Heilbronn, den 10.4.2025 | Prof. Dr. V. Stahl | SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 5

Zu bearbeiten bis 17.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei $P(x)$ eine Aussage, in der x auftritt, z.B. "x ist rot" und A eine Menge, z.B. die Menge aller Autos. Die Aussage "jedes Auto ist rot" lässt sich unter Verwendung eines relativierten Quantors ausdrücken durch

$$\forall x \in A \; P(x).$$

Diese Aussage ist äquivalent zu "für jedes Objekt x gilt, wenn x ein Auto ist, dann ist x rot", bzw.

$$\forall x \; (x \in A \to P(x)).$$

Ähnlich lassen sich auch relativierte Existenzquantoren durch normale Quantoren ersetzen:

$$\exists x \in A \; P(x) \quad = \quad \exists x \; (x \in A \land P(x)).$$

Verwenden Sie das Gesetz für normale Quantoren

$$\neg \forall x \; P(x) \quad = \quad \exists x \; \neg P(x),$$

das für beliebige Aussagen $P(x)$ gilt, um das entsprechende Gesetz für relativierte Quantoren

$$\neg \forall x \in A \; P(x) \quad = \quad \exists x \in A \; \neg P(x)$$

herzuleiten. Hinweis: Sie benötigen hierfür u.a. das Gesetz von de Morgan.

Aufgabe 2. Nennen Sie je ein Element der Menge

$$(\mathbb{R}^2)^3 \text{ und } (\mathbb{R}^3)^2.$$

Sind die Mengen gleich? Elemente dieser Mengen werden später als Matrizen bezeichnet. Geschachtelte kartesische Produkte sind also durchaus wichtig.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ und $g \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y, xy) \\ g(x,y) &= x - y^2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \circ f$. Geben Sie auch an von wo nach wo diese Funktion abbildet.

Aufgabe 4. Definieren Sie den Begriff injektiv.

Aufgabe 5. Seien $g \in A \to B$ und $f \in B \to C$ zwei bijektive Funktionen. Zeigen Sie, dass dann $f \circ g \in A \to C$ ebenfalls eine bijektive Funktion ist und berechnen Sie einen Funktionsterm für $(f \circ g)^{-1}$.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Menge B so dass die Funktion

$$f \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to B, \qquad f(x) = e^{\tan(x)+1}$$

bijektiv ist. Berechnen Sie dann die Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$e^x - 2e^{-x} = 0.$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung indem Sie Äquivalenzumformungen vornehmen. Wenn Sie beim Umformen eine Funktion auf beiden Seiten anwenden, dann geben Sie die Funktion explizit an und prüfen, ob die Funktion injektiv ist. Sie dürfen alle Gesetze der Logarithmierung und der Potenzrechnung benutzen, schreiben Sie aber dazu welches Gesetz Sie anwenden.

$$3e^{x^2+1} = 5^x$$

Aufgabe 9. Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n^2+n}$$

ist eine Nullfolge. Berechnen Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein N so dass

$$|x_n| < \varepsilon$$

für alle $n > N$.

Aufgabe 10. Die Folge

$$x_n = \frac{2n+1}{n+3}$$

konvergiert gegen 2. Berechnen Sie allgemein für jedes ε ein N, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n - 2| < \varepsilon$.

Aufgabe 11. Seien $x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folgen und $a \in \mathbb{R}$. Sei weiterhin N und ε so dass

$$\text{für alle } n > N \text{ gilt } |x_n| < \varepsilon.$$

Berechnen Sie hier mit ein N' und ε' so dass

$$\text{für alle } n > N' \text{ gilt } |ax_n| < \varepsilon'.$$

Sei haben damit bewiesen, dass das skalare Vielfache einer Nullfolge wieder eine Nullfolge ist.

Aufgabe 12. Seien $x, y \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Folgen. Sei weiterhin N_x, N_y und $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ so dass

$$\begin{aligned} &\text{für alle } n > N_x \text{ gilt } |x_n| < \varepsilon_x \\ &\text{für alle } n > N_y \text{ gilt } |y_n| < \varepsilon_y \ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie hiermit ein N_z und ε_z so dass für die Folge $z_n = x_n + y_n$ gilt

$$\text{für alle } n > N_z \text{ gilt } |z_n| < \varepsilon_z \ .$$

Sie haben damit gezeigt, dass die Summe zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist.

Aufgabe 13. Sei

$$x_n \quad = \quad \frac{\sin^2(n) + \cos(e^n)}{2n + \cos(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so dass für alle $n > N$ gilt

$$|x_n| \quad < \quad \varepsilon.$$

Aufgabe 14. Prüfen Sie, ob folgende Folgen konvergieren und falls ja berechnen Sie die (uneigentlichen) Grenzwerte.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n(n-1)(n+2)}{(n-1)(n+3)(n+5)} \\ x_n &= \frac{5n^2 + 7n - 3}{n^5 - n^2} \\ x_n &= 1 + \frac{\exp(n)}{n^{10}} \end{aligned}$$

Aufgabe 15. $f \in D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\hat{x}$ wenn

1. f an der Stelle $\hat{x}$ definiert ist, d.h. $\hat{x} \in D$.
2. f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$ hat.
3. Der Grenzwert von f an der Stelle $\hat{x}$ gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$ ist.

Finden Sie jeweils ein Beispiel einer Funktion und eines Punktes $\hat{x}$, wo

- die erste Bedingung erfüllt ist, aber nicht die zweite und dritte,
- die erste und die zweite Bedingung erfüllt ist, aber nicht die dritte,
- die erste Bedingung nicht erfüllt ist, aber die zweite.
- keine der drei Bedingungen erfüllt ist,
- alle 3 Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 16. Seien $f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entscheiden Sie von diesen Funktionen, ob sie einen Grenzwert bei $\hat{x}$ haben, bei $\hat{x}$ stetig bzw. differenzierbar sind für $\hat{x} = 0$.

Aufgabe 17. Welche der folgenden Funktionen f hat einen (uneigentlichen) Grenzwert bei $\hat{x} = 0$? Wenn man die Funktion zeichnet, sieht man dies oft sehr einfach.

Falls eine Funktion keinen (uneigentlichen) Grenzwert hat, versuchen Sie dies zu beweisen, indem Sie zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n finden, für die die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte haben.

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = x^x \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = x^{\lfloor x \rfloor} \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = \log(|x|) \\ f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = \max(-2, \log(|x|)) \\ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 18. Hat die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

einen (uneigentlichen) Grenzwert bei $\hat{x} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19. Sei $\hat{x} \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Finden Sie jeweils eine Folge x_n mit Grenzwert $\hat{x}$ so dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) & \quad \text{nicht existiert.} \end{aligned}$$

Es geht also darum, sich der Zahl $\hat{x}$ einmal mit rationalen und einmal mit irrationalen Zahlen anzunähern. Sie haben damit bewiesen, dass f nirgends einen Grenzwert hat.

Hinweis: Um eine Zahl auf n Nachkommastellen zu runden, können Sie die Funktion

$$g(x, n) = \frac{\lfloor 10^n x + 0.5 \rfloor}{10^n}$$

verwenden. Hierbei ist $\lfloor x \rfloor$ der abgerundete Wert von x. Es gilt z.B.

$$g(\pi, 4) = 3.1416$$

Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$\lim_{n\to\infty} g(\hat{x}, n) = \hat{x}.$$

Aufgabe 20. Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

- f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert hat und an jeder Stelle $x \in \mathbb{Z}$ unstetig ist.
- f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig ist und an jeder Stelle $x \in \mathbb{Z}$ keinen Grenzwert hat.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.