Heilbronn, den 24.4.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 7

Zu bearbeiten bis 8.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte sofern sie existieren.

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\ln(x))$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x \cos(x)$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{(2x+1)(x+2)}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2+\sin(x)}$$

Aufgabe 2. Eine Zahl x heißt ungerade wenn $x \in \mathbb{N}$ ist und ein $y \in \mathbb{N}_0$ existiert so dass

$$x = 2y + 1.$$

Beweisen Sie unter Verwendung dieser Definition, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder eine ungerade Zahl ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(\cos(x) + 1) = 0.$$

Aufgabe 4. Prüfen Sie, ob folgende Folgen konvergieren und falls ja berechnen Sie die (uneigentlichen) Grenzwerte.

$$x_n = \frac{3n^2 - n + 10}{n^4 + n^3}$$
$$x_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$x_n = \frac{\exp(n)}{n^{10}}$$
$$x_n = \left(\frac{n-1}{3n^2+1}\right)\left(\frac{4n^3+3}{n^2+4}\right)$$

Aufgabe 5. Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-1/|x|}.$$

- Hat f einen Grenzwert bei $\hat{x} = 0$?
- Falls ja berechnen Sie diesen Grenzwert, falls nein geben Sie eine Begründung warum f keinen Grenzwert bei $\hat{x}$ hat.
- Ist f stetig bei $\hat{x}$? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz.

Aufgabe 6. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x + \pi))}{e^{\sin(x)} - 1}.$$

Aufgabe 7. Eine Zahl $\hat{x}$ heißt k-fache Nullstelle der Funktion $f(x)$ wenn

$$f(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(k-1)}(\hat{x}) = 0$$

und

$$f^{(k)}(\hat{x}) \neq 0.$$

So ist zum Beispiel $\hat{x} = 1$ eine doppelte Nullstelle der Funktion $f(x) = (x-1)^2$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x) + 1.$$

Geben Sie zu jeder Nullstelle ihre Vielfachheit an.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \sin(x)e^x$$

und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind. Hinweis: Wenn man $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Einheitskreis einzeichnet, erkennt man dass

$$\sin(x) = -\cos(x) \quad \text{für } x = {}^{3\pi}/_{4} \text{ und } x = -{}^{\pi}/_{4}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Linearisierung $\ell(x)$ der Funktion

$$f(x) \quad = \quad \ln(1+x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$.

Verwenden Sie diese Linearisierung um

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

für große Werte von $n \in \mathbb{N}$ durch einen einfachen Term zu approximieren.

Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad = \quad 1.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um zu begründen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad e.$$

Aufgabe 10. Sei f an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar. Die Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$ ist definiert durch

$$f'(\hat{x}) \quad = \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}.$$

Gilt dann auch

$$\begin{aligned} f'(\hat{x}) \quad &= \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x} \\ f'(\hat{x}) \quad &= \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x}? \end{aligned}$$

- Zeichnen Sie hierzu wieder Bilder mit der entsprechenden Sekante und ihrer Steigung ein.
- Berechnen Sie mit allen drei Definitionen die Ableitung von $f(x) = x^2$ und $f(x) = 1/x$ und prüfen Sie, ob das gleiche Ergebnis herauskommt.

Aufgabe 11. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass

$$\sin'(x) \quad = \quad \cos(x).$$

Verwenden Sie hierzu für die Ableitung die Formel

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

und das Additionstheorem

$$\sin(x+y) \quad = \quad \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Weiterhin dürfen Sie verwenden, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad = \quad 1.$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Steigung der Tangente der Funktion

$$f(x) = e^{|x-2|}$$

an der Stelle $\hat{x} = 1$.

Aufgabe 13. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisterme so weit wie möglich. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin(x)} \\ f(x) &= \ln(x^2)e^{(x^2)} \\ f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\ f(x) &= \frac{\sin(x)}{x+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to \hat{x}} \frac{e^{x-1} - 1}{\ln(x)}$$

für $\hat{x} = 1$. Hinweis: Da sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to \hat{x}$ gegen Null gehen, ist die Berechnung des Grenzwerts schwierig. Da die Linearisierung einer Funktion bei $\hat{x}$ eine gute Approximation der Funktion in der Umgebung von $\hat{x}$ ist, kann man Zähler und Nenner bei $\hat{x}$ linearisieren und damit den Grenzwert berechnen.

Aufgabe 15. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aufgabe 16. Ein Taylor Polynom ist eine Approximation an eine Funktion f in der Nähe des Entwicklungspunktes $\hat{x}$. Es stellt sich natürlich die Frage, wie gut diese Approximation im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ ist.

Allgemein lässt sich zeigen, dass es für jedes x einen Wert ξ zwischen $\hat{x}$ und x gibt so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x-\hat{x})^i}_{\text{Taylor Polynom } p(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\hat{x})^{n+1}}_{\text{Restglied}}.$$

Der Approximationsfehler des Taylor Polynoms vom Grad n an einer beliebigen Stelle $x \in [\hat{x}, x_{\max}]$ ist damit garantiert nicht größer als

$$m\frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

wobei

$$m = \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|.$$

- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom von $f(x) = \cos(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 3$ mit Grad n. Berechnen Sie mit o.g. Formel eine Obergrenze für den Approximationsfehler des Taylor Polynoms im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 10$ für beliebiges n, für $n = 10$ und für $n = 20$.
- Sei $p(x)$ das Taylor Polynom vom Grad 3 von $f(x) = \sqrt{x}$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Berechnen Sie eine Obergrenze für den Approximationsfehler von $p(x)$ im Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ für $x_{\max} = 3$.

Aufgabe 17. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 3 von $f(x) = \tan(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Intervall $[0, \pi/4]$. Hinweis:

- $\tan(\pi/4) = 1$
- $f''''(x)$ ist monoton steigend im Intervall $[0, \pi/4]$.

Aufgabe 18. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 von

$$f(x) \quad = \quad \sin(x^2) + \cos(x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Im Ergebnis dürfen keine sin- oder cos-Funktionen auftreten.

Aufgabe 19. Sei

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.$$

Hat f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x} = 0$? Falls ja, berechnen Sie diesen, falls nein, geben Sie eine Begründung. Hinweis: Ersetzen Sie die Sinusfunktion im Zähler durch ihre Taylorreihe und vereinfachen Sie den Bruch.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.