

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $P(x)$ eine Aussage, in der x auftritt, z.B. “ x ist rot” und A eine Menge, z.B. die Menge aller Autos. Die Aussage “jedes Auto ist rot” lässt sich unter Verwendung eines relativierten Quantors ausdrücken durch

$$\forall x \in A P(x).$$

Diese Aussage ist äquivalent zu “für jedes Objekt x gilt, wenn x ein Auto ist, dann ist x rot”, bzw.

$$\forall x (x \in A \rightarrow P(x)).$$

Ähnlich lassen sich auch relativierte Existenzquantoren durch normale Quantoren ersetzen:

$$\exists x \in A P(x) = \exists x (x \in A \wedge P(x)).$$

Verwenden Sie das Gesetz für normale Quantoren

$$\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x),$$

das für beliebige Aussagen $P(x)$ gilt, um das entsprechende Gesetz für relativierte Quantoren

$$\neg \forall x \in A P(x) = \exists x \in A \neg P(x)$$

herzuleiten. Hinweis: Sie benötigen hierfür u.a. das Gesetz von de Morgan.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} \neg \forall x \in A P(x) &= \neg \forall x (x \in A \rightarrow P(x)) \\ &= \exists x \neg (x \in A \rightarrow P(x)) \\ &= \exists x \neg (\neg x \in A \vee P(x)) \\ &= \exists x (x \in A \wedge \neg P(x)) \\ &= \exists x \in A \neg P(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Nennen Sie je ein Element der Menge

$$(\mathbb{R}^2)^3 \text{ und } (\mathbb{R}^3)^2.$$

Sind die Mengen gleich? Elemente dieser Mengen werden später als Matrizen bezeichnet. Geschachtelte kartesische Produkte sind also durchaus wichtig.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}((1, 2), (3, 4), (5, 6)) &\in (\mathbb{R}^2)^3 \\ ((1, 2, 3), (4, 5, 6)) &\in (\mathbb{R}^3)^2.\end{aligned}$$

Die Mengen sind nicht gleich. In der ersten Menge sind Tripel, deren Komponenten Paare sind. In der zweiten Menge sind Paare, deren Komponenten Tripel sind.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ und $g \in \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (x + y, xy) \\ g(x, y) &= x - y^2\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \circ f$. Geben Sie auch an von wo nach wo diese Funktion abbildet.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}g \circ f &\in \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \\ (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) \\ &= g(x + y, xy) \\ &= x + y - (xy)^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Definieren Sie den Begriff injektiv.

Lösung von Aufgabe 4. $f \in A \rightarrow B$ heißt injektiv wenn

$$\begin{aligned}\text{für alle } a_1, a_2 \in A \text{ gilt} \\ \text{wenn } a_1 \neq a_2 \text{ dann } f(a_1) \neq f(a_2).\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Seien $g \in A \rightarrow B$ und $f \in B \rightarrow C$ zwei bijektive Funktionen. Zeigen Sie, dass dann $f \circ g \in A \rightarrow C$ ebenfalls eine bijektive Funktion ist und berechnen Sie einen Funktionsterm für $(f \circ g)^{-1}$.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \xrightarrow{f} C \\ & \searrow & \nearrow \\ & & f \circ g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{g^{-1}} & B \xleftarrow{f^{-1}} C \\ & \swarrow & \nwarrow \\ & & g^{-1} \circ f^{-1} \end{array}$$

Für die Bijektivität von $f \circ g$ ist zu zeigen, dass es für jedes $c \in C$ genau ein $a \in A$ gibt mit

$$(f \circ g)(a) = c.$$

Sei $c \in C$ beliebig aber fest. Da f bijektiv ist, gibt es genau ein $b \in B$ mit

$$f(b) = c.$$

Da g bijektiv ist, gibt es genau ein $a \in A$ mit

$$g(a) = b.$$

Folglich gilt nur für genau dieses eine a

$$f(g(a)) = c,$$

d.h. $f \circ g$ ist bijektiv.

Da f bijektiv ist, hat f eine Umkehrfunktion f^{-1} . Wird diese auf beiden Seiten angewandt, erhält man

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(g(a))) &= f^{-1}(c) \\ g(a) &= f^{-1}(c). \end{aligned}$$

Da g bijektiv ist, hat g eine Umkehrfunktion g^{-1} . Wird diese auf beiden Seiten angewandt, erhält man

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(a)) &= g^{-1}(f^{-1}(c)) \\ a &= (g^{-1} \circ f^{-1})(c). \end{aligned}$$

Damit ist

$$(f \circ g)^{-1}(c) = (g^{-1} \circ f^{-1})(c)$$

bzw.

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Menge B so dass die Funktion

$$f \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow B, \quad f(x) = e^{\tan(x)+1}$$

bijektiv ist. Berechnen Sie dann die Umkehrfunktion f^{-1} .

Lösung von Aufgabe 6.

$$B = \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad f^{-1}(y) = \arctan(\ln(y) - 1).$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$e^x - 2e^{-x} = 0.$$

Lösung von Aufgabe 7. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} e^x - 2e^{-x} &= 0 \\ e^x &= 2e^{-x} \end{aligned}$$

Da $e^x \neq 0$ kann man beide Seiten mit e^x multiplizieren und erhält

$$e^{2x} = 2$$

Da beide Seiten positiv sind für alle x , kann man logarithmieren und erhält

$$\begin{aligned} 2x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung indem Sie Äquivalenzumformungen vornehmen. Wenn Sie beim Umformen eine Funktion auf beiden Seiten anwenden, dann geben Sie die Funktion explizit an und prüfen, ob die Funktion injektiv ist. Sie dürfen alle Gesetze der Logarithmierung und der Potenzrechnung benutzen, schreiben Sie aber dazu welches Gesetz Sie anwenden.

$$3e^{x^2+1} = 5^x$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$3e^{x^2+1} = 5^x$$

Da $\ln \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist und für alle x auf beiden Seiten eine positive Zahl steht, gilt

$$\ln(3e^{x^2+1}) = \ln(5^x).$$

Anwenden der Logarithmen Gesetze ergibt

$$\ln(3) + \ln(e^{x^2+1}) = x \ln(5).$$

Da $\ln \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $\exp \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist, gilt

$$\ln(3) + x^2 + 1 = x \ln(5).$$

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x \ln(5)$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten ergibt

$$x^2 - \ln(5)x + \ln(3) + 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat keine Lösung, da die Diskriminante negativ ist.

Aufgabe 9. Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

ist eine Nullfolge. Berechnen Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein N so dass

$$|x_n| < \varepsilon$$

für alle $n > N$.

Lösung von Aufgabe 9. Umformen der Ungleichung

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Da $x_n > 0$ für alle n , gilt $|x_n| = x_n$ und damit

$$\begin{aligned} x_n &< \varepsilon \\ \frac{1}{n^2 + n} &< \varepsilon \\ n^2 + n &> \frac{1}{\varepsilon} \\ n^2 + n - \frac{1}{\varepsilon} &> 0. \end{aligned}$$

Da die linke Seite streng monoton mit n wächst, genügt es, die Werte für n zu berechnen, für die Gleichheit eintritt.

$$n^2 + n - \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel gilt

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4/\varepsilon}}{2}.$$

Damit die o.g. Ungleichung erfüllt ist, muss gelten

$$n > \frac{-1 + \sqrt{1 + 4/\varepsilon}}{2}.$$

Der kleinst mögliche positive Wert für N ist somit

$$N = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4/\varepsilon}}{2}.$$

Aufgabe 10. Die Folge

$$x_n = \frac{2n+1}{n+3}$$

konvergiert gegen 2. Berechnen Sie allgemein für jedes ε ein N , so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n - 2| < \varepsilon$.

Lösung von Aufgabe 10. Sei y_n die Folge $|x_n - 2|$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_n &= |x_n - 2| \\ &= \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| \\ &= \left| \frac{2n+1 - 2n - 6}{n+3} \right| \\ &= \left| \frac{-5}{n+3} \right| \\ &= \frac{5}{n+3}. \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} y_n &< \varepsilon \\ \frac{5}{n+3} &< \varepsilon \\ 5 &< \varepsilon(n+3) \\ \frac{5-3\varepsilon}{\varepsilon} &< n. \end{aligned}$$

Sei nun

$$N = \frac{5-3\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Dann gilt für jedes $n > N$ dass

$$y_n < \varepsilon$$

und somit

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

Aufgabe 11. Seien $x \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folgen und $a \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin N und ε so dass

$$\text{für alle } n > N \text{ gilt } |x_n| < \varepsilon.$$

Berechnen Sie hier mit ein N' und ε' so dass

$$\text{für alle } n > N' \text{ gilt } |ax_n| < \varepsilon'.$$

Sei haben damit bewiesen, dass das skalare Vielfache einer Nullfolge wieder eine Nullfolge ist.

Lösung von Aufgabe 11. Sei $n > N$. Laut Annahme gilt dann

$$\begin{aligned} |x_n| &< \varepsilon \\ |a||x_n| &< |a|\varepsilon \\ |ax_n| &< |a|\varepsilon. \end{aligned}$$

Die Betragsstriche um a sind im ersten Schritt erforderlich, da sich bei einem negativen a das Ungleichheitszeichen umdrehen würde.

Mit $N' = N$ und $\varepsilon' = |a|\varepsilon$ gilt somit für alle $n > N'$ dass $|ax_n| < \varepsilon'$.

Aufgabe 12. Seien $x, y \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Folgen. Sei weiterhin N_x, N_y und $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ so dass

$$\begin{aligned} \text{für alle } n > N_x \text{ gilt } |x_n| &< \varepsilon_x \\ \text{für alle } n > N_y \text{ gilt } |y_n| &< \varepsilon_y. \end{aligned}$$

Berechnen Sie hiermit ein N_z und ε_z so dass für die Folge $z_n = x_n + y_n$ gilt

$$\text{für alle } n > N_z \text{ gilt } |z_n| < \varepsilon_z.$$

Sie haben damit gezeigt, dass die Summe zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist.

Lösung von Aufgabe 12. Für $n > N_x$ und $n > N_y$ gilt

$$|x_n| < \varepsilon_x \quad \text{und} \quad |y_n| < \varepsilon_y.$$

Damit gilt für alle $n > \max(N_x, N_y)$

$$|x_n| + |y_n| < \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Da $|x_n| + |y_n| \geq |x_n + y_n|$ gilt in diesem Fall auch

$$|x_n + y_n| < \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

Mit

$$\begin{aligned} N_z &= \max(N_x, N_y) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_x + \varepsilon_y. \end{aligned}$$

gilt somit für alle $n > N_z$ dass $|z_n| < \varepsilon_z$.

Aufgabe 13. Sei

$$x_n = \frac{\sin^2(n) + \cos(e^n)}{2n + \cos(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so dass für alle $n > N$ gilt

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Lösung von Aufgabe 13. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Da

$$|\sin^2(n) + \cos(e^n)| < 2$$

ist

$$|x_n| < \frac{2}{2n + \cos(n)}$$

Da

$$\frac{2}{2n + \cos(n)} < \frac{2}{2n - 1}$$

ist

$$|x_n| < \frac{2}{2n + \cos(n)} < \frac{2}{2n - 1}.$$

Daher gilt: Wenn

$$\frac{2}{2n - 1} < \varepsilon$$

dann ist auch

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Auflösen der Ungleichung nach n :

$$\begin{aligned}\frac{2}{2n-1} &< \varepsilon \\ 2 &< 2n\varepsilon - \varepsilon \\ \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} &< n \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Mit der Grenze

$$N = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

gilt somit für alle n :

Wenn $n > N$, dann ist $|x_n| < \varepsilon$.

Aufgabe 14. Prüfen Sie, ob folgende Folgen konvergieren und falls ja berechnen Sie die (uneigentlichen) Grenzwerte.

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{n(n-1)(n+2)}{(n-1)(n+3)(n+5)} \\ x_n &= \frac{5n^2 + 7n - 3}{n^5 - n^2} \\ x_n &= 1 + \frac{\exp(n)}{n^{10}}\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n+2)}{(n-1)(n+3)(n+5)} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 7n - 3}{n^5 - n^2} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\exp(n)}{n^{10}} &= \infty\end{aligned}$$

Aufgabe 15. $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\hat{x}$ wenn

1. f an der Stelle $\hat{x}$ definiert ist, d.h. $\hat{x} \in D$.
2. f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$ hat.
3. Der Grenzwert von f an der Stelle $\hat{x}$ gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$ ist.

Finden Sie jeweils ein Beispiel einer Funktion und eines Punktes $\hat{x}$, wo

- die erste Bedingung erfüllt ist, aber nicht die zweite und dritte,
- die erste und die zweite Bedingung erfüllt ist, aber nicht die dritte,
- die erste Bedingung nicht erfüllt ist, aber die zweite.
- keine der drei Bedingungen erfüllt ist,

- alle 3 Bedingungen erfüllt sind.

Lösung von Aufgabe 15.

- Erste Bedingung erfüllt aber nicht zweite und dritte: $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sign}(x)$ und $\hat{x} = 0$. Die Funktion $f(x)$ ist zwar an der Stelle $\hat{x}$ definiert, hat dort aber keinen Grenzwert.
- Erste und zweite Bedingung erfüllt aber nicht dritte: $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 2 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

und $\hat{x} = 2$. Grenzwert bei $\hat{x}$ ist $G = 0$, aber $f(\hat{x}) = 1$.

- Erste Bedingung nicht erfüllt aber die zweite: $f \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ und $\hat{x} = 2$. Die Funktion f ist an der Stelle $\hat{x}$ nicht definiert, hat dort aber den Grenzwert $G = 1$.
- Keine der Bedingungen erfüllt: $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 1/x$ und $\hat{x} = 0$. Die Funktion f ist bei $\hat{x}$ nicht definiert und hat dort auch keinen Grenzwert.
- Alle drei Bedingungen erfüllt: $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\hat{x} = 2$. Die Funktion f hat an der Stelle $\hat{x}$ den Grenzwert $G = 4$, was gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$ ist.

Aufgabe 16. Seien $f, g, h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entscheiden Sie von diesen Funktionen, ob sie einen Grenzwert bei $\hat{x}$ haben, bei $\hat{x}$ stetig bzw. differenzierbar sind für $\hat{x} = 0$.

Lösung von Aufgabe 16.

- f hat bei $\hat{x}$ keinen Grenzwert und ist dort weder stetig noch differenzierbar.
- g hat bei $\hat{x}$ einen Grenzwert und ist dort stetig, aber nicht differenzierbar.
- h hat bei $\hat{x}$ einen Grenzwert und ist dort weder stetig noch differenzierbar.

Aufgabe 17. Welche der folgenden Funktionen f hat einen (uneigentlichen) Grenzwert bei $\hat{x} = 0$? Wenn man die Funktion zeichnet, sieht man dies oft sehr einfach.

Falls eine Funktion keinen (uneigentlichen) Grenzwert hat, versuchen Sie dies zu beweisen, indem Sie zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n finden, für die die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte haben.

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^x \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^{\lfloor x \rfloor} \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \log(|x|) \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \max(-2, \log(|x|)) \\ f \in \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Lösung von Aufgabe 17.

- $f \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ hat bei $\hat{x} = 0$ den Grenzwert 1.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\lfloor x \rfloor}$ hat bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert. Für $|x| < 1$ ist

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Damit ist in diesem Bereich

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 1/x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Der linksseitige Grenzwert ist damit $-\infty$, der rechtsseitige Grenzwert ist 1.

Seien

$$\begin{aligned} x_n &= 1/(n+1) \\ x'_n &= -1/(n+1) \end{aligned}$$

zwei Nullfolgen. Dann ist für alle n

$$\begin{aligned} \lfloor x_n \rfloor &= 0 \\ \lfloor x'_n \rfloor &= -1 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \left(\frac{1}{n+1} \right)^0 \\ &= 1 \\ f(x'_n) &= \left(-\frac{1}{n+1} \right)^{-1} \\ &= -\frac{n+1}{1} \\ &= -n-1. \end{aligned}$$

Damit hat die Folge $f(x_n)$ den Grenzwert 1, während die Folge $f(x'_n)$ den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ hat. Die Funktion f hat daher keinen Grenzwert bei $\hat{x} = 0$.

- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(|x|)$ hat bei $\hat{x} = 0$ den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max(-2, \log(|x|))$ hat bei $\hat{x} = 0$ den Grenzwert -2 .
- $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

hat keinen Grenzwert bei $\hat{x} = 0$. Seien

$$\begin{aligned} x_n &= 1/n \\ x'_n &= \sqrt{2}/n \end{aligned}$$

zwei Nullfolgen. Dann ist für alle n

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1 \\ f(x'_n) &= -1 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) &= -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Hat die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

einen (uneigentlichen) Grenzwert bei $\hat{x} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 18. Die Funktion hat bei $\hat{x} = 1$ den linksseitigen uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ und den rechtsseitigen Grenzwert ∞ . Damit hat sie keinen Grenzwert bei $\hat{x} = 1$.

Aufgabe 19. Sei $\hat{x} \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Finden Sie jeweils eine Folge x_n mit Grenzwert $\hat{x}$ so dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &\text{ nicht existiert.} \end{aligned}$$

Es geht also darum, sich der Zahl $\hat{x}$ einmal mit rationalen und einmal mit irrationalen Zahlen anzunähern. Sie haben damit bewiesen, dass f nirgends einen Grenzwert hat.

Hinweis: Um eine Zahl auf n Nachkommastellen zu runden, können Sie die Funktion

$$g(x, n) = \frac{\lfloor 10^n x + 0.5 \rfloor}{10^n}$$

verwenden. Hierbei ist $\lfloor x \rfloor$ der abgerundete Wert von x . Es gilt z.B.

$$g(\pi, 4) = 3.1416$$

Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\hat{x}, n) = \hat{x}.$$

Lösung von Aufgabe 19.

- Sei

$$x_n = g(\hat{x}, n).$$

Dann ist $x_n \in \mathbb{Q}$ und folglich $f(x_n) = 1$ für alle n . Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1.$$

- Sei

$$x_n = g(\hat{x}, n) + \frac{\pi}{n}.$$

Dann ist $x_n \notin \mathbb{Q}$ und folglich $f(x_n) = 0$ für alle n . Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

- Sei

$$x_n = \begin{cases} g(\hat{x}, n) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ g(\hat{x}, n) + \pi/n & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit ist $x_n \in \mathbb{Q}$ genau dann wenn n ungerade ist und folglich

$$f(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Diese Folge ist unbestimmt divergent.

Aufgabe 20. Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

- f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert hat und an jeder Stelle $x \in \mathbb{Z}$ unstetig ist.
- f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist und an jeder Stelle $x \in \mathbb{Z}$ keinen Grenzwert hat.

Lösung von Aufgabe 20.

- Da f überall einen Grenzwert hat, darf f keine Sprünge haben. Damit f an einer Stelle x trotzdem unstetig ist, kann es dort nur einen Ausreißer haben. Ein Beispiel ist somit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Damit f an der Stelle x keinen Grenzwert hat, muss es dort einen Sprung haben. Ein Beispiel ist die Treppenfunktion

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ der Wert von x nach unten gerundet ist.