Heilbronn, den 22.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 11

Zu bearbeiten bis 3.6.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = x\ln(x).$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \frac{1}{2}\ln(x^2) \\ \int \ln(x)dx &= x\ln(x) - x + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen folgende Funktionen unstetig sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sign}(\cos^2(x+1)) \\ f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $f \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x, y) = (1/y, -xy).$$

Berechnen Sie einen Term für die Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Funktionen f hat einen (uneigentlichen) Grenzwert bei $\hat{x} = 0$? Falls eine Funktion keinen (uneigentlichen) Grenzwert hat, versuchen Sie dies zu beweisen, indem Sie zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n finden, für die die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte haben.

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(1/x)\cos(1/x)$$

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5. Für welche Werte von a und b ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin(bx) + ax$$

überall streng monoton steigend?

Aufgabe 6. Sei

$$f(x) \quad = \quad \operatorname{sign}(x)x^2$$

wobei

$$\operatorname{sign}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ differenzierbar ist obwohl $\operatorname{sign}(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ einen Sprung hat. Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 7. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 der Funktion

$$f(x) \quad = \quad e^{1/x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

und berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2.

Aufgabe 8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (e^x + 1)\sin(e^x + x).$$

- Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$. Hinweis: Versuchen Sie's mit einer geeigneten Substitution.
- Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, für die gilt $F(0) = 0$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie

$$\int \cos(x)\sqrt{\sin(x)}dx.$$

Aufgabe 10. Sei

$$z \quad = \quad re^{j\varphi}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Berechnen Sie die Polarkoordinaten von z^j.

Hinweis: Nutzen Sie die Gleichung $r = e^{\ln(r)}$. Für $z = 0$ ist z^j nicht definiert.

Aufgabe 11. Beweisen Sie den Satz von Moivre:

$$(\cos(x) + j\sin(x))^n \quad = \quad \cos(nx) + j\sin(nx).$$

Mit der Eulergleichung ist der Beweis sehr kurz.

Aufgabe 12.

- Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$,

  $$f(a,b) \quad = \quad a + jb.$$

  Ist f bijektiv? Falls ja, berechnen Sie die Umkehrfunktion von f, falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie, dass die Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$,

  $$f(r,\varphi) \quad = \quad re^{j\varphi}$$

  nicht injektiv ist.
- Auch die Funktion $f \in \left(\mathbb{R}_0^+ \times \ ]-\pi,\pi]\right) \ \to \ \mathbb{C}$

  $$f(r,\varphi) \quad = \quad re^{j\varphi}$$

  ist nicht injektiv. Warum?
- Ist die Funktion $f \in (\mathbb{R}^+ \times \ ]-\pi,\pi]) \ \to \ \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  $$f(r,\varphi) \quad = \quad re^{j\varphi}$$

  bijektiv?

Aufgabe 13. Die Gleichung

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \quad = \quad 1 \qquad \text{für alle } \varphi$$

lässt sich leicht anhand eines rechtwinklingen Dreiecks mit Hypothenuse 1 und des Satzes von Pythagoras zeigen. Dies ist jedoch ein geometrischer Beweis, bei dem z.B. Begriffe wie “rechter Winkel” verwendet werden, die wir gar nicht definiert haben.

Beweisen Sie daher die o.g. Gleichung unter Verwendung von komplexen Zahlen und der Euler Gleichung, d.h.

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi) &= \operatorname{im}(e^{j\varphi}) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \\
\cos(\varphi) &= \operatorname{re}(e^{j\varphi}) = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|e^z| \quad = \quad e^{\operatorname{re}(z)}.$$

Sie dürfen alle Eigenschaften der komplexen Zahlen nutzen, die in der Vorlesung gezeigt wurden. Der Beweis sollte etwa 5 Schritte lang sein.

Aufgabe 15. Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$z = \frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1+j)}.$$

Berechnen Sie $|z|$ in Abhängigkeit von x.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Aufgabe 17. Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl $f(x) \in \mathbb{C}$ zuordnet, kann in eine Realteilfunktion

$$f_{\text{re}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{\text{re}}(x) = \text{re}(f(x))$$

und eine Imaginärteilfunktion

$$f_{\text{im}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \text{im}(f(x))$$

zerlegt werden. Es gilt dann

$$f(x) = f_{\text{re}}(x) + j f_{\text{im}}(x).$$

Laut Definition wird so eine Funktion wie folgt abgeleitet:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{f_{\text{re}}(x+dx) + j f_{\text{im}}(x+dx) - (f_{\text{re}}(x) + j f_{\text{im}}(x))}{dx} \\
&= \frac{f_{\text{re}}(x+dx) - f_{\text{re}}(x)}{dx} + j \frac{f_{\text{im}}(x+dx) - f_{\text{im}}(x)}{dx} \\
&= f'_{\text{re}}(x) + j f'_{\text{im}}(x).
\end{aligned}$$

Man kann also Real- und Imaginärteil separat ableiten.

- Zeigen Sei damit, dass

$$\left(e^{jx}\right)' = j e^{jx}.$$

- Beweisen sie die konstante Faktor Regel für komplexe Konstanten z, d.h.

$$(zf)' = z f'$$

  Hinweis: Die Multiplikation einer Zahl z mit einer Funktion f ist definiert durch

$$(zf)(x) = z f(x).$$

- Sei F_{re} eine Stammfunktion von f_{re} und F_{im} eine Stammfunktion von f_{im}. Zeigen Sie, dass dann

$$F(x) = F_{\text{re}}(x) + j F_{\text{im}}(x)$$

  eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Man kann somit Real- und Imaginärteil separat integrieren.

Aufgabe 18. Sei

$$z = \frac{1}{1+e^{j\varphi}}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(z)$. Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von φ.

Aufgabe 19. Die Menge aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten wird mit $\mathbb{Z}[x]$ bezeichnet. So ist z.B.

$$3x^2 - 5x + 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Man kann diese Menge (ähnlich wie komplexe Zahlen) auch so konstruieren: Zu der Menge $\mathbb{Z}$ wird zunächst nur ein neues Element x dazugenommen. Anschließend werden die Addition und die Multiplikation, die bisher nur auf $\mathbb{Z}$ definiert waren, auf x erweitert, so dass z.B. auch $3+x, 5x, x^2$ usw. definiert sind. Folglich müssen auch diese Elemente in die erweiterte Menge aufgenommen werden. Diese Erweiterung wird so durchgeführt, dass die bekannten Rechengesetze KG, AG, DG, NE weiterhin gelten. Daraus folgt, dass z.B.

$$(x-3)(2x+1) \text{ und } 2x^2 - 5x - 3$$

Terme für das *gleiche* Element aus dieser Menge sind.

Stellt man nun abgesehen von den Rechengesetzen zusätzliche Einschränkungen auf wie z.B.

$$2x - 1 = 0,$$

beschreiben noch mehr Terme das gleiche Element aus $\mathbb{Z}[x]$. Zum Beispiel gilt dann

$$\begin{aligned} 1 &= 2x \\ x &= 2x^2 \\ x^2 &= 2x^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit ist z.B.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 + b(2x^2) + c(2x) \\ &= ax^2 + 2bx^2 + c(4x^2) \\ &= x^2(a + 2b + 4c). \end{aligned}$$

Man kann somit jedes Element von $\mathbb{Z}[x]$ auf die Form ux^n bringen für ein $u \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Naheliegenderweise bezeichnet man das neue Element nicht mehr mit x sondern mit $1/2$ und die erweiterte Menge mit $\mathbb{Z}[1/2]$. Die Elemente von $\mathbb{Z}[1/2]$ sind damit Polynome aus $\mathbb{Z}[x]$, ausgewertet bei $x = 1/2$ und die Normalform ux^n bedeutet, dass man den Bruch auf einen gemeinsamen Nenner 2^n bringt.

Mit der gleichen Argumentation gilt auch $\mathbb{C} = \mathbb{R}[j]$.

- Nennen Sie drei Elemente aus $\mathbb{Z}[1/2] \setminus \mathbb{Z}$, d.h. Elemente, die bei der Erweiterung von $\mathbb{Z}$ hinzukommen.
- Welche der folgenden Elemente sind in $\mathbb{Z}[1/2]$?

$$23,\ 1/4,\ 3 - 1/2,\ 1/3,\ \pi,\ 5/4 + 3/8,\ \sqrt{2}$$

- Ist die Menge $\mathbb{Z}[1/2]$ abgeschlossen unter Division, d.h. gilt für alle $a, b \in \mathbb{Z}[1/2]$ mit $b \neq 0$, dass auch

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}[1/2]?$$

- Wie lassen sich die Elemente von $\mathbb{Z}[1/2]$ einfacher charakterisieren? Überlegen Sie sich hierzu, was für Zahlen herauskommen können, wenn man ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten bei $1/2$ auswertet. Offensichtlich handelt es sich um eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.
- Die Menge $\mathbb{Z}[1/2]$ wird auch als Menge der binär rationalen Zahlen bezeichnet. Welche Ähnlichkeit haben diese Zahlen mit den im Rechner verwendeten Gleitkommazahlen?

Aufgabe 20. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\big(e^{jx} + e^{-jx}\big).$$

Entsprechend wird die Cosinusfunktion ins Komplexe erweitert durch

$$\cos(z) \quad = \quad \frac{1}{2}\big(e^{jz} + e^{-jz}\big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\cos(\overline{z}) \quad = \quad \overline{\cos(z)}.$$

Hinweis: Stellen Sie z in kartesischen Koordinaten dar und nutzen Sie

$$e^{jx} \quad = \quad \overline{e^{-jx}}.$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.