

Übungen zu Mathematik 1

Blatt 8

Zu bearbeiten bis 8.5.2025

Name:	Matrikelnr.:
--------------	---------------------

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin(1/x)$$

Definieren Sie eine Folge x_n mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Entscheiden Sie dann, ob für diese Folge der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

existiert und falls ja, berechnen Sie diesen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)}{1-x^2} \\ f(x) &= x \cos(1/x^2) \\ f(x) &= e^{-\cos(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 4. Wie Sie wissen, gilt

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

Da es sich hier um eine Gleichheit von Funktionen handelt, kann man auf beiden Seiten x durch einen Term ersetzen, z.B. x^2 . Es gilt dann

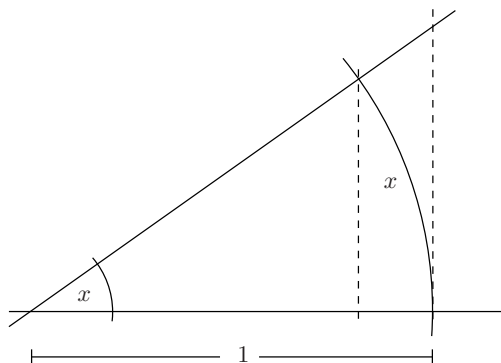
$$\sin(x^2)' = \cos(x^2).$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = 2x \cos(x^2).$$

Wo liegt der Fehler und wie lässt er sich vermeiden?

Aufgabe 5. In nachfolgendem Bild ist ein Kreisbogen mit Winkel x und Radius 1 dargestellt. Der Winkel x im Bogenmaß ist definiert als Länge des Kreisbogens mit Winkel x im Einheitskreis.



Zeichnen Sie in dieses Bild die Größen $\sin(x)$ und $\tan(x)$ als Längen ein und überzeugen Sie sich anschaulich, dass

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

für kleine Winkel $x > 0$ gilt.

Leiten Sie hieraus die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &\leq 1 \\ \frac{\sin(x)}{x} &\geq \cos(x) \end{aligned}$$

her. Leiten Sie aus diesen Ungleichungen unter Verwendung von

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

her.

Aufgabe 6. $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $\hat{x}$ wenn

- f an der Stelle $\hat{x}$ definiert ist, d.h. $\hat{x} \in D$.
- f einen Grenzwert an der Stelle $\hat{x}$ hat.
- Der Grenzwert von f an der Stelle $\hat{x}$ gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$ ist.

Welche der drei Bedingungen sind in folgenden Beispielen erfüllt?

1.) $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ und $\hat{x} = 0$.

2.) $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sign}(x)$ und $\hat{x} = 0$.

3.) $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \neq 5 \\ 0 & \text{für } x = 5 \end{cases}$$

und $\hat{x} = 5$.

4.) $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)/x$ und $\hat{x} = 0$.

Aufgabe 7. Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

für $\hat{x} = 0$. Hinweis: Da sowohl Zähler als auch Nenner für $x \rightarrow \hat{x}$ gegen Null gehen, ist die Berechnung des Grenzwerts schwierig. Da die Linearisierung einer Funktion bei $\hat{x}$ eine gute Approximation der Funktion in der Umgebung von $\hat{x}$ ist, kann man Zähler und Nenner bei $\hat{x}$ linearisieren und damit den Grenzwert berechnen. Diese Vorgehensweise nennt man auch Regel von l'Hospital.

Aufgabe 8. Begründen Sie, dass für sehr kleine Werte von x

$$\ln(1+x) \approx x$$

gilt. Begründen Sie hiermit, dass die Folge

$$x_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

den Grenzwert 1 hat. Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen. Die Ableitung von f ist überall dort definiert, wo f differenzierbar ist. Geben Sie diesen Bereich an und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

$$f(x) = \sin(e^x)$$

$$f(x) = \sin(1/x)$$

$$f(x) = \sin(e^{x^2+2x})$$

$$f(x) = \tan(x^2)$$

Aufgabe 10. Sei

$$f(x) = xe^x.$$

Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$ und leiten Sie daraus eine allgemeine Formel für die i -te Ableitung von $f(x)$ her. Berechnen Sie damit das Taylor Polynom vom Grad n von $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$.

Aufgabe 11. Schreiben Sie die Taylor Reihe von $f(x) = e^x$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ auf. Leiten Sie jeden Summanden der Taylor Reihe ab und zeigen Sie auf diese Weise, dass

$$f'(x) = f(x).$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 der Funktion

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu folgenden Funktionen und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$f(x) = \cos(e^x)$$

$$f(x) = \arctan(x)$$

Aufgabe 14. Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch ein Polynom $p(x)$ approximiert werden. Anders als bei Taylor Polynomen sind die Forderungen wie folgt:

$$p(0) = f(0)$$

$$p(\pi/2) = f(\pi/2)$$

$$p(\pi) = f(\pi).$$

Welchen Grad n muss das Polynom mindestens haben, um diese Forderungen zu erfüllen? Berechnen Sie dieses Polynom.

Aufgabe 15. Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ soll im Arbeitsbereich $[0, \pi]$ durch ein Taylor Polynom vom Grad ≤ 3 approximiert werden. Wählen Sie den optimalen Arbeitspunkt, berechnen Sie das Polynom und eine möglichst kleine obere Schranke für den Fehler im Arbeitsbereich.

Angenommen der Arbeitsbereich wäre $[0, 2\pi]$. Wäre hier ein Taylor Polynom vom Grad ≤ 3 eine sinnvolle Wahl?

Aufgabe 16. Sei

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{3y}.$$

- Berechnen Sie die mittlere Steigung von $f(x, y)$ bei einem Schritt der Länge Δx in x -Richtung:

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berechnen Sie dann den Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der partiellen Ableitung von $f(x, y)$ nach x .

- Berechnen Sie die mittlere Steigung von $f(x, y)$ bei einem Schritt der Länge Δy in y -Richtung:

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berechnen Sie dann den Grenzwert für $\Delta y \rightarrow 0$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der partiellen Ableitung von $f(x, y)$ nach y .

Aufgabe 17. Sei

$$f(x, y) = \frac{xe^{x/y}}{y + 1}.$$

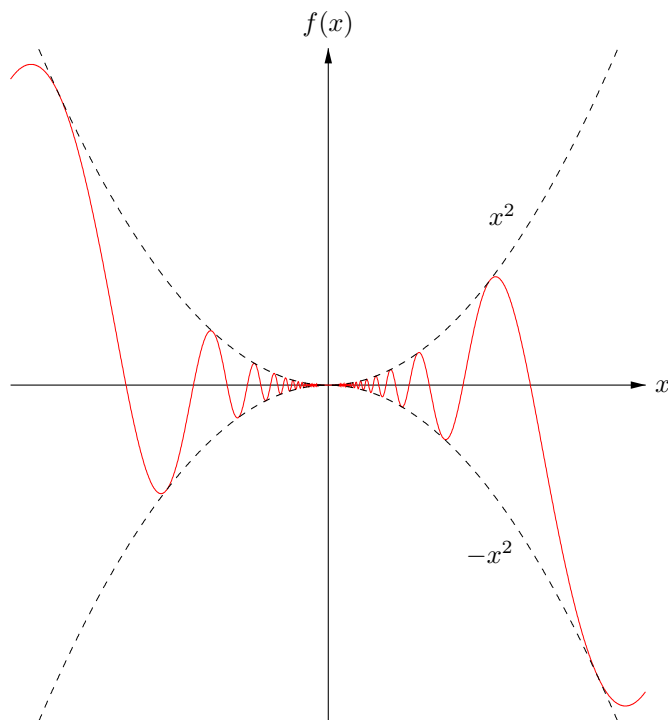
Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Aufgabe 18. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Folglich kann f keinen Knick haben und daher kann sich die Steigung von f auch nicht “sprunghaft” ändern. Die Ableitung von f kann daher keine Sprünge, Lücken oder Ausreißer haben und folglich muss f' stetig sein.

Die anschauliche Verwendung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit ist zwar oft hilfreich, aber manchmal irreführend: Tatsächlich gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitung aber *nicht* stetig ist, was der Intuition zunächst widerspricht. Ein Beispiel ist die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$



- Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x \neq 0$.
- Zeigen Sie, dass $f'(0) = 0$, indem Sie den Grenzwert der Sekantensteigung von f zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x} + \Delta x$ für $\hat{x} = 0$ und $\Delta x \rightarrow 0$ berechnen.
Damit ist f überall differenzierbar.
- Zeigen Sie, dass $f'(x)$ keinen Grenzwert an der Stelle $\hat{x} = 0$ hat.
Damit ist f an der Stelle $\hat{x} = 0$ nicht stetig.

Hinweis. Es gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin(1/\Delta x) = 0$$

da die Sinusfunktion beschränkt ist zwischen ± 1 und der Faktor Δx dafür sorgt, dass das Produkt gegen Null geht.

Aufgabe 19. Die Position eines Körpers zum Zeitpunkt $t > 0$ sei

$$s = \ln(t).$$

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a dieses Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t .
- Berechnen Sie dann die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Position s , d.h. eine Funktion $v(s)$. Hinweis: Sie müssen hierzu t in Abhängigkeit von s durch eine Umkehrfunktion berechnen und dann in v einsetzen.

- Berechnen Sie nun die Ableitung von v nach s , d.h. Änderung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Änderung der Position.
- Berechnen Sie a/v und überprüfen Sie, dass das gleiche Ergebnis herauskommt. Es gilt nämlich

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv/dt}{ds/dt} = \frac{a}{v}.$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.