Heilbronn, den 15.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 10

Zu bearbeiten bis 22.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\sin(1/x)}{1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

und $\hat{x} = 0$.

- Berechnen Sie

$$\lim_{x \to \hat{x}} f(x).$$

- Ist f stetig bei $\hat{x} = 0$?
- Ist f differenzierbar bei $\hat{x} = 0$?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Aufgabe 2. Sei

$$f \in D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(\ln(x))$$

mit

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 1\}.$$

Berechnen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie verwendet haben.

$$\int 4e^{2(x-1)}dx$$

$$\int -x\sin(2x)dx.$$

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad = \quad 1.$$

Berechnen Sie hiermit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f'(x)dx.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}dx.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x\ln\left({}^{1}\!/_{x}\right)}.$$

Aufgabe 7. Von einer Funktion $f(x)$ sei eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt. Berechnen Sie hiermit eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x}f(\ln(x)).$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \cos\left(\cos(x)^2\right)\cos(x)\sin(x).$$

Aufgabe 9. Für welche Werte von n ist der Flächeninhalt unter der Funktion $f(x) = x^n$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ endlich? Hinweis: n kann auch negativ sein.

Aufgabe 10. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{3+j}{j(-2j+1)}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von

$$\frac{1}{1+\frac{1}{j}}.$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z \quad = \quad \frac{j}{(2+j)^2} + \frac{1}{5j}.$$

Aufgabe 13. Beweisen Sie unter Verwendung der Eulergleichung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

dass

$$\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von folgenden Zahlen.

$$1 + e^{j\varphi},\ e^{2+j\varphi},\ \frac{2}{1+e^{j\varphi}}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von folgenden Zahlen, d.h. bringen Sie sie auf die Form

$$re^{j\varphi}$$

wobei $r, \varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$.

$$1+j,\ 1-j,\ \frac{1}{1+j},\ \frac{j}{1+j},\ -2e^{j\pi/2},\ 3e^{2+5j},\ \frac{3}{e^{2+5j}}$$

Aufgabe 16. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es für jede komplexe Zahl z genau eine reelle Zahl a und genau eine reelle Zahl b gibt so dass

$$z = a + jb.$$

Damit ist gezeigt, dass der Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl eindeutig ist. Das ist nicht selbstverständlich, denn bei Bruchzahlen sind Zähler und Nenner ja *nicht* eindeutig!

- Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

  $$a + jb = 0 \ \rightarrow\ (a = 0 \wedge b = 0).$$

  Beginnen Sie den Beweis wie folgt:
  Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Annahme:

  $$a + jb = 0.$$

  Zu zeigen:

  $$a = 0 \text{ und } b = 0.$$

- Zeigen Sie dann, dass für alle $a, b, u, v \in \mathbb{R}$ gilt

  $$a + jb = u + jv \ \rightarrow (a = u \wedge b = v).$$

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Aufgabe 18. Sei $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(uz) &= u\mathrm{re}(z) \\ \mathrm{im}(uz) &= u\mathrm{im}(z). \end{aligned}$$

Ein *reeller* Faktor kann somit aus der Real- und Imaginärteiloperation herausgezogen werden.

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{uz} = u\,\overline{z}.$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$z\overline{z} - z^2 = 1.$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.