Heilbronn, den 25.6.2026 | Prof. Dr. V. Stahl | SS 26

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 15

Zu bearbeiten bis -

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned} f &\in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \left(\ln(x), \frac{1}{x}\right) \\ g &\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+, \quad g(x,y) = 1 + |x+y| \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 2. Gibt es eine Relation R so dass

$$\big(\{1,2,3\}, \{3\}, R\big)$$

eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.

Aufgabe 3. Die Funktion $f \in {\mathbb{R}^+}^2 \to {\mathbb{R}^+}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1/x_2)$$

ist bijektiv. Berechnen Sie $f^{-1}(8,2)$ und finden Sie dann einen Funktionsterm für f^{-1}.

Aufgabe 4. Die Funktion

$$f \in \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\big) \;\to\; \big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})\big), \qquad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 1/x_2)$$

ist bijektiv. Berechnen Sie einen Funktionsterm für f^{-1}.

Aufgabe 5. Ist die Funktion

$$f = \big(\{0,1\}, \{0,2\}, \{(0,2), (1,0)\}\big)$$

invertierbar? Falls ja berechnen Sie die Umkehrfunktion.

Aufgabe 6. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f'(\hat{x}) \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x}.$$

<u>Hinweis</u>: Die Ableitung ist definiert durch

$$f'(\hat{x}) \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x},$$

Laut Definition des Grenzwerts einer Funktion bedeutet dies, dass für jede Folge x_n mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ und } x_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x} + x_n) - f(\hat{x})}{x_n} \quad = \quad f'(\hat{x}).$$

Sie müssen nun zeigen, dass für jede beliebige Folge y_n mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ und } y_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - y_n)}{y_n} \quad = \quad f'(\hat{x}).$$

Wählen Sie $x_n = -y_n$.

Aufgabe 7. Sei

$$f(x) \quad = \quad \operatorname{sign}(x)x^2$$

wobei

$$\operatorname{sign}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ differenzierbar ist obwohl $\operatorname{sign}(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ einen Sprung hat. Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 8. Sei

$$f(x, y) \quad = \quad \frac{x + y}{3x \sin(y) + 1}.$$

Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) \quad = \quad x\sin(x+y)e^{xy}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad -\int_b^a f(x)dx.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$\int \frac{\ln(x^3)^2}{x}dx.$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int f(x)f'(x)dx.$$

Lösen Sie die Aufgabe einmal mit Substitution und einmal mit partieller Integration.

Aufgabe 13. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du \quad = \quad f(x)$$

für alle x, für die das Integral existiert.

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\int_{-2}^{2} \sin(|x+1|-2)dx.$$

Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung durch, ob $x+1$ positiv oder negativ ist um die Betragsfunktion zu eliminieren. Zerlegen Sie dann das Integral in zwei entsprechende Teilintegrale.

Aufgabe 15. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\int_1^5 x^3 dx$$
$$\int_{-2}^{4} \sin(3x)dx$$
$$\int_{-3}^{-1} e^{-2x}dx$$

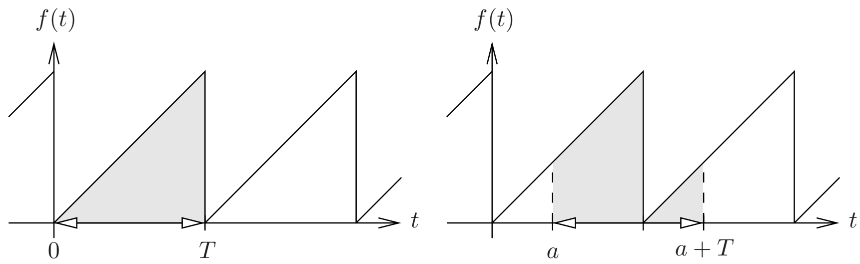
Aufgabe 16. Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) \quad = \quad f(t)$$

für alle t. Zeigen Sie, dass für beliebiges a gilt

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \quad = \quad \int_0^T f(t)dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter $f(t)$ in einer Periode unabhängig davon ist, wo die Periode beginnt. In folgendem Bild wird dies am Beispiel einer Sägezahnfunktion dargestellt.



Hinweis:

- Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale:

$$\int_a^{a+T} \dots \quad = \quad \int_a^0 \dots + \int_0^{a+T} \dots .$$

- Führen Sie im ersten Integral eine Substitution $u = t + T$ durch. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen zu

$$\int_{a+T}^{T} \dots .$$

- Im Integrand dieses Integrals nutzen Sie nun die Periodizität von f, indem Sie $f(u - T)$ durch $f(u)$ ersetzen. Die Integrationsvariable u ersetzen Sie danach wieder durch t.
- Da die Integranden der beiden Integrale nun wieder gleich sind, können Sie die Integrale zu einem Integral zusammensetzen. Sie müssen hierzu lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^{T} \dots + \int_0^{a+T} \quad &= \quad \int_0^{a+T} \dots + \int_{a+T}^{T} \dots \\ &= \quad \int_0^T \dots . \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$F(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

eine Stammfunktion von $f(x)$. Der Beweis geht wie folgt: Sei $\hat{F}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\ &= \left[\hat{F}(u)\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \hat{F}(x) - \hat{F}(-\infty). \end{aligned}$$

Da $\hat{F}(-\infty)$ eine Konstante ist, gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \hat{F}'(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Somit ist $F'(x) = f(x)$ und daher $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Sei nun

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Fläche unter $f(x)$ Null ist, ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Damit ist aber

$$F'(x) \neq f(x) \quad \text{für } x = 0$$

und somit ist $F(x)$ keine Stammfunktion von $f(x)$ im Widerspruch zu obiger Aussage. Woran liegt's?

Aufgabe 18. Berechnen Sie

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx.$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von

$$z = \frac{(2+j)^2}{2-3j}.$$

Aufgabe 20. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{1+j}{1-\frac{1}{j-1}}.$$

Aufgabe 21. Zeigen Sie dass für alle komplexen Zahlen z, z_1, z_2 und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{z_1}\,\overline{z_2} &= \overline{z_1 z_2} \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} &= \overline{z_1 + z_2} \\ \overline{z}^n &= \overline{z^n}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie hiermit, dass für jedes Polynom mit reellen Koeffizienten

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

gilt

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

Begründen Sie damit wiederum, dass die Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

Aufgabe 22. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von

$$\frac{(j-1)e^{j\pi/3}}{2j}.$$

Aufgabe 23. Finden Sie eine Menge B so dass die Funktion

$$f \in \mathbb{C} \to B, \quad f(z) = \sqrt{z}$$

bijektiv ist.

Aufgabe 24. Die reelle e-Funktion ist streng monoton steigend und damit injektiv. Ist auch die komplexe e-Funktion

$$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = e^z$$

injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 25. Der Zusammenhang zwischen Spannung $u(t)$ und Stromstärke $i(t)$ an einem Widerstand R ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}.$$

Schwieriger ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke an einem Kondensator und an einer Spule. Im Spezialfall einer Wechselspannung

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

mit Amplitude u_0, Kreisfrequenz ω und Phasenwinkel φ kann man das Problem jedoch sehr einfach mit komplexen Zahlen lösen:

- Zunächst wird $u(t)$ komplex in Polarkoordinaten dargestellt.

$$u(t) = \mathrm{re}(u_0 e^{j(\omega t + \varphi)}).$$

- Nun wechselt man ins Komplexe und schleppt den Imaginärteil mit. Damit ist $u(t)$ eine komplexe Spannung

$$u(t) \;=\; u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}.$$

- Im Komplexen gilt für Spulen und Kondensatoren das einfache, Ohmsche Gesetz. Der komplexe Widerstand eines Kondensators mit Kapazität C bzw. einer Spule mit Induktivität L ist

$$R_C \;=\; \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{bzw.} \qquad R_L \;=\; j\omega L.$$

  Die Widerstände hängen von der Kreisfrequenz ω ab. Bei hoher Frequenz ist der Betrag des komplexen Widerstand eines Kondensators klein, der einer Spule groß.

- Man erhält nach dem Ohmschen Gesetz somit komplexe Ströme

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{u(t)}{R_C} = u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\, j\omega C \quad \text{bzw.} \\ i(t) &= \frac{u(t)}{R_L} = \frac{u_0 e^{j(\omega t+\varphi)}}{j\omega L}. \end{aligned}$$

- Zum Schluss kehrt man in's Reelle zurück und nimmt von den berechneten, komplexen Strömen den Realteil.

$$\begin{tikzcd} u(t) = u_0 \cos(\omega t+\varphi) \arrow[d, "\text{Komplex}"'] & & i(t) \\ u(t) = u_0 e^{j(\omega t+\varphi)} \arrow[rr, "\text{Ohmsches Gesetz}", "R_C = \frac{1}{j\omega C},\quad R_L = j\omega L"'] & & i(t) = \frac{u(t)}{R_C} \text{ bzw. } i(t) = \frac{u(t)}{R_L} \arrow[u, "\text{Realteil}"] \end{tikzcd}$$

- Berechnen Sie auf diese Weise $i(t)$ für einen Kondensator C bzw. eine Spule L, an denen die Spannung

$$u(t) \;=\; u_0 \cos(\omega t+\varphi)$$

  anliegt und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Am Einfachsten geht es, wenn Sie R_C und R_L in Polarkoordinaten darstellen, in Polarkoordinaten multiplizieren bzw. dividieren und das Ergebnis in kartesische Koordinaten umrechnen um den Realteil zu erhalten.

- Wie bei Ohmschen Widerstände werden auch komplexe Widerstände addiert, wenn sie hintereinandergeschaltet werden. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, wenn ein Kondensator mit $C = 2$ Farad, eine Spule mit $L = 3$ Henry und ein Ohmscher Widerstand mit $R = 5$ Ohm hintereinandergeschaltet werden bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 2$ rad/s.

Aufgabe 26. In der Regelungstechnik (4. Semester) spielen sog. Standard Übertragungsglieder eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist das PT1-Glied, das durch eine Übertragungsfunktion

$$G(\omega) \quad = \quad \frac{1}{1 + Tj\omega}$$

gegeben ist mit $\omega, T \in \mathbb{R}^+$. Anschaulich handelt es sich um ein System, das eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω um den Faktor $|G(\omega)|$ verstärkt (Amplitudengang) und zu einer Phasenverschiebung $\sphericalangle G(\omega)$, Phasengang führt.

Berechnen Sie Amplituden- und Phasengang des PT1-Gliedes in Abhängigkeit von T und ω.

Aufgabe 27. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lambda t} \quad = \quad 0$$

genau dann wenn

$$\mathrm{re}(\lambda) \quad < \quad 0.$$

Aufgabe 28. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 \quad = \quad (1 + j)^2.$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{-3} + 1 = j.$$

Aufgabe 30. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die jeder reellen Zahl x eine komplexe Zahl $f(x)$ zuordnet. Man kann den Funktionswert von f an der Stelle x in Realteil und Imaginärteil aufspalten, d.h.

$$f(x) = f_{\mathrm{re}}(x) + j f_{\mathrm{im}}(x)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{re}}(x) &= \mathrm{re}(f(x)) \\ f_{\mathrm{im}}(x) &= \mathrm{im}(f(x)) \end{aligned}$$

und $f_{\mathrm{re}}, f_{\mathrm{im}} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

- Sei nun konkret

  $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = (2 + j)e^{jx}.$$

  Berechnen Sie je einen Funktionsterm für die Funktionen

  $$f_{\mathrm{re}}(x), \quad f_{\mathrm{im}}(x), \quad f'_{\mathrm{re}}(x), \quad f'_{\mathrm{im}}(x), \quad f'(x)$$

  sowie den Realteil und den Imaginärteil von $f'(x)$.

- Begründen Sie kurz, weshalb für jede differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt

$$f'(x) = f'_{\mathrm{re}}(x) + j f'_{\mathrm{im}}(x).$$

Sie müssen hierbei lediglich die Ableitungsregeln anwenden.

- Begründen Sie damit, weshalb allgemein gilt

$$\mathrm{re}(f'(x)) = f'_{\mathrm{re}}(x).$$

Es ist somit bei einer Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egal, ob man zuerst den Realteil nimmt und dann ableitet oder umgekehrt.

- Begründen Sie, weshalb allgemein gilt

$$\overline{f(x)}' = \overline{f'(x)}.$$

Es ist somit egal, ob man zuerst ableitet und dann komplex konjugiert oder umgekehrt.

- Kann man auch allgemein sagen, dass

$$|f(x)|' = |f'(x)|?$$

Aufgabe 31. Sei

$$z = \frac{1}{1 + e^{j\varphi}}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(z)$. Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von φ.

Aufgabe 32. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \sin(x)e^x.$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e-Funktionen dar. Im Ergebnis dürfen aber keine komplexen Zahlen mehr auftreten.

Aufgabe 33. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{\sqrt{e^{(1+j)\pi}}}{1+j}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 34. Leiten Sie die Gleichung

$$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

unter Verwendung von komplexen Zahlen her.

Aufgabe 35. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von $1/j$.

Aufgabe 36. Zeigen Sie unter Verwendung von komplexen Zahlen, dass

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Aufgabe 37. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{re}(je^{j(x+\pi/2)}) = -\mathrm{re}(e^{jx})$$

Aufgabe 38. Wie Sie wissen, gilt

$$\sin(x)' = \cos(x).$$

Beweisen Sie diese Gleichung mit Hilfe von komplexen Zahlen. Hinweis:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \mathrm{im}(e^{jx}) \\ &= \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \end{aligned}$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie die Polarkoordinaten r, φ von

$$\left(\frac{j+1}{e^j}\right)^4.$$

Aufgabe 40. Zerlegen Sie die rationale Funktion

$$\frac{2x^4 + x^3 - x}{x^2 - 1}$$

in eine Summe aus einem ganzrationalen Teil und einem gebrochen rationalen Teil, bei dem Zählergrad kleiner als Nennergrad ist.

Aufgabe 41. Sei

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6.$$

Eine Nullstelle von $f(x)$ ist $z_1 = 1 + j$. Berechnen Sie die anderen Nullstellen und stellen Sie das Polynom in faktorisierter Form dar.

Aufgabe 42. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + x - 2)}.$$

Aufgabe 43. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 1}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass kein j mehr darin vorkommt. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Ableitung berechnen. Hinweise:

- Partialbruchzerlegung.
- Für die Stammfunktion brauchen Sie den komplexen Logarithmus von $x + j$. Rechnen Sie dazu $x + j$ in Polarkoordinaten um. Es gilt

  $$\ln\left(re^{j\varphi}\right) = \ln(r) + j\varphi.$$

  wobei $-\pi < \varphi \leq \pi$.

- Da der Winkel von $x + j$ für alle x zwischen 0 und π liegt, kann er mit arccos ohne Fallunterscheidung berechnet werden, d.h.

$$\varphi \quad = \quad \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen können Sie folgende Formel verwenden:

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \quad = \quad \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \text{ für alle } x.$$

Die Ableitung der arctan Funktion ist

$$\arctan'(x) \quad = \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 44. Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{x^4+x^3-3}{x^2+2x+1}.$$

Aufgabe 45. Wie Sie wissen, ist eine Relation eine Menge von Paaren. Eine Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und somit eine Menge von zweistelligen Vektoren, die man als Punkte in einem Koordinatensystem darstellen kann. Zeichnen Sie die Elemente der folgenden Relationen als Punkte in einem Koordinatensystem ein:

$$=_{\mathbb{R}},\ \leq_{\mathbb{R}},\ >_{\mathbb{R}},\ \{(x,y)\,|\,y=x^2\},\ \{(x,y)\,|\,x=y^2\}.$$

Aufgabe 46. Berechnen Sie die skalare Multiplikation

$$-3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie diese Operation grafisch durch Pfeile in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

Aufgabe 47. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die beiden Vektoren kollinear bzw. orthogonal?

Aufgabe 48. Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Ursprungskugel wenn es ein $r > 0$ gibt so dass

$$K \quad = \quad \{\vec{x}\,|\,\|\vec{x}\| = r\}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ursprungskugel und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ursprungsgerade. Zeigen Sie, dass

$$|K \cap G| \quad = \quad 2.$$

Grafisch ausgedrückt bedeutet dies, dass eine Urspungskugel und eine Ursprungsgerade genau zwei Schnittpunkte haben. Berechnen Sie diese Schnittpunkte.

Aufgabe 49. Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

kann man als Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen.

- Wie liegen die Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

  geometrisch zueinander? Zeichnen Sie ggf. zunächst ein paar Beispielpunkte ein.
- Eine zweistellige Relation auf $R \subseteq \mathbb{R}^2$ kann als Punktmenge in einem Koordinatensystem dargetellt werden. Wie liegen die Punktmengen R und R^{-1} geometrisch zueinander?
- Wie kann man folglich das Schaubild der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Schaubild von f grafisch konstruieren?
- Eine Relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt symmetrisch wenn

$$R^{-1} = R.$$

  Welcher geometrischen Eigenschaft entspricht dies, wenn man R als Punktmenge darstellt?
- Eine Relation R heißt reflexiv auf $\mathbb{R}$ wenn

$$xRx \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

  So ist z.B. $\leq_{\mathbb{R}}$ reflexiv auf $\mathbb{R}$, da $x \leq_{\mathbb{R}} x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welcher geometrischen Eigenschaft entspricht dies, wenn man R als Punktmenge zeichnet?

Aufgabe 50. Zeigen, dass für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y}$ gleich Null ist. Sie dürfen dabei *nicht* verwenden, dass $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht. Das stimmt ja auch nur wenn keiner der beteiligten Vektoren gleich dem Nullvektor ist. Beginnen Sie stattdessen mit $\vec{x} \circ (\vec{x} \times \vec{y})$, setzen Sie die Definition des Kreuzprodukts und des Skalarprodukts ein und formen Sie so lange um, bis Null herauskommt.

Aufgabe 51. Wenn man für beliebige Konstanten u, v den Graph einer Funktion

$$f(x, y) = ux + vy$$

dreidimensional zeichnet, entsteht das Bild einer Ursprungsebene. Zeigen Sie, dass die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

tatsächlich eine Ursprungsebene laut Definition ist. Sie müssen dazu E auf die Form

$$\{a\vec{r} + b\vec{s} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

bringen.

Aufgabe 52. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53. Berechnen Sie $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass $\vec{z}$ tatsächlich senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht und dass gilt

$$||\vec{z}|| = ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}|| \sin(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Aufgabe 54. Zeigen Sie, dass

$$\vec{x} \times \vec{y} \quad = \quad -(\vec{y} \times \vec{x}).$$

Das Kreuzprodukt ist somit *nicht* kommutativ.

Beginnen Sie mit $\vec{x} \times \vec{y}$, setzen Sie die Definition des Kreuzprodukts ein und formen Sie so lange um, bis $-(\vec{y} \times \vec{x})$ herauskommt.

Aufgabe 55. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden

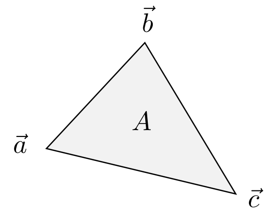
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

und der Ebenen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 56. Berechnen Sie die Fläche A des Dreiecks mit Eckpunkten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 57. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie diese Operation grafisch durch Pfeile in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar.

Aufgabe 58. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, deren Komponenten Funktionen von t sind, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung eines Vektors ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt die Produktregel der Ableitung gilt, d.h.

$$(\vec{x} \circ \vec{y})' = \vec{x}' \circ \vec{y} + \vec{x} \circ \vec{y}'.$$

Aufgabe 59. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Vektoren in ein Koordinatensystem ein und prüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Geodreieck.

Aufgabe 60. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$||\vec{x} + \vec{y}|| = \sqrt{||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2},$$

indem Sie ausschließlich Rechengesetze des Skalarprodukts und der Euklidischen Norm verwenden. Hinweis:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}}.$$

Aufgabe 61. Ein komplexer Vektor ist ein Vektor, dessen Komponenten komplexe Zahlen sind. Alle Rechenoperationen, die Sie für reelle Vektoren kennen, gelten genau so auch für komplexe Vektoren — mit einer Ausnahme: dem Skalarprodukt. Eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts war ja die positive Definitheit, d.h.

$$\vec{x} \circ \vec{x} \geq 0 \text{ für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\vec{x} \circ \vec{x} = 0 \text{ genau dann wenn } \vec{x} = \vec{0}.$$

Diese Eigenschaft ist so nützlich, dass man sie gerne auf komplexe Vektoren übertragen würde. Problematisch dabei ist, dass für zwei komplexe Vektoren das Skalarprodukt in der Regel eine komplexe Zahl liefern würde, und der Vergleich ≥ 0 gar nicht definiert wäre. Die Lösung besteht darin, das komplexe Skalarprodukt für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ wie folgt zu definieren:

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n$$

wobei $\overline{x}_i$ die konjugiert komplexe Zahl von x_i ist. Zeigen Sie, dass das so definierte komplexe Skalarprodukt tatsächlich positiv definit ist. Zeigen Sie weiterhin, dass gilt

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \overline{\vec{y} \circ \vec{x}}.$$

Das komplexe Skalarprodukt ist also *nicht* kommutativ!

Aufgabe 62. Berechnen Sie die Menge aller Schnittpunkte der Geraden

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ G' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Wie liegen die beiden Geraden geometrisch zueinander?

Aufgabe 63. Sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 3 \right\}.$$

Beschreiben Sie, was für eine Figur entsteht, wenn man die Elemente von M als Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnet.

Aufgabe 64. Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS

$$\begin{aligned} x-2y &= 3\\ 3x-y+z &= 4\\ 2x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 65. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $A\vec{x}=\vec{b}$ für

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 6\\ -5\\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie den Gauß Algorithmus wie im Skript durch. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.
- Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Aufgabe 66. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ des LGS

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 3 & 9\\ 2 & 5 & 5 & 10\\ -3 & -3 & 6 & 3\\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}$$

mit dem Gauß Algorithmus. Der Rechenweg muss ersichtlich sein. Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.