

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 3

Zu bearbeiten bis 3.4.2025

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Anschaulich ist klar, dass wenn $F \rightarrow G$ wahr ist, es nicht sein kann, dass F wahr und G falsch ist.

Zeigen Sie durch Anwenden der Rechengesetze

$$\begin{aligned}F \rightarrow G &= \neg F \vee G \\ \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G \\ \neg\neg F &= F\end{aligned}$$

dass

$$F \rightarrow G = \neg(F \wedge \neg G).$$

Beweisen Sie hiermit, dass das Produkt aus einer rationalen Zahl $a \neq 0$ und einer irrationalen Zahl b , keine rationale Zahl sein kann. Es handelt sich hierbei um 3 Teilaussagen:

$$F: a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

$$G: b \notin \mathbb{Q}.$$

$$H: ab \notin \mathbb{Q}.$$

Zu zeigen ist somit die Aussage

$$(F \wedge G) \rightarrow H.$$

Diese Aussage ist wie oben gezeigt äquivalent zu

$$\neg(F \wedge G \wedge \neg H).$$

Den Beweis der Negation einer Aussagen kann man durch Widerspruch führen. Nehmen Sie dazu an, dass

$$F \wedge G \wedge \neg H$$

wahr ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch. Sie müssen hierzu nur die Definition einer rationalen Zahl verwenden. Machen Sie auch klar, an welcher Stelle Sie die Annahme $a \neq 0$ verwendet haben. Für $a = 0$ würde die Aussagen ja nicht stimmen!

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel für zwei Aussagen $F(x)$ und $G(x)$ so dass

$$\exists x (F(x) \wedge G(x))$$

falsch ist, aber

$$(\exists x F(x)) \wedge (\exists x G(x))$$

wahr.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Gleichung

$$F \rightarrow (G \rightarrow H) = (F \wedge G) \rightarrow H.$$

Verwenden Sie hierzu keine Wahrheitstabellen sondern bereits bekannte Gesetze der Aussagenlogik wie

$$F \rightarrow G = \neg F \vee G,$$

die Gesetze von de Morgan und das Assoziativgesetz von $\wedge$ und $\vee$.

Aufgabe 4. Sei F die Aussage

$$x \in \{2, 3, 5\}$$

und G die Aussage

$$x \in \{2, 3, 7\}.$$

- Finden Sie zu jeder der folgenden Aussagen einen Wert für x so dass die Aussage wahr ist und einen Wert für x so dass die Aussage falsch ist.

$$F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, G \rightarrow F, F \leftrightarrow G.$$

- Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $F \rightarrow G$ für $x = 2, 4, 5, 7$.

Aufgabe 5. Die Symbole $\forall x$ und $\exists x$ bedeuten “für alle x gilt” bzw. “es gibt ein x so dass”. Entscheiden Sie von den folgenden beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

$$\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N})$$

$$\exists x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \notin \mathbb{N})$$

Aufgabe 6. Eine Relation R heißt transitiv wenn gilt:

$$\forall a, b, c (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc.$$

So ist z.B. die Relation $\leq_{\mathbb{N}}$ transitiv. Die Aussage

$$(a \leq_{\mathbb{N}} b \wedge b \leq_{\mathbb{N}} c) \rightarrow a \leq_{\mathbb{N}} c$$

ist wahr für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine endliche Relation, die transitiv ist.
- Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine unendliche Relation, die nicht transitiv ist.

Aufgabe 7. Die Menge $(\mathbb{R}^2)^3$ ist die Menge aller Tripel mit Komponenten aus $\mathbb{R}^2$. Ein Tripel von Paaren ist z.B.

$$((2, 2), (-3, 0), (5, 6)).$$

Nennen Sie ein weiteres Element aus der Menge $(\mathbb{R}^2)^3$.

Aufgabe 8. Ist das Tripel

$$f = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\})$$

eine Funktion? Geben Sie eine kurze Begründung.

Aufgabe 9.

- Gibt es eine Relation R so dass

$$(\{1, 2\}, \{3\}, R)$$

eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.

- Nennen Sie alle Relationen R so dass

$$(\{1\}, \{2, 3\}, R)$$

eine Funktion ist.

Aufgabe 10. Sei f eine reelle Funktion.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(x) + c$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach oben verschoben.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(x + c)$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach links verschoben.

- Das Schaubild von

$$g(x) = af(x)$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um Faktor a vertikal gestreckt.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(ax)$$

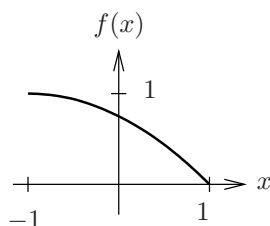
ist das Schaubild von $f(x)$ horizontal um Faktor a gestaucht.

Ist a negativ, bewirkt dies zusätzlich eine Spiegelung. Ein Streckfaktor kleiner eins bewirkt eine Stauchung und umgekehrt.

Sei

$$f \in [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$$

durch folgendes Bild gegeben:



Skizzieren Sie den Graph der Funktion $g(x)$ und geben Sie auch an, von wo nach wo diese abbildet für folgende Fälle:

- $g(x) = f(x + 2)$
- $g(x) = f(x - 2)$
- $g(x) = f(x) + 1$
- $g(x) = f(x) - 1$
- $g(x) = f(3x)$
- $g(x) = f(-x)$
- $g(x) = f(2(x + 1))$
- $g(x) = f(2x + 1)$

Aufgabe 11. Die Komposition von reellen Funktionen ist definiert durch

$$\circ \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2 \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Das Argument der Funktion $\circ$ ist ein Paar von Funktionen aus der Mengen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, der Funktionswert ist wiederum eine Funktion aus der Menge $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Addition von reellen Funktionen ist definiert durch

$$+ \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2 \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Definieren Sie entsprechend die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl.

Aufgabe 12. Wie viele Elemente hat die Menge $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$? Stellen Sie ein Element dieser Menge als Tripel (A, B, R) dar.

Aufgabe 13. Wie lässt sich formal ausdrücken, dass f eine Funktion ist, die jeder reellen Zahl außer 3 und 5 ein Tripel von natürlichen Zahlen zuordnet?

Aufgabe 14. Gegeben ist die Menge

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

und die Funktion

$$f = (A, A, \{(2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}).$$

Finden Sie eine Relation R so dass

$$f \circ f \circ f = (A, A, R).$$

Aufgabe 15. Seien $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei injektive Funktionen. Begründen Sie, weshalb dann auch $f \circ g$ eine injektive Funktion ist. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie über f, g wissen und was Sie über $f \circ g$ zeigen müssen.

Aufgabe 16. Die Funktion $f \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{Q}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = x/y.$$

Ist f injektiv bzw. surjektiv? Geben Sie jeweils einen Satz Begründung.

Aufgabe 17. Für jede Relation R ist die Umkehrrelation R^{-1} definiert durch

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid bRa\}.$$

Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Finden Sie eine Relation R so dass

- (A, A, R) und (A, A, R^{-1}) Funktionen sind
- (A, A, R) eine Funktion ist, aber (A, A, R^{-1}) keine Funktion ist.

Aufgabe 18. Sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow &\in \{w, f\}^2 \rightarrow \{w, f\}, \\ \neg &\in \{w, f\} \rightarrow \{w, f\} \end{aligned}$$

injektiv bzw. surjektiv?

Aufgabe 19. Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + e^x \\ g(x) &= x \sin(x + 1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f(g(x))$ und für $g(f(x))$.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.