Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte sofern sie existieren.

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\ln(x))$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x\cos(x)$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{(2x+1)(x+2)}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+\sin(x)}$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sin(\ln(x)) & & \text{existiert nicht} \\
\lim_{x\to-\infty} xe^x\cos(x) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{(2x+1)(x+2)} &= \frac{3}{2} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+\sin(x)} &= \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Eine Zahl x heißt ungerade wenn $x \in \mathbb{N}$ ist und ein $y \in \mathbb{N}_0$ existiert so dass

$$x = 2y+1.$$

Beweisen Sie unter Verwendung dieser Definition, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder eine ungerade Zahl ist.

Lösung von Aufgabe 2. Seien x_1, x_2 zwei ungerade Zahlen. Dann existieren $y_1, y_2 \in \mathbb{N}_0$ so dass

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2y_1+1 \\
x_2 &= 2y_2+1.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x_1x_2 &= (2y_1+1)(2y_2+1) \\
&= 4y_1y_2+2y_1+2y_2+1 \\
&= 2\underbrace{(2y_1y_2+y_1+y_2)}_{y}+1.
\end{aligned}$$

Sei

$$y = 2y_1y_2+y_1+y_2.$$

Dann ist $y \in \mathbb{N}_0$ und

$$x_1 x_2 = 2y + 1$$

und somit ist $x_1 x_2$ eine ungerade Zahl.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(\cos(x) + 1) = 0.$$

Lösung von Aufgabe 3. Die e-Funktion ist Umkehrfunktion der ln-Funktion. Anwenden auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned} \cos(x) + 1 &= 1 \\ \cos(x) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist damit

$$\mathbb{L} = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 4. Prüfen Sie, ob folgende Folgen konvergieren und falls ja berechnen Sie die (uneigentlichen) Grenzwerte.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + n^3} \\ x_n &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ x_n &= \frac{\exp(n)}{n^{10}} \\ x_n &= \left(\frac{n-1}{3n^2+1}\right)\left(\frac{4n^3+3}{n^2+4}\right) \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3/n^2 - 1/n^3 + 10/n^4}{1 + 1/n} \\ &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 6/n + 11/n^2 - 6/n^3}{1 + 6/n + 11/n^2 + 6/n^3} \\ &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(n)}{n^{10}} &= \infty \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{3n^2+1}\right)\left(\frac{4n^3+3}{n^2+4}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 4n^3 + 3n - 3}{3n^4 + 13n^2 + 4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4 - 4/n + 3/n^3 - 3/n^4}{3 + 13/n^2 + 4/n^4} \\ &= 4/3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-1/|x|}.$$

- Hat f einen Grenzwert bei $\hat{x} = 0$?
- Falls ja berechnen Sie diesen Grenzwert, falls nein geben Sie eine Begründung warum f keinen Grenzwert bei $\hat{x}$ hat.
- Ist f stetig bei $\hat{x}$? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz.

Lösung von Aufgabe 5.

- f hat den Grenzwert 0 bei $\hat{x}$.
- Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} -\frac{1}{|x|} &= -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} e^x &= 0. \end{aligned}$$

  Folglich ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \hat{x}} f(x) &= \lim_{x \to 0} e^{-1/|x|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- f ist nicht stetig bei $\hat{x}$, da $f(\hat{x})$ nicht definiert ist.

Aufgabe 6. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x + \pi))}{e^{\sin(x)} - 1}.$$

Lösung von Aufgabe 6. Seien $g, h \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(\sin(x + \pi)) \\ h(x) &= e^{\sin(x)} - 1. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} g(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 0} h(x) &= 0, \end{aligned}$$

kann man den Grenzwert des Quotienten nicht als Quotient der Grenzwerte berechnen.

Linearisierung von g und h.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x + \pi) \cos(\sin(x + \pi)) \\ h'(x) &= \cos(x) e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

Auswerten bei $x = 0$.

$$\begin{aligned} g'(0) &= -1 \\ h'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist für $x \approx 0$

$$\begin{array}{rcccl} g(x) & \approx & g(0) + g'(0)x & = & -x \\ h(x) & \approx & h(0) + h'(0)x & = & x \end{array}$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} \quad = \quad \frac{-x}{x} \quad = \quad -1.$$

Aufgabe 7. Eine Zahl $\hat{x}$ heißt k-fache Nullstelle der Funktion $f(x)$ wenn

$$f(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(k-1)}(\hat{x}) = 0$$

und

$$f^{(k)}(\hat{x}) \neq 0.$$

So ist zum Beispiel $\hat{x} = 1$ eine doppelte Nullstelle der Funktion $f(x) = (x-1)^2$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x) + 1.$$

Geben Sie zu jeder Nullstelle ihre Vielfachheit an.

Lösung von Aufgabe 7. Die Ableitungen von $f(x)$ sind

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \cos(x) \\ f''(x) & = & -\sin(x). \end{array}$$

Die Nullstellen von $f(x)$ sind

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da $f'(x_k) = 0$ und $f''(x_k) \neq 0$ ist x_k eine doppelte Nullstelle.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \sin(x)e^x$$

und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind. Hinweis: Wenn man $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Einheitskreis einzeichnet, erkennt man dass

$$\sin(x) = -\cos(x) \quad \text{für } x = {}^{3\pi}/_{4} \text{ und } x = -{}^{\pi}/_{4}.$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sin(x)e^x \\ f'(x) & = & \cos(x)e^x + \sin(x)e^x \\ & = & (\sin(x) + \cos(x))e^x \\ f''(x) & = & (\cos(x) - \sin(x))e^x + (\sin(x) + \cos(x))e^x \\ & = & 2\cos(x)e^x. \end{array}$$

Nullstellen der ersten Ableitung hat man für

$$\begin{aligned} x &= {}^{3\pi}/_{4} + k2\pi \\ x &= -{}^{\pi}/_{4} + k2\pi \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Ableitung ist im ersten Fall negativ, im zweiten Fall positiv. Daher hat $f(x)$ ein lokales Maximum für

$$x = {}^{3\pi}/_{4} + k2\pi$$

und ein lokales Minimum für

$$x = -{}^{\pi}/_{4} + k2\pi$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Linearisierung $\ell(x)$ der Funktion

$$f(x) = \ln(1+x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$.

Verwenden Sie diese Linearisierung um

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

für große Werte von $n \in \mathbb{N}$ durch einen einfachen Term zu approximieren.

Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um zu begründen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Linearisierung von $f(x)$ bei $\hat{x} = 0$

$$\ell(x) = x.$$

Für $x \approx 0$ gilt somit

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx x \\ \frac{1}{x}\ln(1+x) &\approx 1 \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine große Zahl. Dann ist $1/n \approx 0$ und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1/n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\approx 1 \\
n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\approx 1
\end{aligned}$$

Wendet man auf beiden Seiten die e-Funktion an, erhält man

$$\begin{aligned}
e^{n \ln(1+1/n)} &\approx e \\
\left(e^{\ln(1+1/n)}\right)^n &\approx e \\
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\approx e
\end{aligned}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Aufgabe 10. Sei f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar. Die Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$ ist definiert durch

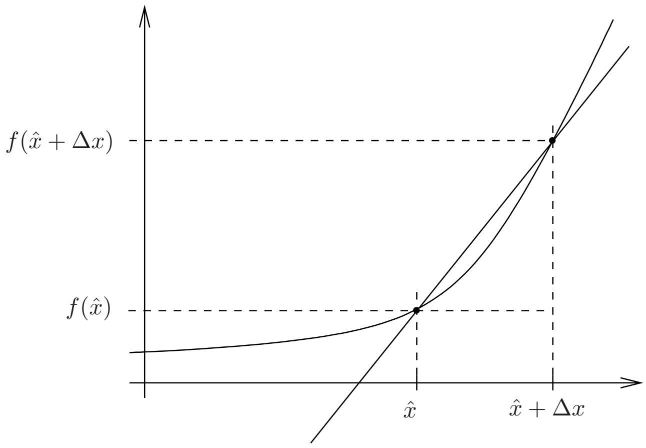
$$f'(\hat{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}.$$

Gilt dann auch

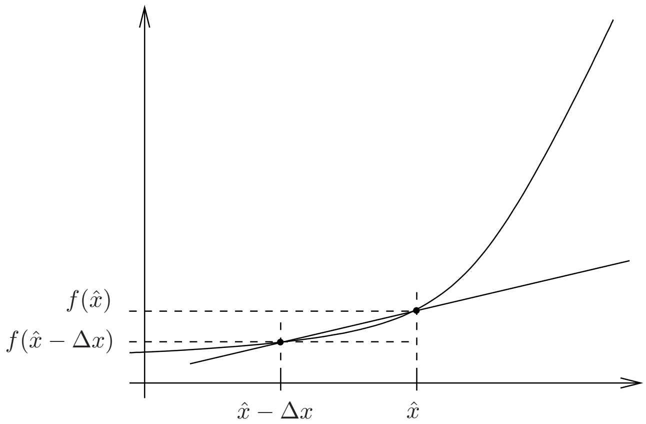
$$\begin{aligned}
f'(\hat{x}) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x} \\
f'(\hat{x}) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x}?
\end{aligned}$$

- Zeichnen Sie hierzu wieder Bilder mit der entsprechenden Sekante und ihrer Steigung ein.
- Berechnen Sie mit allen drei Definitionen die Ableitung von $f(x) = x^2$ und $f(x) = 1/x$ und prüfen Sie, ob das gleiche Ergebnis herauskommt.

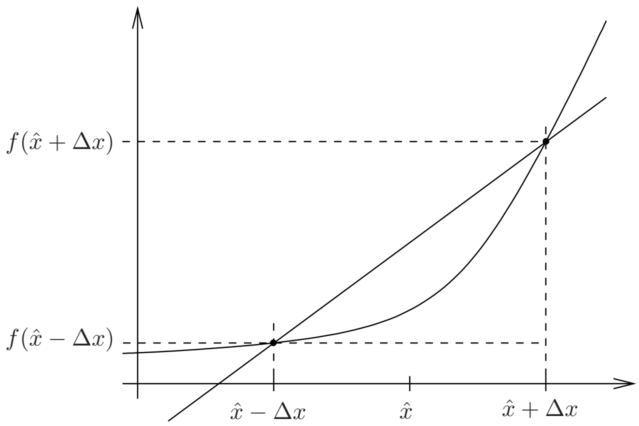
Lösung von Aufgabe 10. Auf alle drei Weisen erhält man zwar unterschiedliche Sekantensteigungen, beim Grenzübergang kommt jedoch immer die Tangentensteigung bei $\hat{x}$ heraus.



Sekantensteigung
$$\frac{f(\hat{x}+\Delta x)-f(\hat{x})}{\Delta x}$$



Sekantensteigung
$$\frac{f(\hat{x})-f(\hat{x}-\Delta x)}{\Delta x}$$



Sekantensteigung
$$\frac{f(\hat{x}+\Delta x)-f(\hat{x}-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Berechnung der Ableitung von $f(x) = x$ auf alle drei Weisen:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\hat{x} + \Delta x)^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x}^2 + 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2\hat{x} + \Delta \\
&= 2\hat{x} \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x}^2 - (\hat{x} - \Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x}^2 - (\hat{x}^2 - 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\hat{x}\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2\hat{x} - \Delta x \\
&= 2\hat{x} \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\hat{x} + \Delta x)^2 - (\hat{x} - \Delta x)^2}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x}^2 + 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2 - (\hat{x}^2 - 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2)}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\hat{x}\Delta x}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2\hat{x} \\
&= 2\hat{x}.
\end{aligned}
$$

Berechnung der Ableitung von $f(x) = 1/x$ auf alle drei Weisen:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\hat{x}+\Delta x} - \frac{1}{\hat{x}}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x} - (\hat{x}+\Delta x)}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x}+\Delta x)} \\
&= -\frac{1}{\hat{x}^2} \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x}-\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\hat{x}} - \frac{1}{\hat{x}-\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hat{x} - \Delta x - \hat{x}}{\hat{x}(\hat{x}-\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\hat{x}(\hat{x}-\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x}-\Delta x)} \\
&= -\frac{1}{\hat{x}^2} \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}+\Delta x) - f(\hat{x}-\Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\hat{x}+\Delta x} - \frac{1}{\hat{x}-\Delta x}}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\hat{x}-\Delta x) - (\hat{x}+\Delta x)}{(\hat{x}+\Delta x)(\hat{x}-\Delta x)} \frac{1}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{2\Delta x}{\hat{x}^2 - \Delta x^2} \frac{1}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\hat{x}^2 - \Delta x^2} \\
&= -\frac{1}{\hat{x}^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Verwenden Sie hierzu für die Ableitung die Formel

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

und das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Weiterhin dürfen Sie verwenden, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x-\Delta x)}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - (\sin(x)\cos(-\Delta x) + \cos(x)\sin(-\Delta x))}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x)}{2\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x)\sin(\Delta x)}{2\Delta x} \\
&= \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Steigung der Tangente der Funktion

$$f(x) = e^{|x-2|}$$

an der Stelle $\hat{x} = 1$.

Lösung von Aufgabe 12. Die Funktion $f(x)$ kann ohne Betragszeichen geschrieben werden als

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{falls } x \geq 2 \\ e^{-(x-2)} & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Für $x < 2$ ist somit $f'(x) = -e^{-(x-2)}$ und damit $f'(1) = -e$.

Aufgabe 13. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisterme so weit wie möglich. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(x)} \\
f(x) &= \ln(x^2)e^{(x^2)} \\
f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\
f(x) &= \frac{\sin(x)}{x+1}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 13.

- $$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(x)} \\
f'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)} \\
f''(x) &= -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos^2(x)e^{\sin(x)} \\
&= (\cos^2(x) - \sin(x))e^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x^2)e^{(x^2)} \\
&= 2\ln(x)e^{(x^2)} \\
f'(x) &= 2(\frac{1}{x}e^{(x^2)} + \ln(x)2xe^{(x^2)}) \\
&= 2e^{(x^2)}(\frac{1}{x} + 2x\ln(x)) \\
f''(x) &= 4xe^{(x^2)}(\frac{1}{x} + 2x\ln(x)) + 2e^{(x^2)}(-\frac{1}{x^2} + 2\ln(x) + 2) \\
&= 2e^{(x^2)}(2 + 4x^2\ln(x) - \frac{1}{x^2} + 2\ln(x) + 2) \\
&= 2e^{(x^2)}(4 + 4x^2\ln(x) - \frac{1}{x^2} + 2\ln(x))
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\
&= \cos(x^{1/2}) \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin(x^{1/2}) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) \\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(x^{1/2}) + x^{-1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}\cos(x^{1/2})\big) \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x})}{4\sqrt{x^3}} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{4x}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{\cos(x)(x+1) - \sin(x)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\cos(x)}{x+1} - \frac{\sin(x)}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{-\sin(x)(x+1) - \cos(x)}{(x+1)^2} - \frac{\cos(x)(x+1)^2 - \sin(x)2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x+1} - \frac{\cos(x)}{(x+1)^2} - \frac{\cos(x)}{(x+1)^2} + \frac{2\sin(x)}{(x+1)^3} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x+1} - \frac{2\cos(x)}{(x+1)^2} + \frac{2\sin(x)}{(x+1)^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\hat{x}} \frac{e^{x-1}-1}{\ln(x)}$$

für $\hat{x} = 1$. Hinweis: Da sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to \hat{x}$ gegen Null gehen, ist die Berechnung des Grenzwerts schwierig. Da die Linearisierung einer Funktion bei $\hat{x}$ eine gute Approximation der Funktion in der

Umgebung von $\hat{x}$ ist, kann man Zähler und Nenner bei $\hat{x}$ linearisieren und damit den Grenzwert berechnen.

Lösung von Aufgabe 14. Die Linearisierung einer Funktion $f(x)$ bei $\hat{x}$ ist

$$f(x) \quad \approx \quad f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

Damit ist die Linearisierung von Zähler und Nenner bei $\hat{x} = 1$:

$$\begin{aligned} e^{x-1} &\approx 1 + (x-1) \\ &= x \\ e^{x-1} - 1 &\approx x - 1 \\ \ln(x) &\approx x - 1 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\ln(x)} &= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ von

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Lösung von Aufgabe 15. Die ersten beiden Ableitungen von $f(x)$ sind

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2)^{-1/2} \\ f'(x) &= -x(1 + x^2)^{-3/2} \\ f''(x) &= -(1 + x^2)^{-3/2} + 3x^2(1 + x^2)^{-5/2} \end{aligned}$$

Auswertung bei $\hat{x} = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1. \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$p(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Aufgabe 16. Ein Taylor Polynom ist eine Approximation an eine Funktion f in der Nähe des Entwicklungspunktes $\hat{x}$. Es stellt sich natürlich die Frage, wie gut diese Approximation im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ ist.

Allgemein lässt sich zeigen, dass es für jedes x einen Wert ξ zwischen $\hat{x}$ und x gibt so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x - \hat{x})^i}_{\text{Taylor Polynom } p(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \hat{x})^{n+1}}_{\text{Restglied}}.$$

Der Approximationsfehler des Taylor Polynoms vom Grad n an einer beliebigen Stelle $x \in [\hat{x}, x_{\max}]$ ist damit garantiert nicht größer als

$$m \frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

wobei

$$m = \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|.$$

- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom von $f(x) = \cos(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 3$ mit Grad n. Berechnen Sie mit o.g. Formel eine Obergrenze für den Approximationsfehler des Taylor Polynoms im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 10$ für beliebiges n, für $n = 10$ und für $n = 20$.
- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom vom Grad 3 von $f(x) = \sqrt{x}$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Berechnen Sie eine Obergrenze für den Approximationsfehler von $p(x)$ im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 3$.

Lösung von Aufgabe 16.

- Da die Ableitungen der Cosinus Funktion immer zwischen 1 und -1 liegen, gilt
$$m = \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| = 1.$$
Damit erhält man die Obergrenze für den Approximationsfehler
$$\frac{1}{(n+1)!} 7^{n+1}.$$
Für $n = 10$ erhält man den Wert 49.5, für $n = 20$ den Wert 0.01.
- Die Ableitungen der Wurzel Funktion sind wie folgt.
$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-3/2} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-5/2} \\ f''''(x) &= -\frac{15}{16} x^{-7/2} \end{aligned}$$
Im Intervall $[1, 3]$ ist die vierte Ableitung im Betrag maximal
$$m = \frac{15}{16}.$$
Damit ist eine Obergrenze für den Approximationsfehler
$$\frac{15}{16} \frac{2^4}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 3 von $f(x) = \tan(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[0, \pi/4]$. Hinweis:

- $\tan(\pi/4) = 1$
- $f''''(x)$ ist monoton steigend im Intervall $[0, \pi/4]$.

Lösung von Aufgabe 17. Ableitungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan(x) \\
f'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\
f''(x) &= 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) \\
&= 2\tan^3(x) + 2\tan(x) \\
f'''(x) &= 6\tan^2(x)(1 + \tan^2(x)) + 2(1 + \tan^2(x)) \\
&= 6\tan^4(x) + 8\tan^2(x) + 2 \\
f''''(x) &= 24\tan^3(x)(1 + \tan^2(x)) + 16\tan(x)(1 + \tan^2(x)) \\
&= 24\tan^5(x) + 40\tan^3(x) + 16\tan(x).
\end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 0 \\
f'''(0) &= 2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
p(x) &= x + \frac{2}{3!}x^3 \\
&= x + \frac{1}{3}x^3.
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung.

$$\frac{1}{4!}f''''(\xi)x^4.$$

Da $f''''(x)$ monoton steigend ist in $[0, \pi/4]$ ist

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq \xi \leq \pi/4} |f''''(\xi)| &= |f''''(\pi/4)| \\
&= 24\tan^5(\pi/4) + 40\tan^3(\pi/4) + 16\tan(\pi/4) \\
&= 24 + 40 + 16 \\
&= 80.
\end{aligned}$$

Der Fehler zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[0, \pi/4]$ ist daher beschränkt durch

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq \xi \leq \pi/4} |f''''(\xi)| \frac{(\pi/4)^4}{4!} &= \frac{80\pi^4}{4^4\, 4!} \\
&\approx 1.27.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 von

$$f(x) = \sin(x^2) + \cos(x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Im Ergebnis dürfen keine sin- oder cos-Funktionen auftreten.

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x^2) + \cos(x) \\
f'(x) &= 2x\cos(x^2) - \sin(x) \\
f''(x) &= 2\cos(x^2) + 2x(-\sin(x^2)2x) - \cos(x) \\
&= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) - \cos(x).
\end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= 0 \\
f''(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

Damit ist

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 19. Sei

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.$$

Hat f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x} = 0$? Falls ja, berechnen Sie diesen, falls nein, geben Sie eine Begründung. Hinweis: Ersetzen Sie die Sinusfunktion im Zähler durch ihre Taylorreihe und vereinfachen Sie den Bruch.

Lösung von Aufgabe 19. Mit der Taylor Reihe gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x - {}^{x^3}/_{3!} + {}^{x^5}/_{5!} - \ldots}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x}}\left(1 - {}^{x^2}/_{3!} + {}^{x^4}/_{5!} - \ldots\right) \\
&= \sqrt{x}\left(1 - {}^{x^2}/_{3!} + {}^{x^4}/_{5!} - \ldots\right).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$