Heilbronn, den 8.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1
mit Musterlösungen
Blatt 9

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(x^2 + 1) = 1$$

Begründen Sie bei jedem Umformungsschritt, weshalb die Lösungsmenge dabei erhalten bleibt.

Lösung von Aufgabe 1. Die Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten gibt

$$e^{\ln(x^2+1)} = e^1.$$

Da $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$x^2 + 1 = e$$

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ ist injektiv. Anwenden auf beiden Seiten gibt

$$x^2 = e - 1.$$

Die Funktion $f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist injektiv. Da beide Seiten aus $\mathbb{R}_0^+$ sind, gilt

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{e-1}$$

bzw.

$$|x| = \sqrt{e-1}.$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{\sqrt{e-1}, -\sqrt{e-1}\right\}$$

Aufgabe 2. Sei

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Berechnen Sie

$$|A^4|.$$

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} |A^4| &= |A|^4 \\ &= 3^4 \\ &= 81. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Finden Sie eine Relation R so dass das Tripel

$$f = (\{1,2,3\}, \{4,5\}, R)$$

eine Funktion ist, die aber *nicht* surjektiv ist.

Lösung von Aufgabe 3. Zum Beispiel

$$R = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}.$$

Aufgabe 4. Definieren Sie folgende Begriffe:

- Die Folge $x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hat den Grenzwert $\hat{x} \in \mathbb{R}$.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $\hat{x}$ den Grenzwert G.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ stetig.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar.

Lösung von Aufgabe 4.

- Die Folge $x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hat den Grenzwert $\hat{x} \in \mathbb{R}$ wenn gilt:

  für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$
  gibt es ein N so dass
  für alle $n > N$ gilt, dass
  $|x_n - \hat{x}| < \varepsilon$

- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $\hat{x}$ den Grenzwert G wenn gilt:

  für jede Folge x_n mit
  - $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$
  - $x_n \in D$ und $x_n \neq \hat{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

  gilt, dass
  $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$.

- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ stetig wenn gilt:
  - f ist an der Stelle $\hat{x}$ definiert, d.h. $\hat{x} \in D$.
  - f hat einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$.
  - Der Grenzwert von f an der Stelle $\hat{x}$ ist gleich dem Funktionswert von f an der Stelle $\hat{x}$, d.h.

  $$\lim_{x\to\hat{x}} f(x) = f(\hat{x}).$$

- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar wenn die Funktion

  $$s(\Delta x) = \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

  einen Grenzwert bei $\Delta x = 0$ hat.

Aufgabe 5. Für drei Größen x, y, z gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} x &= \sin\left({}^1\!/\!_y\right) \\ z &= e^y + 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie ${}^{dx}\!/\!_{dz}$ in Abhängigkeit von z auf zwei Weisen:

- Indem Sie zunächst
$$\frac{dx}{dz} = \frac{{}^{dx}\!/\!_{dy}}{{}^{dz}\!/\!_{dy}}$$
berechnen und im Ergbenis y durch z ausdrücken. Sie müssen hierfür die zweite Gleichung nach y auflösen.
- Indem Sie zuerst y durch z ausdrücken, in x einsetzen und dann x nach z ableiten.

Verifizieren Sie, dass das Ergebnis gleich ist.

Lösung von Aufgabe 5.

- Erster Weg:
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{{}^{dx}\!/\!_{dy}}{{}^{dz}\!/\!_{dy}} \\ &= \frac{-\frac{1}{y^2}\cos\left({}^1\!/\!_y\right)}{e^y} \\ &= -\frac{1}{e^y y^2}\cos\left({}^1\!/\!_y\right). \end{aligned}$$
Da das Ergebnis als Funktion von z ausgedrückt werden soll, muss y in Abhängigkeit von z berechnet werden. Hierzu wird die zweite Gleichung nach z aufgelöst.
$$y = \ln(z-1).$$
Einsetzen ergibt
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= -\frac{1}{e^{\ln(z-1)}\ln(z-1)^2}\cos\left({}^1\!/\!_{\ln(z-1)}\right) \\ &= -\frac{1}{(z-1)\ln(z-1)^2}\cos\left({}^1\!/\!_{\ln(z-1)}\right) \\ &= \frac{1}{(1-z)\ln(z-1)^2}\cos\left({}^1\!/\!_{\ln(z-1)}\right) \end{aligned}$$

- Zweiter Weg:
$$y = \ln(z-1)$$
Einsetzen in x.
$$x = \sin\left({}^1\!/\!_{\ln(z-1)}\right)$$

Ableiten.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= -\frac{1}{\ln(z-1)^2}\frac{1}{z-1}\cos\left({}^{1}\!/\!_{\ln(z-1)}\right)\\ &= \frac{1}{(1-z)\ln(z-1)^2}\cos\left({}^{1}\!/\!_{\ln(z-1)}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f' \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = ax^{a-1}.$$

Sie dürfen hierbei die Ketteneregel verwenden und die Ableitung der e- und der ln-Funktion. Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$x^a \;=\; e^{\ln(x^a)} \;=\; e^{a\ln(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}\left(e^{a\ln(x)}\right)' &= e^{a\ln(x)}(a\ln(x))'\\ &= x^a\,a\,\frac{1}{x}\\ &= ax^a\,x^{-1}\\ &= ax^{a-1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7. In dieser Aufgabe soll die Produktregel der Ableitung

$$(f(x)g(x))' \;=\; f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

auf mehr als zwei Faktoren verallgemeinert werden. Zeigen Sie zunächst, dass

$$(f(x)g(x)h(x))' \;=\; f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

indem Sie die Produktregel zwei Mal anwenden. Sei nun

$$\begin{aligned}f(x) &= f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\\ &= \prod_{i=1}^{n} f_i(x).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f'(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(f_i'(x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x)\right).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Die Logarithmusfunktion macht aus einem Produkt eine Summe. Es gilt

$$\ln(ab) \quad = \quad \ln(a) + \ln(b).$$

Wenden Sie dieses Gesetz an um das Produkt in

$$\ln(f(x)) \quad = \quad \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)$$

in eine Summe zu transformieren.

- Leiten Sie dann $\ln(f(x))$ mit der Summenregel ab.
- Leiten Sie $\ln(f(x))$ mit der Kettenregel ab und lösen Sie nach $f'(x)$ auf.
- Leiten Sie hieraus die o.g. Formel für $f'(x)$ her.

Lösung von Aufgabe 7. Für drei Faktoren $f(x)g(x)h(x)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\left(f(x)\underbrace{g(x)h(x)}_{u(x)}\right)' &= (f(x)u(x))' \\
&= f'(x)u(x) + f(x)u'(x) \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g(x)h(x))' \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)) \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).
\end{aligned}$$

Für n Faktoren $f(x) = f_1(x)\cdots f_n(x)$ erhält man durch Logarithmieren

$$\begin{aligned}
\ln(f(x)) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln(f_i(x)) \\
\ln(f(x))' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x)}{f_i(x)} \\
\ln(f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\
f'(x) &= f(x)\ln(f(x))' \\
&= f(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x)}{f_i(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)\frac{f(x)}{f_i(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_j(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad $n = 2$ an die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

mit Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$.

Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ für $x \in [1, 2]$.

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1} = \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\ f'''(x) &= -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 1$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= 1 \\ f'(\hat{x}) &= -1 \\ f''(\hat{x}) &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polyom vom Grad 2 an $f(x)$ mit Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$

$$p(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2.$$

Der Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[1, 2]$ ist höchstens

$$\begin{aligned} \left(\max_{\xi \in [1,2]} |f'''(\xi)|\right) \frac{(2-1)^3}{3!} &= \left(\max_{\xi \in [1,2]} \frac{6}{\xi^4}\right) \frac{1}{6} \\ &= 6\,\frac{1}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x(e^x - 1)}.$$

Hinweis: Approximieren Sie den Zähler und Nenner durch ein Taylor Polynom vom Grad 2.

Lösung von Aufgabe 9. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) \\ g(x) &= x(e^x - 1). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) \\ g'(x) &= e^x - 1 + xe^x \\ g''(x) &= e^x + e^x + xe^x \quad = \quad e^x(2+x) \end{aligned}$$

Für $x \approx 0$ gilt damit

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \quad = \quad x^2 \\ g(x) &\approx g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 \quad = \quad x^2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x(e^x-1)} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \quad = \quad 1.$$

Aufgabe 10. Das Newton Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstelle $\hat{x}$ einer Funktion $f(x)$.

- Beginne mit einem Schätzwert für die Nullstelle x_0.
- Berechne die Linearisierung von f im Punkt x_0.

$$\ell_0(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

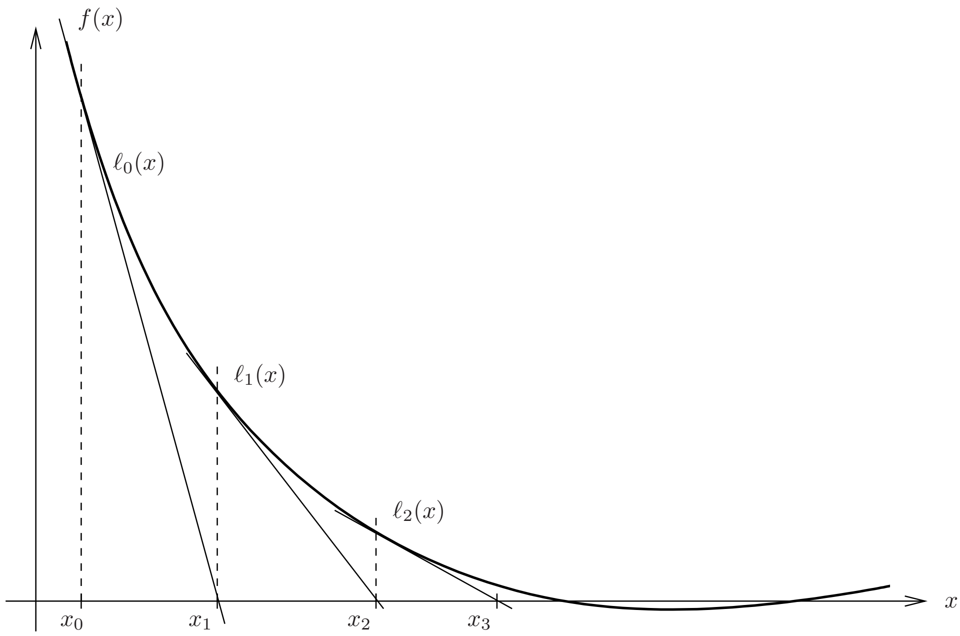
- Berechne die Nullstelle dieser Linearisierung.

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= 0 \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

- Diese Nullstelle wird als neuer Schätzwert x_1 für $\hat{x}$ genommen, d.h.

$$x_1 \quad = \quad x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- Berechne nach diesem Schema $x_2, x_3, \ldots$.



Stellen Sie eine allgemeine Formel auf, wie man die $n+1$-te Näherung x_{n+1} aus der n-ten Näherung x_n berechnet für alle n.

Sei nun

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Diese Funktion hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. Beginnen Sie mit der Startnäherung $x_0 = 1$ und berechnen Sie x_n für $n = 1, 2, 3$. Was ist für diese Folge

$$\lim_{n\to\infty} x_n?$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Für

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

erhält man

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} \\
x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{9/4-2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \\
x_3 &= \frac{17}{12} - \frac{289/144-2}{17/6} \approx 1.414216.
\end{aligned}$$

Dies ist bereits eine gute Näherung an $\sqrt{2}$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu folgenden Funktionen und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 \\
f(x) &= \sin(x) \\
f(x) &= xe^x
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 11.

- $$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x \\
&= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 2 \\
f''(x) &= 6x - 6 \\
f''(x_1) &= -6 \\
f''(x_2) &= 6
\end{aligned}$$

  Also ist $x_1 = 0$ ein Hochpunkt und $x_2 = 2$ ein Tiefpunkt.

- $$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \cos(x) \\
&= 0 \\
x &= \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
f''(x) &= -\sin(x) \\
f''(\pi/2 + 2k\pi) &= -1 \\
f''(\pi/2 + (2k+1)\pi) &= 1
\end{aligned}$$

Also sind $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Hochpunkte und $\pi/2 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Tiefpunkte.

- $$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \\ f'(x) &= (1+x)e^x \\ &= 0 \\ x &= -1 \\ f''(x) &= (2+x)e^x \\ f''(-1) &= e^{-1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

  Also ist $x = -1$ ein Tiefpunkt.

Aufgabe 12. Der Begriff Ableitung lässt sich leicht auf mehrstellige Funktionen übertragen. Sei z.B.

$$f(x,y) = x^2y + x\sin(y) + e^y.$$

- Man kann in dieser Funktion die Variable y als konstanten Parameter betrachten und erhält damit eine einstellige Funktion von x. Die Ableitung dieser einstelligen Funktion heißt partielle Ableitung nach x:

  $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy + \sin(y).$$

- Genauso kann man auch die Variable x als konstanten Parameter betrachten und dadurch eine einstellige Funktion von y erhalten. Die Ableitung dieser einstelligen Funktion heißt partielle Ableitung nach y:

  $$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 + x\cos(y) + e^y.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = \sin(x^2y) + \frac{x}{\cos(y)}.$$

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= 2xy\cos(x^2y) + \frac{1}{\cos(y)} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x^2\cos(x^2y) + x\frac{\sin(y)}{\cos(y)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(ye^x)$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^{-1/2}\sin(ye^x)\\
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(ye^x) + x^{-1/2}\cos(ye^x)ye^x\\
&= -\frac{\sin(ye^x)}{2\sqrt{x^3}} + \frac{\cos(ye^x)ye^x}{\sqrt{x}}\\
\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) &= \frac{\cos(ye^x)e^x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Seien $f, g \in A \to B$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf ganz A differenzierbar sind.

- Kann man aus $f = g$ schließen, dass $f' = g'$?
- Kann man aus $f' = g'$ schließen, dass $f = g$?
- Kann man aus $f' = g'$ schließen, dass es eine Konstante C gibt so dass

  $$f(x) = g(x) + C$$

  für alle $x \in A$?

Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

Lösung von Aufgabe 14.

- Wenn $f = g$ dann ist auch $f' = g'$ da die Ableitung einer Funktion eindeutig ist.
- Wenn $f' = g'$ kann durchaus $f \neq g$ sein. Sei z.B.

  $$\begin{aligned} f(x) &= x^2\\ g(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

  Dann ist

  $$f' = g' \text{ aber trotzdem } f \neq g.$$

- Dies gilt nur wenn A ein Intervall ist. Ein Gegenbeispiel ist

  $$f, g \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$$

  $$\begin{aligned} f(x) &= 1/x\\ g(x) &= \begin{cases} 1/x + 3 & \text{falls } x < 0\\ 1/x + 5 & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

  Dann ist $f' = g'$ aber trotzdem unterscheiden sich f und g nicht nur um eine Konstante.

Aufgabe 15. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie benutzt haben.

a)
$$\int x^3 dx$$

b)
$$\int \sin(3x) dx$$

c)
$$\int e^{-2x} dx$$

Lösung von Aufgabe 15.

a)
$$\int x^3 dx = x^4/4 + C$$

b) Substitution:
$$g = 3x, \quad \frac{dg}{dx} = 3, \quad dx = \frac{1}{3} dg.$$

Damit gilt
$$\begin{aligned}\int \sin(3x) dx &= \int \sin(g) \frac{1}{3} dg \\ &= -\frac{1}{3}\cos(g) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C\end{aligned}$$

c) Substitution:
$$g = -2x, \quad \frac{dg}{dx} = -2, \quad dx = -\frac{1}{2} dg.$$

Damit gilt
$$\begin{aligned}\int e^{-2x} dx &= \int e^g (-1/2) dg \\ &= -\frac{1}{2}\int e^g dg \\ &= -\frac{1}{2} e^g + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Wenn $f(x)$ an der Stelle $\hat{x}$ einen lokalen Extremwert hat, dann ist $f'(\hat{x}) = 0$.

Für mehrstellige Funktionen gilt dies analog. Wenn $f(x, y)$ an der Stelle $(\hat{x}, \hat{y})$ einen lokalen Extremwert hat, dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{y}) &= 0 \qquad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x}, \hat{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Berechnen Sie alle Punkte $(\hat{x}, \hat{y})$, an denen beide partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad (x+1)\sin(x+y)$$

Null sind.

Lösung von Aufgabe 16. Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \sin(x+y) + (x+1)\cos(x+y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= (x+1)\cos(x+y). \end{aligned}$$

Zu Lösen ist damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x+y) + (x+1)\cos(x+y) &= 0 \\ (x+1)\cos(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt wenn

$$x = -1 \text{ oder } \cos(x+y) = 0.$$

- Im Fall $x = -1$ wird aus der ersten Gleichung

  $$\sin(y-1) \quad = \quad 0.$$

  Diese hat die Lösungen

  $$\begin{aligned} y - 1 &= k\pi \\ y &= k\pi + 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  Damit erhält man die Lösungen

  $$\mathbb{L} \quad = \quad \{(-1, k\pi + 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Im Fall $x \neq -1$ muss $\cos(x+y) = 0$ sein. Aus der ersten Gleichung wird dann

  $$\sin(x+y) \quad = \quad 0.$$

  Wenn aber $\cos(x+y) = 0$ ist, dann ist $\sin(x+y) \neq 0$, d.h. es kommen keine weiteren Lösungen dazu.

Aufgabe 17. Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch eine Gerade $\ell(x)$ approximiert werden so dass der quadratische Fehler

$$\int_0^\pi (\ell(x) - \cos(x))^2 dx$$

minimal wird. Berechnen Sie diese Gerade.

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz

$$\ell(x) \quad = \quad ax + b.$$

Da ein Integral nichts anderes ist als eine Summe, lassen sich die Optimalitätskriterien mit Hilfe der Summenregel der Ableitung wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\pi (ax+b-\cos(x))^2 dx &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}(ax+b-\cos(x))^2 dx &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial b}\int_0^\pi (ax+b-\cos(x))^2 dx &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial b}(ax+b-\cos(x))^2 dx &= 0.
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 17. Partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}(ax+b-\cos(x))^2 &= 2x(ax+b-\cos(x)) \\
\frac{\partial}{\partial b}(ax+b-\cos(x))^2 &= 2(ax+b-\cos(x)).
\end{aligned}$$

Integrale.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}(ax+b-\cos(x))^2 dx \\
&= \int_0^\pi 2x(ax+b-\cos(x))dx \\
&= 2\int_0^\pi (ax^2+bx-x\cos(x))dx \\
&= 2\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2-x\sin(x)-\cos(x)\right]_0^\pi dx \\
&= 2\left(\frac{1}{3}a\pi^3+\frac{1}{2}b\pi^2+1+1\right) \\
&= \frac{2}{3}a\pi^3+b\pi^2+4 \\
&\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial b}(ax+b-\cos(x))^2 dx \\
&= \int_0^\pi 2(ax+b-\cos(x)) \\
&= 2\left[\frac{1}{2}ax^2+bx-\sin(x)\right]_0^\pi \\
&= 2\left(\frac{1}{2}a\pi^2+b\pi\right) \\
&= a\pi^2+2b\pi.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde mit partieller Integration

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x)-\int \sin(x)dx = x\sin(x)+\cos(x)$$

berechnet.

Damit erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}a\pi^3+b\pi^2+4 &= 0 \\
a\pi^2+2b\pi &= 0.
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$b = -\frac{a\pi}{2}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a\pi^3 - \frac{1}{2}a\pi^3 + 4 &= 0 \\ a\pi^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) &= -4 \\ a\pi^3\frac{1}{6} &= -4 \\ a &= -\frac{24}{\pi^3} \\ b &= \frac{12}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\ell(x) = -\frac{24}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2}.$$

Aufgabe 18. Für welche Werte von n ist

$$\int_1^\infty x^n dx$$

endlich?

Lösung von Aufgabe 18. Für $n \neq -1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_1^a x^n dx &= \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_1^a \\ &= \frac{1}{n+1}\left(a^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{a\to\infty} a^{n+1}$$

ist endlich genau dann wenn $n + 1 \leq 0$ bzw. $n \leq -1$.
Für den Spezialfall $n = -1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_1^a x^{-1} dx &= \frac{1}{n+1}\left[\ln(x)\right]_1^a \\ &= \frac{1}{n+1}\ln(a) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{a\to\infty} \ln(a) = \infty.$$

Somit ist

$$\int_1^\infty x^n dx$$

endlich genau dann wenn $n < -1$.

Aufgabe 19. Berechnen Sie

$$\int x \ln(x) dx.$$

Lösung von Aufgabe 19. Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C.
\end{aligned}$$