Heilbronn, den 17.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 6

Zu bearbeiten bis 24.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\leq_{\mathbb{Q}} \cap \geq_{\mathbb{Z}} .$$

Aufgabe 2. Sei

$$f \in \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \qquad f(x_1, x_2) = (x_2 + 1, x_1 + 1).$$

Finden Sie zwei Mengen A, B und eine Relation R so dass $f = (A, B, R)$. Ist f bijektiv? Falls ja berechnen Sie einen Term für die Umkehrfunktion.

Aufgabe 3. Sei

$$A \quad = \quad \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x < -1\}$$

die Menge aller reeller Zahlen kleiner -1 und

$$f \in A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \quad = \quad \ln(x^2 - 1).$$

Entscheiden Sie, ob f bijektiv ist. Falls ja, berechnen Sie die Umkehrfunktion von f, falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. Eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ ist eine bijektive Funktion

$$f \in \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

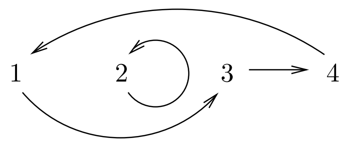
Im Folgenden sei $n = 4$. Weiter sei

$$f \in \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

mit

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 1$$

eine Permutation. Die Permutation kann wie folgt durch ein Pfeildiagramm dargestellt werden:



- Berechnen Sie die Umkehrpermutation f^{-1} von f.
- Berechnen Sie die Permutation $f \circ f$.
- Für die identische Permutation $\mathrm{id}(x) = x$ gilt $\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$. Finden Sie eine weitere Permutation g mit $g^{-1} = g$ für $n = 4$.
- Finden Sie eine Permutation g der Zahlen $1, 2, 3, 4$ so dass

$$g \circ g \circ g \quad = \quad \mathrm{id}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(2x^2) \quad = \quad 1 + 3\ln(x).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 6.

- Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

unstetig ist.

- Für welche Werte von a ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3\sin(x) + a}$$

überall stetig? Sind auch negative Werte für a möglich?

Aufgabe 7. Die Folge

$$x_n \quad = \quad 1/n^2$$

konvergiert gegen 0. Es muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existieren, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n| < \varepsilon$. Finden Sie solch ein N für $\varepsilon = 0.1$.

Aufgabe 8. Besitzen die folgenden Funktionen einen Grenzwert bei $\hat{x}$? Wenn Sie unsicher sind, dann zeichnen Sie die Funktionen zunächst in der Nähe von $\hat{x}$.

- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)/x$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)/x$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ für $\hat{x} = 1$.
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |1/x|$ für $\hat{x} = 0$.

- $f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \ln(x)$ für $\hat{x} = 0$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen (siehe Skript) und unter Verwendung von

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

die Grenzwerte an der Stelle $\hat{x} = 0$ von

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \\ f(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{4x}\right)^2 \\ f(x) &= (\sin(x))^2/x \end{aligned}$$

Machen Sie deutlich an welcher Stelle Sie welche Rechenregel verwendet haben.

Aufgabe 10. Finden Sie jeweils ein Beispiel für zwei Funktionen f, g so dass

- $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}$$

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin(1/x)$$

bei $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert hat. Finden Sie dafür zwei gegen Null konvergente Folgen x_n und x'_n so dass die Folgen $f(x_n)$ und $f(x'_n)$ unterschiedliche Grenzwerte für $n \to \infty$ haben. Versuchen Sie auch eine Folge x''_n zu finden, für die $f(x''_n)$ divergiert.

Aufgabe 12. Finden Sie zwei Folgen x_n, x'_n mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x'_n = \infty$$

so dass die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \cos(x_n) \text{ und } \lim_{n \to \infty} \cos(x'_n)$$

existieren, aber nicht gleich sind. Geben Sie diese Grenzwerte an.

Aufgabe 13. Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen (siehe Skript) und unter Verwendung von

$$\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0$$

die Grenzwerte an der Stelle $\hat{x} = 0$ von

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln|x|\cos(x)x \\ f(x) &= \ln(|x|+2)(x-1) \\ f(x) &= \frac{x\ln|x|+1}{x^2+3} \end{aligned}$$

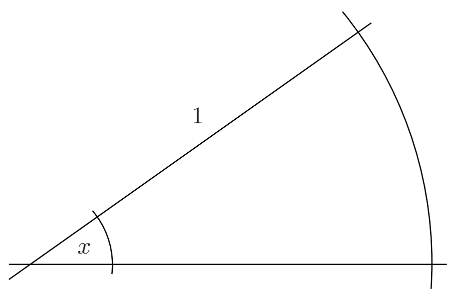
Machen Sie deutlich an welcher Stelle sie welche Rechenregel verwendet haben.

Aufgabe 14. In nachfolgendem Bild ist ein Kreisbogen mit Winkel x und Radius 1 dargestellt. Zeichnen Sie in dieses Bild die Größen x und $\sin(x)$ als Längen ein, so dass man erkennen kann, dass

$$\sin(x) \approx x$$

für kleine x. Schauen Sie sich hierzu ggf. nochmal an, wie ein Winkel im Bogenmaß definiert ist. Auf diese Weise kann man sehen, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Aufgabe 15. Definieren Sie wann eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert bei $\hat{x} \in \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 16. Sei $f(x) = |x|$. Berechnen Sie die Steigung $s(\Delta x)$ der Sekante an $f(x)$ zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ für beliebiges $\hat{x}$ und Δx. Berechnen Sie für $\hat{x} = 3$ und für $\hat{x} = -5$ den Grenzwert

$$f'(\hat{x}) = \lim_{\Delta x\to 0} s(\Delta x).$$

Aufgabe 17. Sei $f(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass $f'(x) = e^x$ unter Verwendung der Definition der e-Funktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

auf zwei Weisen.

- Indem Sie jeden Summanden separat ableiten (Summenregel).
- Indem Sie den Grenzwert

  $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

  berechnen. Nutzen Sie hierzu die Rechengesetze der e-Funktion und wenden Sie die o.g. Definition auf $e^{\Delta x}$ an.

Aufgabe 18. Die Funktionen sinh und cosh sind definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \end{aligned}$$

Sie haben viele Eigenschaften, die ähnlich sind wie bei sin und cos. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh(x) \\ \cosh(-x) &= \cosh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen. Die Ableitung von f ist überall dort definiert, wo f differenzierbar ist. Geben Sie diesen Bereich an und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\ln(x)) \\ f(x) &= |x| \\ f(x) &= \sin(|x|) \\ f(x) &= \cos(|x|) \\ f(x) &= (\cos(|x|))^2 \\ f(x) &= (\sin(|x|))^2 \end{aligned}$$

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, können Sie die sign-Funktion verwenden.

$$\mathrm{sign} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.