Heilbronn, den 14.11.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 1 mit Musterlösungen

Blatt 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(2x^2) \quad = \quad 1 + 3\ln(x).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 1. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\ln(2x^2) &= 1 + 3\ln(x) \\
\ln(2) + 2\ln(x) &= 1 + 3\ln(x) \\
\ln(x) &= \ln(2) - 1 \\
x &= e^{\ln(2)-1} \\
&= e^{\ln(2)}e^{-1} \\
&= \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\frac{d(x^2 + \ln(x))}{d\cos(x^2)}.$$

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^2 + \ln(x))}{d\cos(x^2)} &= \frac{d(x^2 + \ln(x))}{dx}\frac{dx}{d\cos(x^2)} \\
&= \left(2x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{{}^{d\cos(x^2)}/_{dx}} \\
&= \left(2x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{-2x\sin(x^2)} \\
&= -\frac{2x + \frac{1}{x}}{2x\sin(x^2)} \\
&= -\frac{1}{\sin(x^2)}\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Für welche Werte von a und b ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin(bx) + ax$$

überall streng monoton steigend?

Lösung von Aufgabe 3. Damit $f(x)$ streng monoton steigend ist, muss die Ableitung für alle x positiv sein.

$$f'(x) \quad = \quad b\cos(bx) + a.$$

Da $b\cos(bx) \geq -|b|$ für alle x, ist dies der Fall für alle a, b mit $a > |b|$.

Aufgabe 4. Die Quotientenregel der Differentialrechnung

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

sieht zunächst überraschend kompliziert aus. Man kann sie aber einfach aus der Kettenregel und aus der Produktregel herleiten, indem man

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f(x)\left(g(x)^{-1}\right)$$

umformt. Leiten Sie den Faktor $g(x)^{-1}$ mit der Kettenregel ab und dann das Produkt

$$f(x)\left(g(x)^{-1}\right)$$

mit der Produktregel. Damit haben Sie die Quotientenregel hergeleitet.

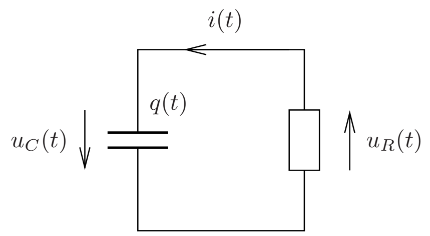
Lösung von Aufgabe 4. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\left(g(x)^{-1}\right)' &= -1\, g(x)^{-2}\, g'(x) \\ &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Mit der Produktregel gilt dann

$$\begin{aligned}\left(f(x)g(x)^{-1}\right)' &= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5. In nachfolgendem Bild wird ein Kondensator mit Kapazität C Farad über einen Widerstand mit R Ohm entladen.



Die Ladung des Kondensators zur Zeit t sei $q(t)$ Coulomb. Die Stromstärke $i(t)$ ist die zeitliche Ladungsänderung, d.h.

$$i(t) = q'(t).$$

Die Spannung am Kondensator bzw. am Widerstand berechnet sich durch

$$\begin{aligned}u_C(t) &= \frac{q(t)}{C} \\ u_R(t) &= Ri(t).\end{aligned}$$

Die Summe aus Spannung am Kondensator und am Widerstand muss zu jedem Zeitpunkt Null sein, d.h. es gilt

$$u_C(t) + u_R(t) \quad = \quad 0.$$

So weit die Gesetze der Elektrotechnik. Im nächsten Semester lernen Sie, dass aus diesen Gleichungen folgt, dass die Ladung

$$q(t) \quad = \quad q_0 e^{-t/(RC)}$$

sein muss, wobei $q_0 = q(0)$ die Anfangsladung ist.

Sie können sich mit Ihrem Wissen aber bereits jetzt davon überzeugen, dass diese Funktion $q(t)$ korrekt ist.

- Zeigen Sie von der gegebenen Funktion $q(t)$, dass $q(0) = q_0$.
- Berechnen Sie aus der gegebenen Funktion $q(t)$ die Stromstärke $i(t)$ durch Ableiten.
- Zeigen Sie, dass mit diesen Funktionen $q(t)$ und $i(t)$ die Gleichung

  $$u_C(t) + u_R(t) \quad = \quad 0$$

  erfüllt ist.

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
q(0) &= q_0 e^{-0/(RC)} \\
&= q_0 e^0 \\
&= q_0 \\
i(t) &= q'(t) \\
&= -\frac{q_0}{RC} e^{-t/(RC)} \\
u_C(t) + u_R(t) &= \frac{q(t)}{C} + Ri(t) \\
&= \frac{q_0}{C} e^{-t/(RC)} - R\frac{q_0}{RC} e^{-t/(RC)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei

$$f \in D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(\ln(x))$$

mit

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 1\}.$$

Berechnen Sie die Ableitung von f.

Lösung von Aufgabe 6. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x \ln(x)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Die Funktionen sinh und cosh sind definiert wie folgt:

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).\end{aligned}$$

Sie haben viele Eigenschaften, die ähnlich sind wie bei sin und cos. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= -\sinh(x)\\ \cosh(-x) &= \cosh(x)\\ \sinh'(x) &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \sinh(x)\\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)\\ &= -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\\ &= -\sinh(x)\\ \cosh(-x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)\\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ &= \cosh(x)\\ \sinh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x}))\\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ &= \cosh(x)\\ \cosh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x})\\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\\ &= \sinh(x)\\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 - e^{-2x})\\ &= \frac{1}{4}(2 - (-2))\\ &= 1\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Wie Sie wissen, gilt

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

Da es sich hier um eine Gleichheit von Funktionen handelt, kann man auf beiden Seiten x durch einen Term ersetzen, z.B. x^2. Es gilt dann

$$\sin(x^2)' = \cos(x^2).$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) \quad = \quad 2x\cos(x^2).$$

Wo liegt der Fehler und wie lässt er sich vermeiden?

Lösung von Aufgabe 8. Die Ableitung der Sinusfunktion wird mit $\sin'$ bezeichnet. Damit gilt

$$\sin'(x) \quad = \quad \cos(x)$$

für alle x und auch

$$\sin'(x^2) \quad = \quad \cos(x^2).$$

Korrekt ist ebenfalls

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) \quad = \quad 2x\cos(x^2).$$

Mit

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2)$$

meint man jedoch nicht die Ableitung der Sinusfunktion ausgewertet bei x^2 sondern die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x^2)$. Es gilt also

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) \neq \sin'(x^2).$$

Die Verwirrung lässt sich vermeiden, indem man $\sin'(x)$ schreibt statt wie in der Aufgabenstellung $\sin(x)'$. Die Ableitung bezieht sich schließlich auf die Sinusfunktion und nicht auf den Funktionswert der Sinusfunktion bei x. Einen Funktions*wert* kann man gar nicht ableiten.

Aufgabe 9. Die Funktion

$$f \in [0,\pi] \to [-1,1], \quad f(x) \quad = \quad \cos(x)$$

ist bijektiv mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} \in [-1,1] \to [0,\pi], \quad f^{-1}(x) \quad = \quad \arccos(x).$$

An welchen Stellen ist f^{-1} differenzierbar? Berechnen Sie an diesen Stellen die Ableitung von f^{-1}.

Lösung von Aufgabe 9. Es gilt

$$f(f^{-1})(x) \quad = \quad x,$$

d.h.

$$\cos(\arccos(x)) \quad = \quad x$$

für alle $x \in [-1, 1]$. Ableiten auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned} -\sin(\arccos(x))\arccos'(x) &= 1 \\ \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist jedoch an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ nicht definiert, da

$$\begin{aligned} \arccos(-1) &= \pi \\ \arccos(1) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\sin(\pi) = \sin(0) = 0.$$

Somit ist f^{-1} an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ nicht differenzierbar. Tatsächlich hat die arccos-Funktion an diesen Stellen eine vertikale Tangente.

Aufgabe 10. Für welche Werte von a hat die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + \cos(3x)$$

keine lokalen Extremwerte?

Lösung von Aufgabe 10.

$$f'(x) = a - 3\sin(3x).$$

Lokale Extremwerte treten auf, wenn $f'(x) = 0$, d.h.

$$3\sin(3x) = a.$$

Diese Gleichung hat Lösungen wenn

$$-3 \le a \le 3.$$

Damit hat f keine lokalen Extremwerte wenn

$$a > 3 \ \text{ oder } \ a < -3.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen. Die Ableitung von f ist überall dort definiert, wo f differenzierbar ist. Geben Sie diesen Bereich an und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\ln(x)) \\ f(x) &= |x| \\ f(x) &= \sin(|x|) \\ f(x) &= \cos(|x|) \\ f(x) &= (\cos(|x|))^2 \\ f(x) &= (\sin(|x|))^2 \end{aligned}$$

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, können Sie die sign-Funktion verwenden.

$$\mathrm{sign} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 11.

- $f(x) = \ln(\ln(x))$ ist nur definiert auf

  $$\mathbb{D} \quad = \quad \{x \mid x > 1\}$$

  und dort differenzierbar.

  $$f' \in \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

- $f(x) = |x|$

  $$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{sign}(x)$$

- $f(x) = \sin(|x|)$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick und ist dort nicht differenzierbar.

  $$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{sign}(x)\cos(|x|) = \mathrm{sign}(x)\cos(x)$$

- $f(x) = \cos(|x|) = \cos(x)$

  $$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(x)$$

- $f(x) = (\cos(|x|))^2 = (\cos(x))^2$

  $$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$$

- $f(x) = (\sin(|x|))^2$ kann mit Fallunterscheidung umgeformt werden.

  $$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(|x|))^2 \\ &= \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ (\sin(-x))^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ (-\sin(x))^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ &= (\sin(x))^2. \end{aligned}$$

  Damit ist

  $$f' \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

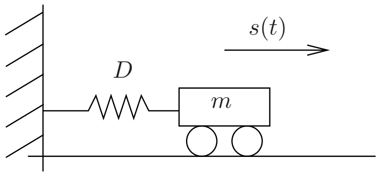
Aufgabe 12. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x.$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x \\ &= e^{\ln(x^x)} \\ &= e^{x\ln(x)} \\ f'(x) &= e^{x\ln(x)}\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) \\ &= x^x(\ln(x)+1). \end{aligned}$$

Aufgabe 13. In nachfolgendem Bild ist ein Wagen der Masse m an einer Federung mit Federkonstante D befestigt und kann sich reibungsfrei horizontal bewegen. Die Position des Wagens zum Zeitpunkt t sei $s(t)$.



Auf den Wagen wirkt somit nur die Federkraft

$$F_D(t) = -Ds(t).$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass diese Kraft nach links zieht, wenn $s(t)$ positiv ist.

Nach dem Trägheitsgesetz ist die Summe aller Kräfte auf einen Körper gleich Masse mal Beschleunigung. Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} -Ds(t) &= ma(t) \\ ma(t) + Ds(t) &= 0 \\ ms''(t) + Ds(t) &= 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Beschleunigung gleich der zweiten zeitlichen Ableitung der Position ist. Eine Gleichung dieser Form heißt Differentialgleichung. Gesucht ist die Funktion $s(t)$.

Anschaulich ist klar, dass der Wagen eine Schwingung ausführen muss, d.h. die Funktion $s(t)$ hat die Form

$$s(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t).$$

Berechnen Sie damit $s''(t)$ und setzen Sie $s(t)$ und $s''(t)$ in die Differentialgleichung ein. Da die rechte Seite Null ist, müssen die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen Null sein und Sie erhalten somit zwei Gleichungen.

Berechnen Sie hieraus die Kreisfrequenz ω der Schwingung. Verifizieren Sie, dass eine harte Federung und eine geringere Masse zu einer schnelleren Schwingung führt.

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned} s'(t) &= a\omega\cos(\omega t) - b\omega\sin(\omega t) \\ s''(t) &= -a\omega^2\sin(\omega t) - b\omega^2\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} ms''(t) + Ds(t) &= 0 \\ -ma\omega^2\sin(\omega t) - mb\omega^2\cos(\omega t) + Da\sin(\omega t) + Db\cos(\omega t) &= 0. \\ \sin(\omega t)(-ma\omega^2 + Da) + \cos(\omega t)(-mb\omega^2 + Db) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -ma\omega^2 + Da &= 0 \\ -mb\omega^2 + Db &= 0 \end{aligned}$$

Wenn der Wagen nicht in Ruhe ist, sind nicht sowohl a als auch b Null und es folgt

$$\begin{aligned} -m\omega^2 + D &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{D}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}. \end{aligned}$$

Da D im Zähler steht und m im Nenner, führt ein größeres D und ein kleineres m zu einer höheren Kreisfrequenz ω.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass

$$f''(x) = \frac{f(x+2dx) - 2f(x+dx) + f(x)}{dx^2}.$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der Definition der Ableitung

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

und leiten Sie beide Seiten ab.

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} \\ &= \frac{1}{dx}\left(\frac{f(x+2dx) - f(x+dx)}{dx} - \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right) \\ &= \frac{1}{dx^2}(f(x+2dx) - f(x+dx) - f(x+dx) + f(x)) \\ &= \frac{f(x+2dx) - 2f(x+dx) + f(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisterme so weit wie möglich. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(x)} \\
f(x) &= \ln(x^2)e^{(x^2)} \\
f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\
f(x) &= \frac{\sin(x)}{x+1}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 15.

- $$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(x)} \\
f'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)} \\
f''(x) &= -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos^2(x)e^{\sin(x)} \\
&= (\cos^2(x) - \sin(x))e^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x^2)e^{(x^2)} \\
&= 2\ln(x)e^{(x^2)} \\
f'(x) &= 2(\frac{1}{x}e^{(x^2)} + \ln(x)2xe^{(x^2)}) \\
&= 2e^{(x^2)}(\frac{1}{x} + 2x\ln(x)) \\
f''(x) &= 4xe^{(x^2)}(\frac{1}{x} + 2x\ln(x)) + 2e^{(x^2)}(-\frac{1}{x^2} + 2\ln(x) + 2) \\
&= 2e^{(x^2)}(2 + 4x^2\ln(x) - \frac{1}{x^2} + 2\ln(x) + 2) \\
&= 2e^{(x^2)}(4 + 4x^2\ln(x) - \frac{1}{x^2} + 2\ln(x))
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\
&= \cos(x^{1/2}) \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin(x^{1/2}) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) \\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(x^{1/2}) + x^{-1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}\cos(x^{1/2})\big) \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x})}{4\sqrt{x^3}} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{4x}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{\cos(x)(x+1) - \sin(x)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\cos(x)}{x+1} - \frac{\sin(x)}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{-\sin(x)(x+1) - \cos(x)}{(x+1)^2} - \frac{\cos(x)(x+1)^2 - \sin(x)2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x+1} - \frac{\cos(x)}{(x+1)^2} - \frac{\cos(x)}{(x+1)^2} + \frac{2\sin(x)}{(x+1)^3} \\
&= -\frac{\sin(x)}{x+1} - \frac{2\cos(x)}{(x+1)^2} + \frac{2\sin(x)}{(x+1)^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Das Newton Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstelle $\hat{x}$ einer Funktion $f(x)$.

- Beginne mit einem Schätzwert für die Nullstelle x_0.
- Berechne die Linearisierung von f im Punkt x_0.

$$\ell_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

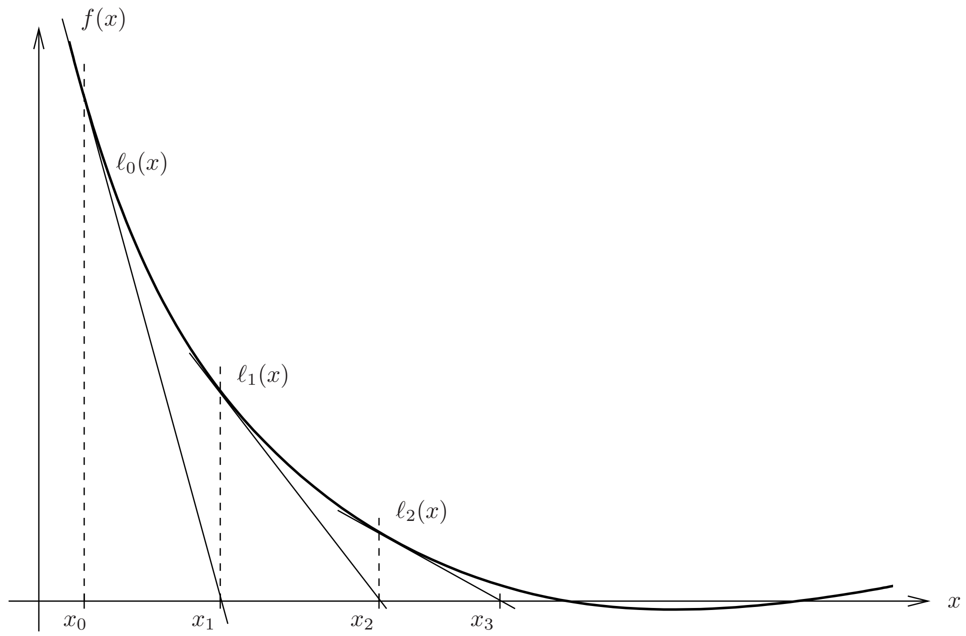
- Berechne die Nullstelle dieser Linearisierung.

$$\begin{aligned}
f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= 0 \\
x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

- Diese Nullstelle wird als neuer Schätzwert x_1 für $\hat{x}$ genommen, d.h.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- Berechne nach diesem Schema $x_2, x_3, \ldots$.



Stellen Sie eine allgemeine Formel auf, wie man die $n+1$-te Näherung x_{n+1} aus der n-ten Näherung x_n berechnet für alle n.

Sei nun

$$f(x) \quad = \quad x^2 - 2.$$

Diese Funktion hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. Beginnen Sie mit der Startnäherung $x_0 = 1$ und berechnen Sie x_n für $n = 1, 2, 3$. Was ist für diese Folge

$$\lim_{n\to\infty} x_n?$$

Lösung von Aufgabe 16.

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Für

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

erhält man

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} \\
x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{9/4 - 2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \\
x_3 &= \frac{17}{12} - \frac{289/144 - 2}{17/6} \approx 1.414216.
\end{aligned}$$

Dies ist bereits eine gute Näherung an $\sqrt{2}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}.$$

Lösung von Aufgabe 17. Linearisierung des Zählers und Nenners im Punkt $\hat{x} = 0$ ergibt

$$\frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)} \approx \frac{1 + 2x - 1}{3x} = \frac{2}{3}$$

für $x \approx 0$. Damit ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)} = \frac{2}{3} \qquad \text{(Regel von l'Hôspital).}$$

Aufgabe 18. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin(1/x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \to \infty$ haben. Versuchen Sie auch eine Folge x''_n zu finden, für die $f(x''_n)$ divergiert.

Lösung von Aufgabe 18. Sei

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi n} \\
x'_n &= \frac{1}{2\pi n + \pi/2}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= \sin(2\pi n) \\
&= 0 \\
f(x'_n) &= \sin(2\pi n + \pi/2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= 1.\end{aligned}$$

Damit wurden zwei Folgen x_n und x'_n gefunden, die beide gegen Null konvergieren, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren. Somit hat $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert. Auch die Folge

$$x''_n = 1/n$$

konvergiert gegen Null. Die zugehörige Folge der Funkionswerte $f(x''_n)$ divergiert:

$$f(x''_n) = \sin(n).$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x}.$$

Hinweis: Linearisierung bzw. Regel von l'Hôspital.

Lösung von Aufgabe 19. Man kann diese Aufgabe mit der Regel von l'Hôspital lösen. Die Idee dahinter ist die Linearisierung des Zählers und des Nenners.

Linearisierung $\ell(x)$ des Zählers.

$$\ln(1+3x)' = \frac{3}{1+3x}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 0$.

$$\begin{aligned}\ln(1+3\hat{x}) &= \ln(1) = 0 \\ \frac{3}{1+3\hat{x}} &= 3.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\ell(x) = 3x$$

Für kleine x gilt somit

$$\frac{\ln(1+3x)}{2x} \approx \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2}.$$