Heilbronn, den 13.3.2025 | Prof. Dr. V. Stahl | SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 1

Zu bearbeiten bis 20.3.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{x}{x+1} + x \quad = \quad 0.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x^2+1) \quad = \quad 1.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$ gilt

$$a^{\ln(b)} \quad = \quad b^{\ln(a)}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $e^{\ln(x)} = x$ und verwenden Sie die Rechengesetze der ln-Funktion.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$\frac{e^x}{e^{\sqrt{x}}} \quad = \quad \left(e^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}-1}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung

$$\ln\left(\frac{x+1}{2\sqrt{e^x}}\right) \quad = \quad \frac{1-x}{2}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 6. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} \quad = \quad x^2.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 7. Lösen Sie die Gleichung

$$\log_3(x) \quad = \quad \log_9(y)$$

nach x auf und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Nutzen Sie das Logarithmengesetz

$$\log_a(x) \quad = \quad \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Aufgabe 8. Am 19.11.20 erschien folgender Tweet zum Wachstum der Anzahl positiver Corona Tests.

`https://twitter.com/jens140180/status/1329377474065674241`

Der renommierte Epidemiologe Prof. Dr. Christian Drosten erwiderte hierauf: “Sie verbreiten Desinformation”:

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329384476561059841`

Hat er recht?

Kurz darauf kommentiert Prof. Dr. Stefan Homburg

`https://twitter.com/SHomburg/status/1329406816531468295`

was sofort als “Regelverstoß” gemeldet wurde. Hat er gegen die Regeln der Mathematik verstoßen?

Weshalb entwickelte sich so eine lange und erfolglose Debatte, obwohl es doch um ein rein mathematisches Problem ging?

Das Ende vom Lied war übrigens:

`https://twitter.com/c_drosten/status/1329457311270768644`

Aufgabe 9. (Schwierig!) Berechnen Sie die Lösung x der Gleichung

$$9^x - 6^x \quad = \quad 4^x.$$

Aufgabe 10. Gegeben seien die Konstantensymbole c, d, die Variablensymbole x, y und die Funktionssymbole f (zweistellig) und g (einstellig). Damit ist z.B.

$$f(f(c, x), g(g(y)))$$

ein Term. Nennen Sie 5 weitere Terme, die aus den gegebenen Symbolen bestehen. Wie viele Terme lassen sich mit den gegebenen Symbolen konstruieren?

Aufgabe 11. Ersetzen Sie in dem Term

$$(x+3)^2 \, \frac{\sqrt{2x-y}}{\sin(x)}$$

jedes Auftreten des Variablensymbols x durch den Term

$$(3y - 1).$$

Aufgabe 12. In natürlicher Sprache gibt es folgende Phänomene:

- Zwei unterschiedliche Worte mir der selben Bedeutung (Synonyme)
- Zwei unterschiedliche Dinge, die mit dem selben Wort bezeichnet werden (mehrdeutige Worte).

Finden Sie dazu je ein Beispiel. Welches Phänomen macht in der Kommunikation mehr Schwierigkeiten?

Aufgabe 13. Ersetzen Sie alle Vorkommen des Variablensymbols x in dem Term

$$\sqrt{x + \sin(2x + 5)y}$$

durch den Term

$$\cos(y) + 3.$$

Stellen Sie den Term vor und nach der Ersetzung jeweils als Baum dar.

Aufgabe 14. Terme sind Zeichenketten. Folglich sind die Terme

$$x + y$$

und

$$y + x$$

unterschiedlich: Die erste Zeichenkette beginnt mit x, die zweite mit y. Trotzdem besteht kein Zweifel daran, dass

$$x + y = y + x.$$

Versuchen Sie den scheinbaren Widerspruch zu erklären.

Aufgabe 15. Von einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass für alle x gilt

$$f(5x + 3) \quad = \quad x^2.$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(x)$.

Hinweis: Sie dürfen auf beiden Seiten der Gleichung das Variablensymbol x durch einen beliebigen Term ersetzen. Im ersten Schritt ersetzt man x durch $x/5$ und erhält

$$\begin{aligned} f\left(5\left(x/5\right) + 3\right) &= \left(x/5\right)^2 \\ f\left(x + 3\right) &= \left(x/5\right)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Stellen Sie den Term

$$\sin(x^2 + y)e^{2x}$$

als Baum dar. Überlegen Sie sich zunächst welche Funktionssymbole im Term auftreten und lassen Sie sich von der Notation nicht irritieren. Ein Teilterm entspricht in dieser Darstellung einem Teilbaum. Teilterme sind somit z.B.

$$x, y, 2, x^2, x^2 + y, \ldots.$$

Nennen Sie alle Teilterme des gegebenen Terms.

Aufgabe 17. Sei

$$f(x) \quad = \quad x^2 e^x + \sin(2x)$$

Was ist dann

$$f(y(2+z))?$$

Aufgabe 18. Ähnlich wie es Rechengesetze für Zahlen gibt, z.B.

$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 + 2ab + b^2,$$

die für alle Zahlen a, b gelten, gibt es auch Rechengesetze für Wahrheitswerte. So gilt z.B.

$$\neg F \vee G \quad = \quad F \to G$$

für alle Wahrheitswerte F, G. Hierbei bedeutet $\neg$ die Negation, $\vee$ oder und $\to$ wenn–dann. Die Negation bindet stärker als alle anderen logischen Funktionen, man kann sich also um $\neg F$ Klammern denken.

Formeln für Wahrheitswerte sind viel einfacher zu beweisen als Formeln für Zahlen, da es nur zwei Wahrheitswerte gibt aber unendlich viele Zahlen. Für die beiden Wahrheitswerte F und G gibt es somit nur vier Kombinationen. Damit lässt sich o.g. Formel in einer Wahrheitstabelle beweisen, indem man alle Kombinationen ausrechnet und zeigt, dass auf beiden Seiten immer der gleiche Wert herauskommt:

F	G	$\neg F \vee G$	$F \to G$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Beweisen Sie damit auch die sog. Gesetze von de Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(F \wedge G) &= \neg F \vee \neg G \\ \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G. \end{aligned}$$

Beweisen Sie weiterhin

$$F \leftrightarrow G \quad = \quad (F \to G) \wedge (G \to F)$$

wobei $\leftrightarrow$ genau dann wenn bedeutet: $F \leftrightarrow G$ ist wahr, wenn F und G den gleichen Wahrheitswert haben und falsch sonst.

Aufgabe 19. Angenommen die Aussage $F \to G$ ist wahr. Entscheiden Sie von jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist.

- F ist notwendige Bedingung für G.
- F ist hinreichende Bedingung für G.
- G ist notwendige Bedingung für F.
- G ist hinreichende Bedingung für F.

Aufgabe 20. Nennen Sie drei Teilmengen der Menge

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

Aufgabe 21. Finden Sie zwei Mengen A, B für die weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$ gilt.