

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 14

Zu bearbeiten bis 25.6.2026

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ haben.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int \cos^4(x) \tan(x) dx.$$

Aufgabe 3. Überlegen Sie sich, wie die Funktion

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

für sehr große Werte von ω aussieht. Überlegen Sie sich dann anschaulich, wie groß das bestimmte Integral von $f(t)$ zwischen $t = a \dots b$ und sehr großes ω ist. Berechnen Sie dann

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \cos(\omega t) dt.$$

Aufgabe 4. Ein Polynom vom Grad n ist immer identisch mit seinem Taylor Polynom vom Grad n zu jedem beliebigen Entwicklungspunkt.

Verifizieren Sie dies am Spezialfall $n = 2$. Sei also $f(x)$ ein Polynom vom Grad 2 und \hat{x} beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei f ein Polynom vom Grad 3.

- Begründen Sie, weshalb f genau einen Wendepunkt hat, d.h. eine Stelle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}f''(\hat{x}) &= 0 \\f'''(\hat{x}) &\neq 0.\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass f punktsymmetrisch zu dieser Wendestelle ist.

Hinweis: Verschieben Sie das Polynom so, dass der Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt und zeigen Sie, dass die so verschobene Funktion ungerade ist. Dies geht wiederum sehr einfach wenn Sie f durch sein Taylor Polynom vom Grad 3 zum Entwicklungspunkt \hat{x} darstellen, d.h.

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \frac{1}{6}f'''(\hat{x})(x - \hat{x})^3.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{1}{1+j}\right)^{10}.$$

Aufgabe 7. Sei $z \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$z(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}.$$

Zeichnen Sie die Zahl $z(\omega)$ in die komplexe Ebene ein für einige Werte von ω , z.B. $\omega = 0$, $\omega = \pm 1$ und $\omega \rightarrow \infty$.

Zeigen Sie dann, dass alle Zahlen $z(\omega)$ auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $1/2$ liegen. Hinweis: Sie müssen zeigen, dass

$$|z(\omega) - 1/2|$$

konstant ist, d.h. unabhängig von ω . Berechnen Sie den Radius dieses Kreises.

Zeichnen Sie dann alle Zahlen von $z(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ in die Ebene ein. Eine solche Darstellung der Funktion $z(\omega)$ heißt Ortskurve und spielt u.a. in der Regelungstechnik eine wichtige Rolle.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$e^{z+1} = j.$$

Hinweis: Stellen Sie z in Kartesischen Koordinaten dar.

Aufgabe 9. In einen See fließen

$$f_{\text{zu}}(t) = \cos(t) + 1$$

Liter pro Sekunde zu und

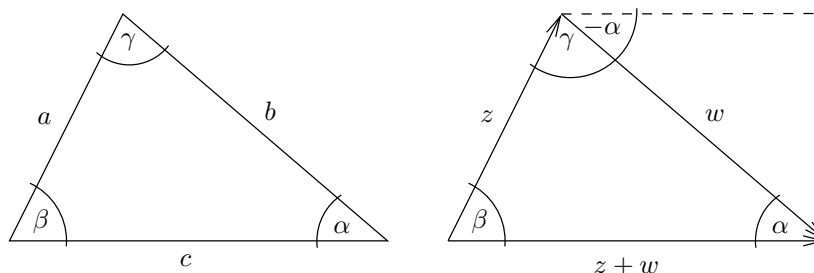
$$f_{\text{ab}}(t) = f_{\text{zu}}(t - 1)$$

Liter pro Sekunde ab. Berechnen Sie die Amplitude, mit der die Wassermenge im See schwingt.

Aufgabe 10. In einem beliebigen Dreieck mit Winkeln α, β, γ und gegenüberliegenden Seiten a, b, c gilt der Sinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}.$$

Dieser Satz soll mit komplexen Zahlen bewiesen werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Dreieck so gedreht werden, dass die Seite c parallel zur reellen Achse in der komplexen Ebene liegt, siehe nachfolgendes Bild.



Die Seiten a und b können durch Pfeile dargestellt werden, die den komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z &= ae^{j\beta} \\ w &= be^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

entsprechen. Da die Unterseite des Dreiecks parallel zur reellen Achse liegt, gilt

$$\operatorname{im}(z + w) = 0.$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$\begin{aligned} a \sin(\beta) &= \operatorname{im}(z) \\ b \sin(\alpha) &= -\operatorname{im}(w). \end{aligned}$$

Leiten Sie hiermit den Sinussatz her.

Aufgabe 11. Der komplexe Logarithmus $\ln(z)$ kann ähnlich wie die komplexe Wurzel einfach in Polarkoordinaten berechnet werden. Auch hier muss der Winkel von z auf das Intervall $]-\pi, \pi]$ normiert werden damit der Funktionswert eindeutig ist. Sämtliche Rechengesetze des reellen Logarithmus übertragen sich auf den komplexen Logarithmus. Es gilt somit

$$\ln(re^{j\varphi}) = \ln(r) + \ln(e^{j\varphi}) = \ln(r) + j\varphi.$$

Berechnen Sie hiermit

$$\ln(1 + j), \ln(-1) \text{ und } \ln(-3j).$$

Berechnen Sie eine Menge B so dass

$$f \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B, \quad f(z) = \ln(z)$$

surjektiv ist. Ist diese Funktion injektiv?

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Aufgabe 15. Sei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine rationale Funktion, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind und der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Weiter habe $q(x)$ nur einfache Nullstellen z_1, \dots, z_n und führenden Koeffizient 1, d.h.

$$q(x) = \prod_{i=1}^n (x - z_i).$$

Damit ist der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x - z_1} + \frac{c_2}{x - z_2} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n}.$$

Zeigen Sie, dass die Konstanten c_i berechnet werden können durch

$$c_i = \frac{p(z_i)}{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (z_i - z_\ell)}.$$

Damit ist auch bewiesen, dass die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung eindeutig sind.

Aufgabe 16. Sei

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine reelle rationale Funktion wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind, $q(x)$ nur einfache Nullstellen z_1, \dots, z_n hat und der

Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Damit hat $f(x)$ die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{c_1}{x - z_1} + \dots + \frac{c_n}{x - z_n}.$$

Weiterhin habe $q(x)$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar, d.h.

$$z_\ell = \overline{z_k}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch für die zugehörigen Koeffizienten gilt

$$c_\ell = \overline{c_k}.$$

Hinweis: Die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung sind eindeutig. Da $f(x)$ reell ist, gilt

$$\overline{f(x)} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Stellen Sie daher zunächst die PBZ von $f(x)$ auf und konjugieren Sie diese komplex. Die dabei auftretenden Summanden mit gleichen Nenner müssen aufgrund der Eindeutigkeit der PBZ gleich sein, d.h. gleiche Zähler haben.

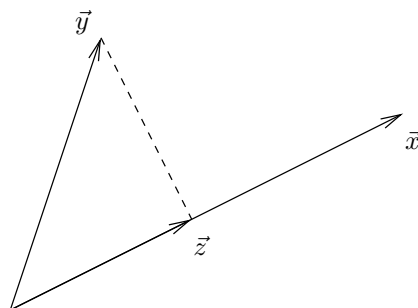
Aufgabe 17. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Sie dürfen dabei alle Gesetze der reellen Arithmetik verwenden — machen Sie aber deutlich an welcher Stelle Sie diese benutzen.

Aufgabe 18. Zeichnen Sie zwei Pfeile Ihrer Wahl in ein Koordinatensystem ein, die zueinander senkrecht stehen. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie das Skalarprodukt der beiden zugehörigen Vektoren berechnen.

Aufgabe 19. In folgendem Bild ist die Orthogonalprojektion eines Vektors \vec{y} auf einen Vektor \vec{x} dargestellt.



Zeigen Sie, dass man den Ergebnisvektor \vec{z} durch die Formel

$$\vec{z} = (\vec{y} \circ \vec{e}_x) \vec{e}_x$$

berechnen kann, wobei \vec{e}_x der normierte Richtungsvektor von \vec{x} ist. Hinweis: Schauen Sie sich dazu die Konstruktion an, mit der im Skript die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

hergeleitet wird. Das meiste davon können Sie übernehmen.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.