Heilbronn, den 17.10.2025 | Prof. Dr. V. Stahl | WS 25/26

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 4

Zu bearbeiten bis 24.10.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass

$$A \cap (B \cup C) \quad = \quad (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beginnen Sie Ihren Beweis wie folgt und nutzen Sie die Gesetze der Aussagenlogik.

$$\begin{array}{rcl} A \cap (B \cup C) & = & \{x \,|\, x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} \\ & = & \{x \,|\, x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ & = & \\ & \vdots & \end{array}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$A \setminus (B \cap C) \quad = \quad (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Benutzen Sie die beschreibende Form von Mengen und die Gesetze der Aussagenlogik.

Aufgabe 3. Wie lässt sich formal ausdrücken, dass f eine Funktion ist, die jedem Paar bestehend aus einer natürlichen und einer rationalen Zahl eine positive reelle Zahl zuordnet?

Hinweis:

$$\mathbb{R}^+ \quad = \quad \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}.$$

Aufgabe 4.

- Gibt es eine Relation R so dass

$$\big(\{1,2\}, \{3\}, R\big)$$

eine Funktion ist? Falls ja nennen Sie eine solche Relation, falls nein geben Sie eine kurze Begründung.

- Nennen Sie alle Relationen R so dass

$$\big(\{1\}, \{2,3\}, R\big)$$

eine Funktion ist.

Aufgabe 5. Sei f eine reelle Funktion.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(x) + c$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach oben verschoben.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(x + c)$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um c nach links verschoben.

- Das Schaubild von

$$g(x) = af(x)$$

ist das Schaubild von $f(x)$ um Faktor a vertikal gestreckt.

- Das Schaubild von

$$g(x) = f(ax)$$

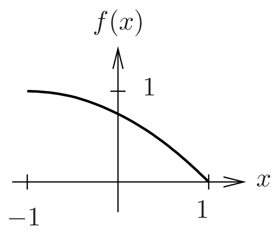
ist das Schaubild von $f(x)$ horizontal um Faktor a gestaucht.

Ist a negativ, bewirkt dies zusätzlich eine Spiegelung. Ein Streckfaktor kleiner eins bewirkt eine Stauchung und umgekehrt.

Sei

$$f \in [-1, 1] \to [0, 1]$$

durch folgendes Bild gegeben:



Skizzieren Sie den Graph der Funktion $g(x)$ und geben Sie auch an, von wo nach wo diese abbildet für folgende Fälle:

- $g(x) = f(x + 2)$
- $g(x) = f(x - 2)$
- $g(x) = f(x) + 1$
- $g(x) = f(x) - 1$

- $g(x) = f(3x)$
- $g(x) = f(-x)$
- $g(x) = f(2(x+1))$
- $g(x) = f(2x+1)$

Aufgabe 6. Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A wird mit 2^A bezeichnet. Der Grund für diese Notation ist, dass

$$|2^A| \quad = \quad 2^{|A|}$$

für jede endliche Menge A.

Stellen Sie diesen Zusammenhang in einem kommutativen Diagramm dar. Verifizieren Sie die Gleichung am Beispiel einer endlichen Menge und der leeren Menge.

Aufgabe 7. Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann auf Mengen von reellen Zahlen erweitert werden durch

$$F \in 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}, \quad F(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr für jede Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\quad \to \quad F(A) \subseteq F(B) \\ F(A) \subseteq F(B) &\quad \to \quad A \subseteq B \\ A \cap B = \emptyset &\quad \to \quad F(A) \cap F(B) = \emptyset \\ F(A) \cap F(B) = \emptyset &\quad \to \quad A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

Zeichnen Sie ein Mengendiagramm wenn Sie unsicher sind. Oft hilft es auch, die wenn-dann Aussagen $F \to G$ in $\neg G \to \neg F$ äquivalent umzuformen.

- Nennen Sie zu jeder Aussage, die nicht gilt, ein Gegenbeispiel für eine Funktion f und zwei Mengen A, B.
- Welche Eigenschaft muss f haben, damit alle o.g. Aussagen wahr sind?

Aufgabe 8. Gegeben sind zwei Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2, x-1) \\ g(x,y) &= 2x - y \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \circ f$ und $f \circ g$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie zwei Funktionen f, g sodass

$$f(g(x)) \quad = \quad \frac{e^x}{x+1}.$$

Aufgabe 10. Sei

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 \sin(xy).$$

Finden Sie zwei Funktionen g, h so dass

$$f \quad = \quad g \circ h.$$

Aufgabe 11. Sei $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(x) = 3x + 1.$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $g \circ g \circ g$.

Aufgabe 12. Sei

$$h \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) \quad = \quad x^2 \sin(x+y).$$

Finden Sie zwei Funktionen f, g so dass $f \circ g = h$ und weder f noch g eine Identitätsfunktion ist.

Hinweis: Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Aufgabe 13. Sei $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (xy, \sin(x+z)) \\ g(x,y) &= (x-y, x+y). \end{aligned}$$

Berechnen Sie hiermit einen Funktionsterm für $h \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$h(x,y) \quad = \quad f\big(g(1,3x), y^2\big).$$

Sie müssen den Term nicht vereinfachen.

Aufgabe 14. Für jede Relation R ist die Umkehrrelation R^{-1} definiert durch

$$R^{-1} = \{(a,b) \mid bRa\}.$$

Sei $A = \{1,2,3\}$. Finden Sie eine Relation R so dass

- (A, A, R) und (A, A, R^{-1}) Funktionen sind
- (A, A, R) eine Funktion ist, aber (A, A, R^{-1}) keine Funktion ist.

Aufgabe 15. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei injektive Funktionen. Begründen Sie, weshalb dann auch $f \circ g$ eine injektive Funktion ist. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie über f, g wissen und was Sie über $f \circ g$ zeigen müssen.

Aufgabe 16. Die Komposition von rellen Funktionen ist definiert durch

$$\circ \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \quad (f \circ g)(x) \quad = \quad f(g(x)).$$

Das Argument der Funktion $\circ$ ist ein Paar von Funktionen aus der Mengen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der Funktionswert ist wiederum eine Funktion aus der Menge $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Addition von reellen Funktionen ist definiert durch

$$+ \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Definieren Sie entsprechend die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl.

Aufgabe 17. Sei $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}^3$ und $g \in \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$f(x,y) = (x-1, 1-y, x+y), \quad g(x,y,z) = xy - z.$$

- Berechnen Sie einen Funktionsterm für $g \circ f$.
- Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels dass $g \circ f$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 18. Sei $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ und $g \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y, xy) \\ g(x,y) &= x - y^2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \circ f$. Geben Sie auch an von wo nach wo diese Funktion abbildet.

Aufgabe 19. Gegeben ist die Menge

$$A = \{2,3,4,5\}$$

und die Funktion

$$f = (A, A, \{(2,2), (3,4), (4,3), (5,2)\}).$$

Finden Sie eine Relation R so dass

$$f \circ f \circ f = (A, A, R).$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.