$

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten gibt

$$2x = \sqrt{e} + 3.$$

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x/2$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten gibt

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{e} + 3).$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \frac{1}{2} (\sqrt{e} + 3) \right\}.$$

Aufgabe 16. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Schaubild gegeben ist. Beschreiben Sie, welche geometrischen Transformationen (Verschiebung, Streckung, usw.) Sie nacheinander auf das Schaubild von f anwenden müssen, um das Schaubild von

$$g(x) = 2f(4x - 1)$$

zu erhalten.

Lösung von Aufgabe 16.

- Schaubild von f um 1 nach rechts verschieben ergibt Schaubild von $f(x - 1)$.
- Das entstandene Schaubild um Faktor 4 in x -Richtung stauchen liefert Schaubild von $f(4x - 1)$.
- Das entstandene Schaubild um Faktor 2 in y -Richtung strecken ergibt das Schaubild von $g(x)$.

Aufgabe 17. Eine Folge x_n heißt

- monoton steigend, wenn $x_n \leq x_{n+1}$,
- streng monoton steigend, wenn $x_n < x_{n+1}$,
- monoton fallend, wenn $x_n \geq x_{n+1}$,
- streng monoton fallend, wenn $x_n > x_{n+1}$,
- alternierend, wenn $x_n x_{n+1} < 0$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Prüfen Sie welche der unten angegebenen Folgen diese Eigenschaften besitzen. Geben Sie zu jeder Folge an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist. Hinweis: Meistens sieht man das sehr schnell wenn man die ersten paar Glieder der Folge aufschreibt und den qualitativen Verlauf der Folge skizziert.

- a) $x_n = (-2)^n / n^3$
- b) $x_n = (n - 1) \sin(n)$
- c) $x_n = n^2 (-1)^n$
- d) $x_n = n! / (n + 1)^n$
- e) $x_n = 1 / \sqrt{n}$
- f) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$
- g) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n / 2 + 1 / x_n$

Hinweis zum letzten Beispiel: Nehmen Sie an, dass die Folge einen Grenzwert $\hat{x}$ hat. Für diesen Grenzwert muss dann gelten

$$\hat{x} = \hat{x} / 2 + 1 / \hat{x}.$$

Aus dieser Gleichung können Sie mögliche Grenzwerte bestimmen.

Lösung von Aufgabe 17.

- a) $x_n = (-2)^n / n^3$: alternierend, unbestimmt divergent.
- b) $x_n = (n - 1) \sin(n)$: weder monoton noch alternierend, unbestimmt divergent.
- c) $x_n = n^2 (-1)^n$: alternierend, unbestimmt divergent.
- d) $x_n = n! / (n + 1)^n$: streng monoton fallend, konvergent mit Grenzwert 0.
- e) $x_n = 1 / \sqrt{n}$: streng monoton fallend, konvergent mit Grenzwert 0.

- f) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$: streng monoton steigend, bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ .
- g) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n/2 + 1/x_n$: streng monoton fallend, konvergent mit Grenzwert $\sqrt{2}$.

Aufgabe 18. Prüfen Sie, ob folgende Folgen konvergieren und falls ja berechnen Sie die (uneigentlichen) Grenzwerte.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5n^4 + n^3 + 2}{2n^2 - n} \\ x_n &= \frac{(2n+1)(4n-3)(5n-4)}{(3n+6)(2n+5)(n+3)} \\ x_n &= \frac{n \ln(n)}{n^2 + 3} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 18. Mit den Rechengesetzen für Grenzwerte von Folgen gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + n^3 + 2}{2n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n + 2/n^2}{2 - 1/n} \\ &= \infty/2 \\ &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(4n-3)(5n-4)}{(3n+6)(2n+5)(n+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+6} \times \frac{4n-3}{2n+5} \times \frac{5n-4}{n+3} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{1} \\ &= \frac{20}{3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n)}{n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)/n}{1 + 3/n^2} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Sei

$$x_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Finden Sie ein N so dass

$$|x_n| < 0.1 \quad \text{für alle } n > N.$$

Hinweis: Sie müssen nicht das kleinste N finden, es genügt irgend eines.

Lösung von Aufgabe 19. Für alle n gilt

$$|\sin(n)| \leq 1.$$

Wenn also

$$\frac{1}{n} < 0.1$$

dann gilt auch

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| < 0.1.$$

Die Ungleichung $1/n < 0.1$ ist erfüllt wenn $n > 1/0.1$, d.h. $n > 10$. Für $N = 10$ gilt somit

$$|x_n| < 0.1 \quad \text{für alle } n > N.$$

Aufgabe 20. In Bild 1 ist die Konstruktion einer sog. Koch Kurve dargestellt. Die Koch Kurve der Ordnung 1 ist ein gerades Streckenstück der Länge 1cm. Die Koch Kurve der Ordnung $i + 1$ ist gleich der Koch Kurve der Ordnung i wobei jedes Geradenstück durch 4 Geradenstücke ersetzt wird, deren Länge jeweils ein Drittel der Länge des Ausgangsstücks ist. Berechnen Sie für jedes n die Gesamtlänge der Koch Kurve der Ordnung n . Was ist der Grenzwert der Länge der Koch Kurve für $n \rightarrow \infty$? Warnung: eine Koch Kurve ist ein sog. Fraktal und die sehen nicht nur schön aus sondern haben auch sehr merkwürdige Eigenschaften.

Lösung von Aufgabe 20. Per Konstruktion gilt für die Länge x_n der Kochkurve der Ordnung n :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{i+1} &= 4/3 x_i. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Formel

$$x_n = (4/3)^{n-1}.$$

Dies ist eine bestimmt divergente Folge mit uneigentlichem Grenzwert ∞ .

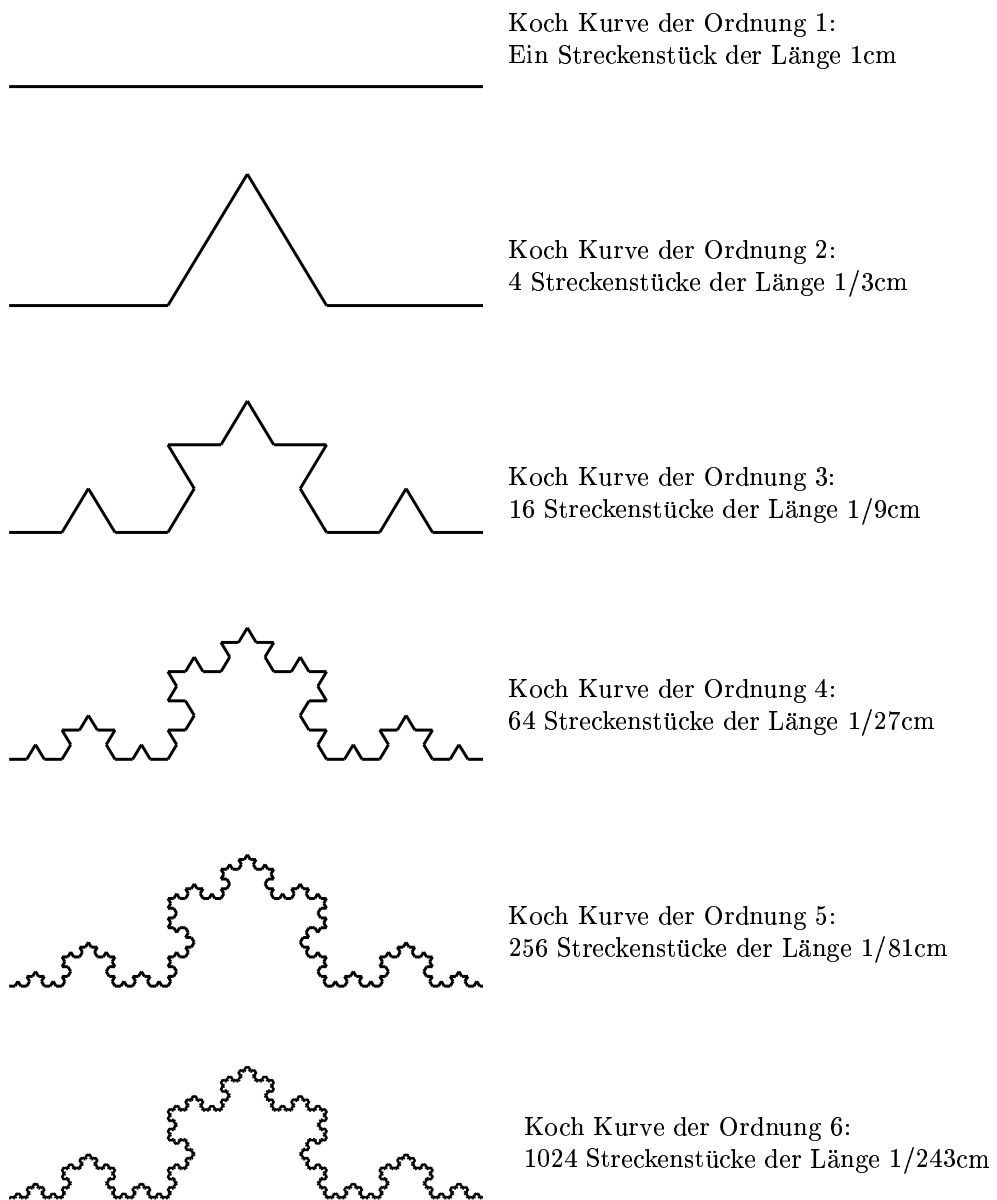


Abbildung 1: Koch Kurven zur Konstruktion von Eiskristallen.