Übungen zu Mathematik 1

Blatt 12

Zu bearbeiten bis 5.6.2025

Name:	Matrikelnr.:

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung indem Sie Äquivalenzumformungen vornehmen. Wenn Sie beim Umformen eine Funktion auf beiden Seiten anwenden, dann geben Sie die Funktion explizit an und prüfen, ob die Funktion injektiv ist. Sie dürfen alle Gesetze der Logarithmierung und der Potenzrechnung benutzen, schreiben Sie aber dazu welches Gesetz Sie anwenden. Sie finden die Gesetze u.a. im Skript.

$$3^{\ln(x)} = \frac{5}{x}$$

Aufgabe 2. Sei $f \in (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x, y) = \left(\frac{5}{x^3}, 3 \right)$$

Berechnen Sie einen Term für die Komposition $f \circ f$ und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion, d.h.

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ gilt} \\ &\text{wenn } x_1 < x_2 \text{ dann } f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Begründen Sie dass f dann injektiv ist.

Aufgabe 4. Eine Folge x_n heißt

- monoton steigend, wenn $x_n \leq x_{n+1}$,
- streng monoton steigend, wenn $x_n < x_{n+1}$,
- monoton fallend, wenn $x_n \geq x_{n+1}$,
- streng monoton fallend, wenn $x_n > x_{n+1}$,
- alternierend, wenn $x_n x_{n+1} < 0$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Prüfen Sie welche der unten angegebenen Folgen diese Eigenschaften besitzen. Geben Sie zu jeder Folge an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist. Hinweis: Meistens sieht man das sehr schnell wenn man die ersten paar Glieder der Folge aufschreibt und den qualitativen Verlauf der Folge skizziert.

- a) $x_n = (n + 1)/(n + 3)$
- b) $x_n = (n + 1)/n^2$
- c) $x_n = e^n/n^3$
- d) $x_n = (1/2)^n$
- e) $x_n = n(1/2)^n$
- f) $x_n = (1 + 1/n)^n$
- g) $x_1 = 1, x_{n+1} = (x_n^2 + 3)/(2x_n)$
- h) $x_1 = -1, x_{n+1} = (x_n^2 + 3)/(2x_n)$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ haben.

Aufgabe 6.

- Berechnen Sie die Menge aller $a \in \mathbb{R}$ für die der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ax} \cos(x)$$

existiert.

- Berechnen Sie die Menge aller $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ für die der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(u+iv)x}$$

existiert und endlich ist. Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $u = v = 0$. Hinweis: Rechnen Sie in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 7. Für drei Größen x, y, z gelten folgende Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} x &= \ln(y) + y \\ y &= z^2 \sin(z). \end{aligned}$$

Berechnen Sie dz/dx in Abhängigkeit von z .

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 3 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ der Funktion

$$f(x) = \sin(x) - e^x.$$

Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

und berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 . Im Ergebnis dürfen keine sin-, cos- oder e -Terme auftreten.

Aufgabe 9. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(u) du = f(t) \quad \text{für alle } t.$$

Würde diese Gleichung auch noch gelten, wenn f an einer Stelle einen Sprung hat?

Aufgabe 10. Ein See enthält zu jedem Zeitpunkt t die Wassermenge $q(t)$ Liter, wobei die Funktion $q(t)$ bekannt ist. Der See hat einen Zufluss aber keinen Abfluss.

- Wie viele Liter Wasser fließen in den See im Intervall $[t, t + \Delta t]$?
- Die Stromstärke im Zufluss wird in Liter pro Sekunde gemessen. Wie kann die Stromstärke in Abhängigkeit von $q(t)$ berechnet werden?
- Es ist viel einfacher, die Stromstärke $i(t)$ zu messen statt $q(t)$. Kann $q(t)$ aus $i(t)$ berechnet werden?
- Stellen Sie eine möglichst einfache Formel zur Berechnung von $q(t)$ in Abhängigkeit von $i(t)$ auf wenn zusätzlich bekannt ist, dass $q(0) = 100$ Liter.
- Berechnen Sie $q(t)$ wenn $q(0) = 100$ Liter und $i(t) = 1 + \sin(t)$ Liter pro Sekunde.

Aufgabe 11. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{1-\sin^2(x)} \sin(x) \cos(x)$$

- Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.
- Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, für die gilt $F(0) = 0$.

Aufgabe 12. Überlegen Sie sich, wie die Funktion

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

für sehr große Werte von ω aussieht. Überlegen Sie sich dann anschaulich, wie groß das bestimmte Integral von $f(t)$ zwischen $t = a \dots b$ und sehr großes ω ist. Berechnen Sie dann

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(\omega t) dt.$$

Aufgabe 13. Bei der Partialbruchzerlegung mit einer nicht reellen Nullstelle z des Nennerpolynoms kommt man auf Terme

$$c_1(x - z) + c_2(x - \bar{z}).$$

Da die rationale Funktion reell ist, muss dieser Term reell sein für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass man hieraus schließen kann

$$c_2 = \bar{c}_1.$$

Hinweis: Stellen Sie $c_i = a_i + jb_i$ und $z = u + jv$ in kartesischen Koordinaten dar. Es ergibt sich ein Polynom $p(x)$ mit komplexen Koeffizienten vom Grad 1 in x , das für alle $x \in \mathbb{R}$ reell sein muss. Folglich muss $\text{im}(p(x)) = 0$ sein für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten des Polynoms $\text{im}(p(x))$ müssen daher beide Null sein.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^2 - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + x - 2)}.$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{x^4 + x^3 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \cos^3(x).$$

Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Weisen:

- Durch Umformung

$$\cos^3(x) = (1 - \sin^2(x)) \cos(x)$$

und Substitution.

- Mit der komplexen Darstellung

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}).$$

Sie erhalten hierbei unterschiedliche Terme für die gleiche Stammfunktion von $f(x)$.

Aufgabe 19. Zur Berechnung der Wurzel einer komplexen Zahl muss man Polarkoordinaten verwenden. Hierbei muss man darauf achten, dass der Winkel auf $] - \pi, \pi]$ normiert ist.

- Berechnen Sie

$$(e^{j2\pi})^{1/2}.$$

- Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sqrt{(-1 + j)^2}.$$

- Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sqrt{z^2} = z?$$

- Berechnen Sie

$$(j^3)^{1/3}.$$

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(z^n)^{1/n} = z?$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.