Heilbronn, den 17.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\leq_{\mathbb{Q}} \cap \geq_{\mathbb{Z}} .$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\leq_{\mathbb{Q}} \cap \geq_{\mathbb{Z}} \quad = \quad =_{\mathbb{Z}} .$$

Aufgabe 2. Sei

$$f \in \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \qquad f(x_1, x_2) = (x_2 + 1, x_1 + 1).$$

Finden Sie zwei Mengen A, B und eine Relation R so dass $f = (A, B, R)$. Ist f bijektiv? Falls ja berechnen Sie einen Term für die Umkehrfunktion.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Q}^2 \\ B &= \mathbb{Q}^2 \\ R &= \big\{ \big((x_1, x_2), (x_2 + 1, x_1 + 1) \big) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \big\} \end{aligned}$$

Es gilt

$$f^{-1}(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \quad \text{genau dann wenn} \quad f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

bzw.

$$(x_2 + 1, x_1 + 1) \quad = \quad (y_1, y_2).$$

Um (x_1, x_2) in Abhängigkeit von (y_1, y_2) zu bestimmen, muss man diese Gleichung nach (x_1, x_2) auflösen. Da Paare gleich sind, genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind, führt dies zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2 + 1 &= y_1 \\ x_1 + 1 &= y_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2 - 1 \\ x_2 &= y_1 - 1. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen für jedes $(y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ genau eine Lösung $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$ haben, ist f bijektiv. Die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} \in \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \qquad f^{-1}(y_1, y_2) = (y_2 - 1, y_1 - 1).$$

Aufgabe 3. Sei

$$A \quad = \quad \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < -1\}$$

die Menge aller reeller Zahlen kleiner -1 und

$$f \in A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \quad = \quad \ln(x^2 - 1).$$

Entscheiden Sie, ob f bijektiv ist. Falls ja, berechnen Sie die Umkehrfunktion von f, falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 3. Die Funktion ist bijektiv mit

$$f^{-1} \in \mathbb{R} \to A.$$

Mit $x < -1$ und $y = f(x)$ folgt

$$\begin{aligned} y &= \ln(x^2 - 1) \\ e^y &= x^2 - 1 \\ x^2 &= e^y + 1 \\ x &= \pm\sqrt{e^y + 1} \end{aligned}$$

Da $x < -1$ sein muss, gilt

$$x \quad = \quad -\sqrt{e^y + 1}.$$

Damit ist

$$f^{-1}(y) \quad = \quad -\sqrt{e^y + 1}.$$

Aufgabe 4. Eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ ist eine bijektive Funktion

$$f \in \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

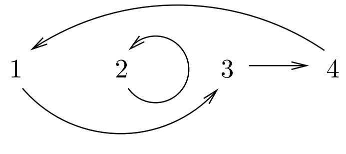
Im Folgenden sei $n = 4$. Weiter sei

$$f \in \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

mit

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 1$$

eine Permutation. Die Permutation kann wie folgt durch ein Pfeildiagramm dargestellt werden:



- Berechnen Sie die Umkehrpermutation f^{-1} von f.

- Berechnen Sie die Permutation $f \circ f$.
- Für die identische Permutation $\mathrm{id}(x) = x$ gilt $\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$. Finden Sie eine weitere Permutation g mit $g^{-1} = g$ für $n = 4$.
- Finden Sie eine Permutation g der Zahlen $1, 2, 3, 4$ so dass

$$g \circ g \circ g \quad = \quad \mathrm{id}.$$

Lösung von Aufgabe 4.

- Umkehrpermutation von f.

$$f^{-1}(1) = 4, \quad f^{-1}(2) = 2, \quad f^{-1}(3) = 1, \quad f^{-1}(4) = 3.$$

- Perutation $f \circ f$.

$$(f \circ f)(1) = 4, \quad (f \circ f)(2) = 2, \quad (f \circ f)(3) = 1, \quad (f \circ f)(4) = 3.$$

- Für die Permutation

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 1, \quad g(3) = 4, \quad g(4) = 3$$

gilt $g = g^{-1}$.
- Für die Permutation

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 1, \quad g(4) = 4$$

gilt

$$(g \circ g \circ g) \quad = \quad \mathrm{id}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(2x^2) \quad = \quad 1 + 3\ln(x).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 5. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\ln(2x^2) &= 1 + 3\ln(x) \\
\ln(2) + 2\ln(x) &= 1 + 3\ln(x) \\
\ln(x) &= \ln(2) - 1 \\
x &= e^{\ln(2)-1} \\
&= e^{\ln(2)}e^{-1} \\
&= \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.

- Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

unstetig ist.

- Für welche Werte von a ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3\sin(x) + a}$$

überall stetig? Sind auch negative Werte für a möglich?

Lösung von Aufgabe 6.

- Die Funktion $f(x)$ ist an allen Stellen x unstetig, für die $\sin(x) = 0$, d.h.

$$x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Wenn

$$3\sin(x) + a \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Dies ist der Fall, wenn entweder $a > 3$ oder $a < -3$.

Aufgabe 7. Die Folge

$$x_n \quad = \quad 1/n^2$$

konvergiert gegen 0. Es muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existieren, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n| < \varepsilon$. Finden Sie solch ein N für $\varepsilon = 0.1$.

Lösung von Aufgabe 7. Da $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist

$$|x_n| \quad = \quad x_n.$$

Die Folge $x_n = 1/n^2$ ist streng monoton fallend. Es genügt daher, ein N zu finden mit $x_N = \varepsilon$. Aufgrund der strengen Monotonie ist damit garantiert, dass $x_n < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Umformen ergibt

$$\begin{aligned} x_N &= \varepsilon \\ \frac{1}{N^2} &= \varepsilon \\ N^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \\ N &= \pm\sqrt{1/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Für $N = \sqrt{1/\varepsilon}$ gilt damit $x_n < \varepsilon$ für alle $n > N$. Für $\varepsilon = 0.1$ erhält man $N = \sqrt{10}$.

Aufgabe 8. Besitzen die folgenden Funktionen einen Grenzwert bei $\hat{x}$? Wenn Sie unsicher sind, dann zeichnen Sie die Funktionen zunächst in der Nähe von $\hat{x}$.

- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)/x$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)/x$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ für $\hat{x} = 1$.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |1/x|$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \ln(x)$ für $\hat{x} = 0$.

Lösung von Aufgabe 8.

- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)/x$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den Grenzwert 1.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)/x$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ hat an der Stelle $\hat{x} = 1$ den Grenzwert $\sin(1)$.
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den Grenzwert 0.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |1/x|$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.
- $f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \ln(x)$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen (siehe Skript) und unter Verwendung von

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

die Grenzwerte an der Stelle $\hat{x} = 0$ von

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \\ f(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{4x}\right)^2 \\ f(x) &= (\sin(x))^2/x \end{aligned}$$

Machen Sie deutlich an welcher Stelle Sie welche Rechenregel verwendet haben.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cos(x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \lim_{x\to 0} \cos(x) \\
&= 1 \\
\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{4x}\right)^2 &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{4x}\frac{\sin(x)}{4x} \\
&= \frac{1}{16} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x)}{x} \\
&= \frac{1}{16} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \\
&= \frac{1}{16} \\
\lim_{x\to 0} (\sin(x))^2/x &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\sin(x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \lim_{x\to 0} \sin(x) \\
&= 1 \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Finden Sie jeweils ein Beispiel für zwei Funktionen f, g so dass

- $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)}$$

Lösung von Aufgabe 10.

- Ein Beispiel ist

  $$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ g(x) &= x. \end{aligned}$$

  In diesem Fall gilt

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \\ \lim_{x\to 0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0} g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist der Bruch

$$\frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)}$$

nicht definiert.

- Die Gleichheit tritt immer dann auf, wenn $f(x)$ und $g(x)$ einen endlichen Grenzwert haben und der Grenzwert von $g(x)$ ungleich Null ist. Ein Beispiel ist

  $$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ g(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

  Dann gilt

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1 \\ \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \\ \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)} &= \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin(1/x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \to \infty$ haben. Versuchen Sie auch eine Folge x''_n zu finden, für die $f(x''_n)$ divergiert.

Lösung von Aufgabe 11. Sei

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi n} \\ x'_n &= \frac{1}{2\pi n + \pi/2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sin(2\pi n) \\ &= 0 \\ f(x'_n) &= \sin(2\pi n + \pi/2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= 1. \end{aligned}$$

Damit wurden zwei Folgen x_n und x'_n gefunden, die beide gegen Null konvergieren, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren. Somit hat $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert. Auch die Folge

$$x''_n = 1/n$$

konvergiert gegen Null. Die zugehörige Folge der Funkionswerte $f(x''_n)$ divergiert:

$$f(x''_n) = \sin(n).$$

Aufgabe 12. Finden Sie zwei Folgen x_n, x'_n mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x'_n \quad = \quad \infty$$

so dass die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \cos(x_n) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \cos(x'_n)$$

existieren, aber nicht gleich sind. Geben Sie diese Grenzwerte an.

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} x_n &= 2\pi n \\ x'_n &= 2\pi n + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \cos(x_n) &= 1 \\ \cos(x'_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \cos(x_n) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \cos(x'_n) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen (siehe Skript) und unter Verwendung von

$$\lim_{x\to 0} x \ln(|x|) = 0$$

die Grenzwerte an der Stelle $\hat{x} = 0$ von

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln|x| \cos(x) x \\ f(x) &= \ln(|x| + 2)(x - 1) \\ f(x) &= \frac{x \ln|x| + 1}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

Machen Sie deutlich an welcher Stelle sie welche Rechenregel verwendet haben.

Lösung von Aufgabe 13.

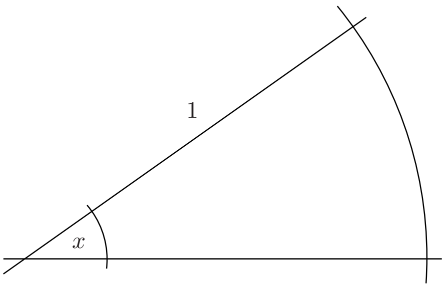
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln|x|\cos(x)x &= \lim_{x\to 0} x\ln|x|\cos(x)\\
&= \lim_{x\to 0} x\ln|x| \times \lim_{x\to 0}\cos(x)\\
&= 0\times 1\\
&= 0\\
\lim_{x\to 0} \ln(|x|+2)(x-1) &= \lim_{x\to 0}\ln(|x|+2)\times\lim_{x\to 0} x-1\\
&= -\ln(2)\\
\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|+1}{x^2+3} &= \frac{\lim_{x\to 0} x\ln|x|+1}{\lim_{x\to 0} x^2+3}\\
&= 1/3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 14. In nachfolgendem Bild ist ein Kreisbogen mit Winkel x und Radius 1 dargestellt. Zeichnen Sie in dieses Bild die Größen x und $\sin(x)$ als Längen ein, so dass man erkennen kann, dass

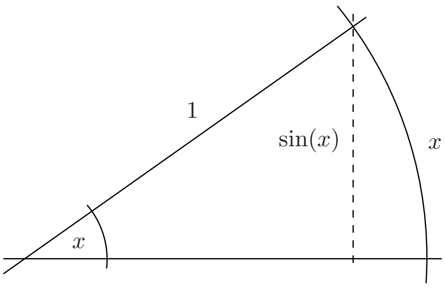
$$\sin(x) \approx x$$

für kleine x. Schauen Sie sich hierzu ggf. nochmal an, wie ein Winkel im Bogenmaß definiert ist. Auf diese Weise kann man sehen, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Lösung von Aufgabe 14. Der Winkel x im Bogenmaß ist gleich der Länge des Kreissegments mit Winkel x im Einheitskreis. Damit sieht man, dass x und $\sin(x)$ bis auf die Krümmung gleich sind. Für kleine Winkel x geht dieser Unterschied gegen Null.



Aufgabe 15. Definieren Sie wann eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert bei $\hat{x} \in \mathbb{R}$ hat.

Lösung von Aufgabe 15. f hat einen Grenzwert bei $\hat{x}$ wenn es eine Zahl G gibt, so dass für jede Folge x_n mit $x_n \to \hat{x}$, $x_n \neq \hat{x}$ für alle n gilt $f(x_n) \to G$.

Aufgabe 16. Sei $f(x) = |x|$. Berechnen Sie die Steigung $s(\Delta x)$ der Sekante an $f(x)$ zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ für beliebiges $\hat{x}$ und Δx. Berechnen Sie für $\hat{x} = 3$ und für $\hat{x} = -5$ den Grenzwert

$$f'(\hat{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} s(\Delta x).$$

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned} s(\Delta x) &= \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} \\ &= \frac{|\hat{x} + \Delta x| - |\hat{x}|}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Grenzwerts $\Delta x \to 0$ darf man annehmen, dass Δx sehr klein ist. Insbesondere ist beim Grenzübergang

$$\begin{aligned} |3 + \Delta x| &= 3 + \Delta x \\ |-5 + \Delta x| &= -(-5 + \Delta x) \\ &= 5 - \Delta x. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|3 + \Delta x| - |3|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + \Delta x - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= 1 \\ f'(5) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|-5 + \Delta x| - |-5|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 - \Delta x - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei $f(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass $f'(x) = e^x$ unter Verwendung der Definition der e-Funktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

auf zwei Weisen.

- Indem Sie jeden Summanden separat ableiten (Summenregel).
- Indem Sie den Grenzwert
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
berechnen. Nutzen Sie hierzu die Rechengesetze der e-Funktion und wenden Sie die o.g. Definition auf $e^{\Delta x}$ an.

Lösung von Aufgabe 17.

- Verwendung der Summenregel
$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)' \\
&= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \\
&= e^x
\end{aligned}$$
- Grenzwertberechnung.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \left(\frac{1 + \Delta x + \Delta x^2/2! + \ldots - 1}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \left(\frac{\Delta x + \Delta x^2/2! + \ldots}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x (1 + \Delta x/2! + \ldots) \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Die Funktionen sinh und cosh sind definiert wie folgt:
$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).
\end{aligned}$$
Sie haben viele Eigenschaften, die ähnlich sind wie bei sin und cos. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\sinh'(x) &= \cosh(x) \\
\cosh'(x) &= \sinh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) \\
&= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \\
&= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \\
&= \cosh(x) \\
\sinh'(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} - (-e^{-x})) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \\
&= \cosh(x) \\
\cosh'(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} + (-1)e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \\
&= \sinh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 - e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(2 - (-2)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen. Die Ableitung von f ist überall dort definiert, wo f differenzierbar ist. Geben Sie diesen Bereich an und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\ln(x)) \\
f(x) &= |x| \\
f(x) &= \sin(|x|) \\
f(x) &= \cos(|x|) \\
f(x) &= (\cos(|x|))^2 \\
f(x) &= (\sin(|x|))^2
\end{aligned}$$

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, können Sie die sign-Funktion verwenden.

$$\mathrm{sign} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 19.

- $f(x) = \ln(\ln(x))$ ist nur definiert auf

$$\mathbb{D} = \{x \,|\, x > 1\}$$

und dort differenzierbar.

$$f' \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

- $f(x) = |x|$
$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{sign}(x)$$

- $f(x) = \sin(|x|)$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick und ist dort nicht differenzierbar.
$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{sign}(x)\cos(|x|) = \operatorname{sign}(x)\cos(x)$$

- $f(x) = \cos(|x|) = \cos(x)$
$$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(x)$$

- $f(x) = (\cos(|x|))^2 = (\cos(x))^2$
$$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$$

- $f(x) = (\sin(|x|))^2$ kann mit Fallunterscheidung umgeformt werden.
$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(|x|))^2 \\ &= \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ (\sin(-x))^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ (-\sin(x))^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ &= (\sin(x))^2. \end{aligned}$$

  Damit ist
$$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$