Übungen zu Mathematik 1

Blatt 9

Zu bearbeiten bis 15.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(x^2 + 1) = 1$$

Begründen Sie bei jedem Umformungsschritt, weshalb die Lösungsmenge dabei erhalten bleibt.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Berechnen Sie

$$|A^4|.$$

Aufgabe 3. Finden Sie eine Relation R so dass das Tripel

$$f = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, R)$$

eine Funktion ist, die aber *nicht* surjektiv ist.

Aufgabe 4. Definieren Sie folgende Begriffe:

- Die Folge $x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hat den Grenzwert $\hat{x} \in \mathbb{R}$.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $\hat{x}$ den Grenzwert G.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ stetig.
- Die Funktion $f \in D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $\hat{x}$ differenzierbar.

Aufgabe 5. Für drei Größen x, y, z gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} x &= \sin\left({}^{1}/_{y}\right) \\ z &= e^{y} + 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie ${}^{dx}/_{dz}$ in Abhängigkeit von z auf zwei Weisen:

- Indem Sie zunächst

$$\frac{dx}{dz} = \frac{{}^{dx}/_{dy}}{{}^{dz}/_{dy}}$$

  berechnen und im Ergbenis y durch z ausdrücken. Sie müssen hierfür die zweite Gleichung nach y auflösen.
- Indem Sie zuerst y durch z ausdrücken, in x einsetzen und dann x nach z ableiten.

Verifizieren Sie, dass das Ergebnis gleich ist.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$f \in \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{a}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f' \in \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = ax^{a-1}.$$

Sie dürfen hierbei die Ketteneregel verwenden und die Ableitung der e- und der ln-Funktion. Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$x^{a} = e^{\ln(x^{a})} = e^{a\ln(x)}.$$

Aufgabe 7. In dieser Aufgabe soll die Produktregel der Ableitung

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

auf mehr als zwei Faktoren verallgemeinert werden. Zeigen Sie zunächst, dass

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

indem Sie die Produktregel zwei Mal anwenden. Sei nun

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_i(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_j(x) \right).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Die Logarithmusfunktion macht aus einem Produkt eine Summe. Es gilt

$$\ln(ab) \quad = \quad \ln(a) + \ln(b).$$

  Wenden Sie dieses Gesetz an um das Produkt in

$$\ln(f(x)) \quad = \quad \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)$$

  in eine Summe zu transformieren.
- Leiten Sie dann $\ln(f(x))$ mit der Summenregel ab.
- Leiten Sie $\ln(f(x))$ mit der Kettenregel ab und lösen Sie nach $f'(x)$ auf.
- Leiten Sie hieraus die o.g. Formel für $f'(x)$ her.

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad $n = 2$ an die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x}$$

mit Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$.

Berechnen Sie dann eine Obergrenze für den Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ für $x \in [1, 2]$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x(e^x - 1)}.$$

Hinweis: Approximieren Sie den Zähler und Nenner durch ein Taylor Polynom vom Grad 2.

Aufgabe 10. Das Newton Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstelle $\hat{x}$ einer Funktion $f(x)$.

- Beginne mit einem Schätzwert für die Nullstelle x_0.
- Berechne die Linearisierung von f im Punkt x_0.

$$\ell_0(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

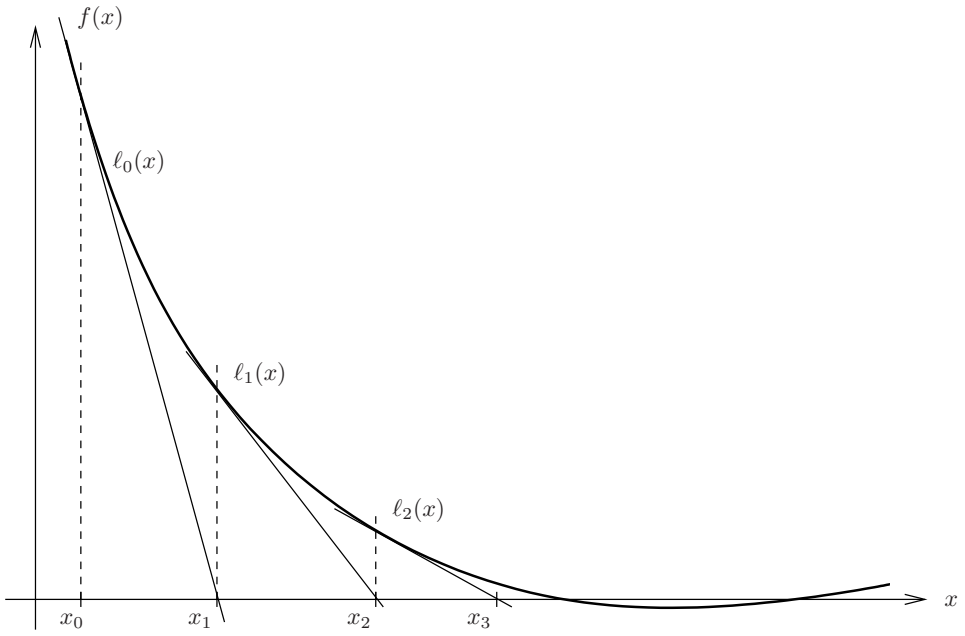
- Berechne die Nullstelle dieser Linearisierung.

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= 0 \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

- Diese Nullstelle wird als neuer Schätzwert x_1 für $\hat{x}$ genommen, d.h.

$$x_1 \quad = \quad x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

- Berechne nach diesem Schema $x_2, x_3, \ldots$.



Stellen Sie eine allgemeine Formel auf, wie man die $n+1$-te Näherung x_{n+1} aus der n-ten Näherung x_n berechnet für alle n.

Sei nun

$$f(x) \quad = \quad x^2 - 2.$$

Diese Funktion hat zwei Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. Beginnen Sie mit der Startnäherung $x_0 = 1$ und berechnen Sie x_n für $n = 1, 2, 3$. Was ist für diese Folge

$$\lim_{n\to\infty} x_n?$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie alle lokalen Extrempunkte zu folgenden Funktionen und entscheiden Sie anhand der zweiten Ableitung ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 \\ f(x) &= \sin(x) \\ f(x) &= xe^x \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Der Begriff Ableitung lässt sich leicht auf mehrstellige Funktionen übertragen. Sei z.B.

$$f(x, y) \quad = \quad x^2 y + x \sin(y) + e^y.$$

- Man kann in dieser Funktion die Variable y als konstanten Parameter betrachten und erhält damit eine einstellige Funktion von x. Die Ableitung dieser einstelligen Funktion heißt partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \quad = \quad 2xy + \sin(y).$$

- Genauso kann man auch die Variable x als konstanten Parameter betrachten und dadurch eine einstellige Funktion von y erhalten. Die Ableitung dieser einstelligen Funktion heißt partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \quad = \quad x^2 + x\cos(y) + e^y.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad \sin(x^2 y) + \frac{x}{\cos(y)}.$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(ye^x)$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 14. Seien $f, g \in A \to B$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf ganz A differenzierbar sind.

- Kann man aus $f = g$ schließen, dass $f' = g'$?
- Kann man aus $f' = g'$ schließen, dass $f = g$?
- Kann man aus $f' = g'$ schließen, dass es eine Konstante C gibt so dass

$$f(x) \quad = \quad g(x) + C$$

für alle $x \in A$?

Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 15. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie an, welche Integrationsregeln Sie benutzt haben.

a)
$$\int x^3 dx$$

b)
$$\int \sin(3x) dx$$

c)
$$\int e^{-2x} dx$$

Aufgabe 16. Wenn $f(x)$ an der Stelle $\hat{x}$ einen lokalen Extremwert hat, dann ist $f'(\hat{x}) = 0$.

Für mehrstellige Funktionen gilt dies analog. Wenn $f(x, y)$ an der Stelle $(\hat{x}, \hat{y})$ einen lokalen Extremwert hat, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{y}) &= 0 \qquad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x}, \hat{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie alle Punkte $(\hat{x}, \hat{y})$, an denen beide partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (x + 1) \sin(x + y)$$

Null sind.

Aufgabe 17. Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch eine Gerade $\ell(x)$ approximiert werden so dass der quadratische Fehler

$$\int_0^\pi (\ell(x) - \cos(x))^2 dx$$

minimal wird. Berechnen Sie diese Gerade.

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz

$$\ell(x) = ax + b.$$

Da ein Integral nichts anderes ist als eine Summe, lassen sich die Optimalitätskriterien mit Hilfe der Summenregel der Ableitung wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\pi (ax + b - \cos(x))^2 dx &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a} (ax + b - \cos(x))^2 dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \int_0^\pi (ax + b - \cos(x))^2 dx &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial b} (ax + b - \cos(x))^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Für welche Werte von n ist

$$\int_1^\infty x^n dx$$

endlich?

Aufgabe 19. Berechnen Sie

$$\int x \ln(x) dx.$$

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.