

Logisches Denken und Beweisen

(Stand: 4. Mai 2026)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1	Das Beweisspiel	3
2	Benutzung von Definitionen	4
3	Äquivalente Umformung von Aussagen	5
3.1	Aussagenlogische Umformungen	5
3.2	Umformung von Aussagen mit Quantoren	6
4	Regeln für Aussagen in “Annahmen”	10
4.1	Annahme: $\forall x F(x)$	10
4.2	Annahme: $\exists x F(x)$	11
4.3	Annahme: Gleichung von Termen	12
4.4	Annahme: $F \wedge G$	13
4.5	Annahme: $F \vee G$	14
4.6	Annahme: F und $F \rightarrow G$	15
4.7	Annahme: $F \leftrightarrow G$	16
5	Regeln für Aussagen in “Zu zeigen”	17
5.1	Zu zeigen: $\forall x F(x)$	17
5.2	Zu zeigen: $\exists x F(x)$	18
5.3	Zu zeigen: $F \wedge G$	19
5.4	Zu zeigen: $F \vee G$	19
5.5	Zu zeigen: $\neg F$	19
5.6	Zu zeigen: $F \rightarrow G$	20
5.7	Zu zeigen: $F \leftrightarrow G$	21
5.8	Fallunterscheidung	22
5.9	Widerspruchsbeweis	23
5.10	Hinreichende Bedingung	24
6	Beispiele	25

1 Das Beweisspiel

Der Zweck eines Beweises ist, zu verstehen warum eine Aussage wahr ist.

Beweisen dient daher in erster Linie dem Verständnis. Wenn man nicht erklären kann, weshalb eine Aussage wahr ist, hat man auch nicht begriffen, warum sie es ist bzw. was “dahinter steckt”.

Beweisen ist ein Werkzeug der Wissenserweiterung und wird in sämtlichen Wissenschaften (bewusst oder unbewusst und leider oft auch falsch) angewandt.

Annahmen. Bekanntes Wissen, das entweder bereits bewiesen wurde oder temporär vorausgesetzt wird, liegt in einer Menge von Aussagen vor, die wir mit *Annahmen* bezeichnen.

Zu zeigen. Aussagen, die wir aus dem bekannten Wissen ableiten bzw. beweisen wollen, liegen ebenfalls in einer Menge namens *Zu zeigen* vor.

Ein Beweis ist nun wie ein Spiel, bei dem nach einfachen Regeln der Logik die Mengen *Annahmen* und *Zu zeigen* schrittweise verändert werden dürfen. Das Ziel ist, nach endlich vielen Schritten zu einem Zustand zu kommen, in dem

$$\text{Zu zeigen} \subseteq \text{Annahmen}$$

ist. Die Spielregeln werden in Kapiteln 4 und 5 erklärt. Beim praktischen Beweisen wird man mit etwas Übung natürlich mehrere Schritte auf einmal machen um schneller zum Ziel zu kommen.

Weiterhin sind sämtliche Regeln der Logik anwendbar, um eine Aussage äquivalent umzuformen, siehe Kapitel 3. Schwierige Begriffe sind in Definitionen erklärt, auf die man jederzeit zugreifen darf, siehe Kapitel 2.

2 Benutzung von Definitionen

Wenn in einer Aussage ein Begriff auftritt, kann man diesen immer durch seine Definition ersetzen. Dies gilt sowohl für Aussagen in *Annahmen* als auch in *Zu zeigen*. In der Regel sollte man diesen Schritt erst dann anwenden, wenn sonst keine Schritte anwendbar sind, da die dabei entstehenden Formeln meistens länger werden.

Beispiel 2.1

Zu zeigen:

$$A \subseteq B.$$

Beweisschritt: Einsetzen der Definition von \subseteq .

Zu zeigen:

für alle x gilt
wenn $x \in A$
dann $x \in B$.

Beispiel 2.2

Zu zeigen:

$$A = B.$$

Beweisschritt: Einsetzen der Definition der Mengengleichheit.

Zu zeigen:

$$A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Beispiel 2.3

Annahme:

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle \hat{x} einen Grenzwert.

Beweisschritt: Einsetzen der Definition des Grenzwerts von Funktionen.

Annahme:

es gibt ein $G \in \mathbb{R}$ so dass
für jede Folge x_n gilt
wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ und $x_n \neq \hat{x}$ für alle n
dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G$.

3 Äquivalente Umformung von Aussagen

Man kann zu jeder Zeit im Beweis die Aussagen in *Annahmen* oder *Zu zeigen* logisch äquivalent umformen.

3.1 Aussagenlogische Umformungen

Aussagenlogische Umformungen kann man leicht mit einer Wahrheitstabelle verifizieren. Ein paar nützliche Beispiele sind wie folgt.

$$\begin{aligned}
 F \rightarrow G &= \neg G \rightarrow \neg F \\
 F \leftrightarrow G &= (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \\
 \neg(F \wedge G) &= \neg F \vee \neg G \\
 \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G \\
 F \vee G &= (F \wedge \neg G) \vee (\neg F \wedge G) \vee (F \wedge G) \\
 G &= (F \rightarrow G) \wedge (\neg F \rightarrow G)
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.1

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 &\text{wenn } x_1 \neq x_2 \\
 &\text{dann } f(x_1) \neq f(x_2)
 \end{aligned}$$

Beweisschritt: Anwendung der aussagenlogischen Umformung

$$F \rightarrow G = \neg G \rightarrow \neg F.$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 &\text{wenn } f(x_1) = f(x_2) \\
 &\text{dann } x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.2

Beim Beweis der Gleichheit von Mengen tritt folgende Situation auf.

Zu zeigen:

$$x \in A \leftrightarrow x \in B.$$

Beweisschritt: Anwendung der aussagenlogischen Umformung

$$F \leftrightarrow G = F \rightarrow G \wedge G \rightarrow F.$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 &x \in A \rightarrow x \in B \\
 &x \in B \rightarrow x \in A.
 \end{aligned}$$

3.2 Umformung von Aussagen mit Quantoren

Relativierte Quantoren

Relativierte Quantoren verwendet man, wenn man eine Aussage nicht über alle x sondern nur über alle x aus einer bestimmten Menge machen möchte. So heißt z.B.

$$\forall x \in A F(x)$$

für alle x aus der Menge A gilt die Aussage $F(x)$

und

$$\exists x \in A F(x)$$

es existiert ein x in der Menge A , für das die Aussage $F(x)$ gilt.

Relativierte Quantoren kann man immer durch normale Quantoren ersetzen:

$$\forall x \in A F(x) = \forall x (x \in A \rightarrow F(x))$$

$$\exists x \in A F(x) = \exists x (x \in A \wedge F(x)).$$

Beispiel 3.3

Zu zeigen:

$$\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} y > x)$$

zu jeder natürlichen Zahl x gibt es eine größere natürliche Zahl y

Beweisschritt: Ersetzung der relativierten Quantoren.

Zu zeigen:

$$\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow (\exists y y \in \mathbb{N} \wedge y > x)).$$

Quantoren und Negation

Die Reihenfolge eines Quantors und einer Negation kann vertauscht werden, wobei aus einem Allquantor ein Existenzquantor wird und umgekehrt.

$$\begin{aligned}\neg\forall x F(x) &= \exists x \neg F(x) \\ \neg\exists x F(x) &= \forall x \neg F(x).\end{aligned}$$

Beispiel 3.4

Zu zeigen:

$$\neg\exists f (f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \wedge \text{injektiv}(f))$$

es gibt keine injektive Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{N} .

Beweisschritt: Anwendung der Umformung

$$\neg\exists x F(x) = \forall x \neg F(x).$$

Zu zeigen:

$$\forall f \neg(f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \wedge \text{injektiv}(f))$$

f kann nicht von \mathbb{R} nach \mathbb{N} abbilden und injektiv sein.

Beweisschritt: Anwendung der aussagenlogischen Umformung

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B = A \rightarrow \neg B.$$

Zu zeigen:

$$\forall f (f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \neg\text{injektiv}(f))$$

wenn f von \mathbb{R} nach \mathbb{N} abbildet, dann ist f nicht injektiv.

“Distributivgesetze” für Quantoren

Ein Allquantor kann über und verteilt werden, ein Existenzquantor über oder:

$$\begin{aligned}\forall x(F(x) \wedge G(x)) &= (\forall xF(x)) \wedge (\forall xG(x)) \\ \exists x(F(x) \vee G(x)) &= (\exists xF(x)) \vee (\exists xG(x)).\end{aligned}$$

Allerdings gilt das nicht umgekehrt!

$$\begin{aligned}\forall x(F(x) \vee G(x)) &\neq (\forall xF(x)) \vee (\forall xG(x)) \\ \exists x(F(x) \wedge G(x)) &\neq (\exists xF(x)) \wedge (\exists xG(x)).\end{aligned}$$

Beispiel 3.5 Die Aussage

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{Z} (x \geq 0 \vee x < 0) \\ \text{jede ganze Zahl ist } \geq 0 \text{ oder } < 0\end{aligned}$$

ist wahr, die Aussage

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{Z} x \geq 0 \vee (\forall x \in \mathbb{Z} x < 0)) \\ \text{jede ganze Zahl ist } \geq 0 \text{ oder jede ganze Zahl ist } < 0\end{aligned}$$

ist falsch!

Beispiel 3.6 Die Aussage

$$\begin{aligned}\exists x \in \mathbb{Z} (x > 0 \wedge x < 0) \\ \text{es gibt eine ganze Zahl, die } > 0 \text{ und } < 0 \text{ ist}\end{aligned}$$

ist falsch, die Aussage

$$\begin{aligned}(\exists x \in \mathbb{Z} x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z} x < 0) \\ \text{es gibt eine ganze Zahl, die } > 0 \text{ ist und } \\ \text{es gibt eine ganze Zahl, die } < 0 \text{ ist}\end{aligned}$$

ist wahr!

Existenzquantor mit Ausrufezeichen

Der “normale” Existenzquantor hat die Bedeutung

$$\exists x F(x)$$

es gibt (mindestens) ein x mit der Eigenschaft $F(x)$.

Der Existenzquantor mit Ausrufezeichen hat die Bedeutung

$$\exists! x F(x)$$

es gibt genau ein x mit der Eigenschaft $F(x)$.

Man kann so einen Existenzquantor immer ersetzen:

- es gibt ein x mit $F(x)$ und
- wenn $F(x_1)$ und $F(x_2)$ beide wahr sind, muss x_1 und x_2 gleich sein.

$$\exists! x F(x) = (\exists x F(x)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2 F(x_1) \wedge F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2).$$

Beispiel 3.7 Wenn $f \in A \rightarrow B$ und $x \in A$, dann gibt es genau ein $y \in B$ mit $f(x) = y$. Dies führt beim Beweisen zu folgender Situation.

Annahme:

$$\exists! y \in B f(x) = y.$$

Beweisschritt: Existenzquantor mit Ausrufezeichen ersetzen.

Annahme:

$$(\exists y \in B f(x) = y) \wedge (\forall y_1 \forall y_2 f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2 \rightarrow y_1 = y_2).$$

4 Regeln für Aussagen in “Annahmen”

4.1 Annahme: $\forall x F(x)$

Die Annahme

$$\forall x F(x)$$

besagt, dass $F(x)$ wahr ist, egal was man für x einsetzt. Folglich kann man die Aussage

$$F(t)$$

zur Menge der Annahmen hinzufügen, wobei t ein beliebiger Term ist.

Beispiel 4.1 Ist eine Funktion $f(x)$ durch einen Term definiert, darf man die Funktionsvariable x durch einen beliebigen Term ersetzen. Dies ist z.B. bei der Komposition erforderlich.

Annahme:

$$\forall x f(x) = x + \sin(x).$$

Beweisschritt: Da die Aussage $f(x) = x + \sin(x)$ wahr ist für jedes x , ist sie insbesondere auch wahr wenn man x durch $g(x)$ ersetzt.

Annahme:

$$f(g(x)) = g(x) + \sin(g(x)).$$

Beispiel 4.2 Anwenden von Rechengesetzen heißt, die Variablen in den Gesetzen durch beliebige Terme ersetzen.

Annahme:

$$\forall x \forall y (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Binomische Formel

Beweisschritt: Ersetzen von x durch den Term e^x und y durch den Term $\sin(u)$.

Annahme:

$$(e^x + \sin(u))^2 = e^{2x} + 2e^x \sin(u) + \sin^2(u).$$

4.2 Annahme: $\exists x F(x)$

Hat man die Aussage

$$\exists x F(x)$$

in der Menge der Annahmen, kann man die Aussage

$$F(\hat{x})$$

zur Menge der Annahmen hinzufügen, wobei \hat{x} ein neues Konstantensymbol ist, d.h. ein Konstantensymbol, das bisher noch nicht in der Menge *Annahmen* oder *Zu zeigen* verwendet wurde. Im Beweis formuliert man dies durch

$$\text{Sei } \hat{x} \text{ so dass } F(\hat{x}).$$

Beispiel 4.3 Beim Grenzwert von Folgen stößt man auf folgende Aussage:

Annahme:

$$\exists N \forall n (n > N \rightarrow |x_n| < \varepsilon).$$

Beweisschritt: Da man weiß, dass es ein N gibt, ab dem die Folge x_n im Betrag kleiner als ε ist, kann man diesem N einen Namen geben, z.B. \hat{N} . Der Name \hat{N} muss neu sein, da sonst z.B. in einer früheren Annahme $\hat{N} = 3$ stehen könnte, was ja nicht richtig sein muss. Oft wird man aber einfach den gleichen Namen N verwenden (was nicht ganz sauber ist).

Annahme: Sei N so dass

$$\forall n (n > N \rightarrow |x_n| < \varepsilon).$$

4.3 Annahme: Gleichung von Termen

Häufig sind die Annahmen durch Gleichungen gegeben.

Annahme:

$$t_1 = t_2$$

wobei t_1 und t_2 Terme sind. Man darf dann jedes Auftreten des Terms t_1 in der Menge *Annahme* und *Zu zeigen* durch den Term t_2 ersetzen.

Beispiel 4.4

Annahme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ x &= \sin(u) \end{aligned}$$

Beweisschritt: Ersetze den Term x durch den Term $\sin(u)$.

Annahme:

$$f'(\sin(u)) = \frac{f(\sin(u)+dx) - f(\sin(u))}{dx}.$$

Beispiel 4.5

Annahme:

$$\begin{aligned} \forall x f'(x) &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ \forall x f(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Beweisschritt: Anwendung der Allquantor-Regel. Ersetze x durch \hat{x} bzw. durch $\hat{x} + dx$.

Annahme:

$$\begin{aligned} f'(\hat{x}) &= \frac{f(\hat{x}+dx) - f(\hat{x})}{dx} \\ f(\hat{x}) &= \hat{x}^2 \\ f(\hat{x}+dx) &= (\hat{x}+dx)^2. \end{aligned}$$

Beweisschritt: Ersetze $f(\hat{x}+dx)$ durch $(\hat{x}+dx)^2$ und $f(\hat{x})$ durch \hat{x}^2 .

Annahme:

$$f'(\hat{x}) = \frac{(\hat{x}+dx)^2 - \hat{x}^2}{dx}.$$

4.4 Annahme: $F \wedge G$

Hat man die Aussage

$$F \wedge G$$

in der Menge der Annahmen, kann man die Aussagen F und G zur Menge der Annahmen hinzufügen.

Beispiel 4.6 Wenn man weiß, dass x in der Schnittmenge von A und B ist, hat man folgende Situation.

Annahme:

$$x \in A \wedge x \in B.$$

Beweisschritt: Hinzufügen der beiden Teilaussage zu den Annahmen.

Annahme:

$$x \in A$$

$$x \in B.$$

4.5 Annahme: $F \vee G$

Hat man die Aussage

$$F \vee G$$

in der Menge der Annahmen, macht man eine Fallunterscheidung.

- Fall 1. Annahme: $F \wedge \neg G$
- Fall 2. Annahme: $\neg F \wedge G$
- Fall 3. Annahme: $F \wedge G$.

Die zu zeigenden Aussagen müssen in allen drei Fällen bewiesen werden. Manchmal genügen auch zwei Fälle:

- Fall 1. Annahme: F
- Fall 2. Annahme: G .

Beispiel 4.7

Annahme: Für eine natürliche Zahl n ist bekannt, dass

$$n < 5 \vee n \text{ gerade, d.h. } n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

Beweisschritt: Fallunterscheidung.

- Fall 1. Annahme: $n < 5 \wedge n$ ungerade, d.h. $n = 1, 3$
- Fall 2. Annahme: $n \geq 5 \wedge n$ gerade, d.h. $n = 6, 8, 10, \dots$
- Fall 3. Annahme: $n < 5 \wedge n$ gerade, d.h. $n = 2, 4$

4.6 Annahme: F und $F \rightarrow G$

Hat man die Aussagen

$$F \text{ und } F \rightarrow G$$

in der Menge der Annahmen, kann man die Aussage G zur Menge der Annahmen hinzufügen. Diesen Beweisschritt nennt man modus ponens.

Beispiel 4.8

Wenn man beweisen soll, dass die Komposition zweier injektiver Funktionen wieder injektiv ist, kommt man im Lauf des Beweises zur Situation

Annahme:

$$\begin{aligned}x_1 &\neq x_2 \\x_1 &\neq x_2 \rightarrow g(x_1) \neq g(x_2) \\g(x_1) &\neq g(x_2) \rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))\end{aligned}$$

Beweisschritt: Zweimalige Anwendung von modus ponens.

Annahme:

$$f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)).$$

4.7 Annahme: $F \leftrightarrow G$

Hat man die Aussage

$$F \leftrightarrow G$$

in der Menge der Annahmen, kann man in den Mengen *Annahmen* und *Zu zeigen* die Aussage F beliebig durch G ersetzen. Dieser Schritt wird insbesondere auch angewandt, wenn Definitionen für einen Begriff eingesetzt werden.

Beispiel 4.9

Annahme:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Definition der Mengengleichheit

Zu zeigen:

$$A = B$$

Beweisschritt.

Zu zeigen:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

5 Regeln für Aussagen in “Zu zeigen”

5.1 Zu zeigen: $\forall x F(x)$

Der Beweis, dass eine Aussage $F(x)$ für alle x gilt, scheint zunächst sehr schwierig, da es ja unendlich viele x gibt. Die Idee ist, ein neues Konstantensymbol \hat{x} zur Sprache hinzuzunehmen, dessen Bedeutung aber nicht festgelegt, also beliebig ist. Es genügt dann, die Aussage $F(\hat{x})$ zu beweisen.

Beim praktischen Beweisen geht man oft so vor, dass man kein neues Konstantensymbol wählt, sondern stattdessen einfach x nimmt. Das ist nicht ganz sauber, da x ab diesem Beweisschritt kein Variablensymbole mehr ist sondern ein Konstantensymbol. Weiterhin muss man darauf achten, dass x nicht bereits in anderen Aussagen verwendet wird.

Zu zeigen:

$$\forall x F(x)$$

Beweisschritt: Sei x beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$F(x)$$

Beispiel 5.1

Zu zeigen:

$$\forall x_1 \forall x_2 x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Beweisschritt: Seien x_1, x_2 beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

5.2 Zu zeigen: $\exists x F(x)$

Existenzbeweise machen i.a. am meisten Schwierigkeiten. Oft formt man äquivalent um

$$\exists x F(x) = \neg \forall x \neg F(x)$$

Zum Beweis von $\neg \forall x \neg F(x)$ nimmt man die Negation $\forall x \neg F(x)$ an und führt dies zu einem Widerspruch, siehe Kapitel 5.5.

Aufschlussreicher sind jedoch *konstruktive* Beweise, da man hier explizit ein Beispiel x konstruiert, für das F wahr ist. Ein Beispiel zu konstruieren bedeutet konkret, dass man einen Term finden muss, mit dem sich das Beispiel berechnen lässt. In dem Term dürfen hierbei Konstantensymbole auftreten, die z.B. durch die Elimination eines Allquantors zuvor eingeführt wurden.

Zu zeigen:

$$\forall x F(x)$$

Beweisschritt: Konstruktion eines Beispiels durch einen Term t .

Zu zeigen:

$$F(t)$$

Beispiel 5.2 Beweis, dass die Folge $x \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n = 1/n$ eine Nullfolge ist.

Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |1/n| < \varepsilon$$

Beweisschritt: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |1/n| < \varepsilon$$

Beweisschritt: Mit $N = 1/\varepsilon$ hat man einen Term zur Berechnung eines Beispiels. In diesem Term darf das zuvor eingeführte Konstantensymbol ε auftreten, d.h. N ist eine Funktion von ε (Skolemfunktion).

Zu zeigen:

$$\forall n > 1/\varepsilon \quad |1/n| < \varepsilon$$

5.3 Zu zeigen: $F \wedge G$

Die Aussage $F \wedge G$ ist genau dann wahr, wenn F wahr ist und G wahr ist. Folglich kann man den Beweis von $F \wedge G$ in zwei Teilbeweise von F und von G zerlegen.

Zu zeigen:

$$F \wedge G$$

Beweisschritt.

Zu zeigen:

$$F$$

$$G$$

Es folgen dann zwei voneinander unabhängige Beweise der Aussage F und der Aussage G .

Beispiel 5.3 Beim Beweis, dass eine Funktion f bijektiv ist, muss man beweisen dass f injektiv ist und dass f surjektiv ist. Dies lässt sich in zwei voneinander unabhängige Beweise aufspalten.

5.4 Zu zeigen: $F \vee G$

Da

$$F \vee G = \neg F \rightarrow G,$$

kann man für den Beweis der Aussage $F \vee G$ die Regel aus Kapitel 5.6 anwenden.

5.5 Zu zeigen: $\neg F$

Um zu zeigen, dass F falsch ist, nimmt man meistens an, dass F wahr ist und führt dies zu einem Widerspruch, siehe Kapitel 5.9

5.6 Zu zeigen: $F \rightarrow G$

Meistens muss man eine Aussage beweisen, die aber nur unter bestimmten Voraussetzungen gilt.

Zu zeigen: $F \rightarrow G$

Beweisschritt: Fallunterscheidung.

- **Fall F falsch.** Laut Wahrheitstabelle ist in diesem Fall die Aussage $F \rightarrow G$ immer wahr, unabhängig davon ob G wahr oder falsch ist. Der Beweis ist in diesem Fall erledigt.
- **Fall F wahr.** Laut Wahrheitstabelle ist in diesem Fall die Aussage $F \rightarrow G$ genau dann wahr, wenn G wahr ist. Folglich genügt es, G zu zeigen.

Annahme: F

Zu zeigen: G

Beispiel 5.4

Beim Beweis, dass eine Funktion f injektiv ist, entsteht folgende Situation.

Zu zeigen:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Beweisschritt.

Annahme:

$$x_1 \neq x_2$$

Zu zeigen:

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Beispiel 5.5

Beim Beweis, dass $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, entsteht folgende Situation.

Zu zeigen:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x} \wedge \forall n \in \mathbb{N} (x_n \in D \wedge x_n \neq \hat{x}) \right) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}).$$

Beweisschritt.

Annahme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (x_n \in D \wedge x_n \neq \hat{x})$$

Zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}).$$

5.7 Zu zeigen: $F \leftrightarrow G$

Da

$$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

kann man für den Beweis der Aussage $F \leftrightarrow G$ die Regeln aus Kapitel 5.3 und 5.6 anwenden.

Zu zeigen: $F \leftrightarrow G$

Beweisschritt. Aufspalten in zwei wenn-dann Beweise.

“ \Rightarrow ” Annahme: F , Zu zeigen: G

“ \Leftarrow ” Annahme: G , Zu zeigen: F .

5.8 Fallunterscheidung

Oft kommt man in einem Beweis dadurch weiter, dass man zunächst einen Spezialfall separat betrachtet und danach im Beweis des allgemeinen Falles diesen Spezialfall ausschließt. Man führt somit zwei Beweise, wobei man in jedem Teilbeweis einmal den Spezialfall voraussetzt und einmal ausschließt.

Zu zeigen:

$$G$$

Beweisschritt: Anwendung der aussagenlogischen Gleichheit

$$G = (F \rightarrow G) \wedge (\neg F \rightarrow G)$$

wobei F eine beliebige Aussage ist.

Zu zeigen:

$$\begin{array}{l} F \rightarrow G \\ \neg F \rightarrow G \end{array}$$

Tatsächlich kommt man auf diese Beweisregel auch dadurch, dass man die (triviale) Aussage $F \vee \neg F$ zu den Annahmen dazunimmt und dann die Regel für eine oder-Aussage in den Annahmen (Kapitel 4.5) anwendet.

Beweisschritt: Anwendung der wenn-dann Regel.

- Fall 1. Annahme: F , Zu zeigen: G
- Fall 2. Annahme: $\neg F$, Zu zeigen: G .

Beispiel 5.6 Fallunterscheidungen treten häufig beim Betragsrechnen auf.

Zu zeigen: $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$

Beweisschritt.

- Annahme: $a \geq b$

Zu zeigen: $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$

$$|a - b| = a - b = \max(a, b) - \min(a, b)$$

- Annahme: $a < b$

Zu zeigen: $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$

$$|a - b| = -(a - b) = b - a = \max(a, b) - \min(a, b)$$

5.9 Widerspruchsbeweis

Eine Vorgehensweise zum Beweis einer Aussage F besteht darin, dass man zeigt, dass die Annahme ihrer Negation, d.h. $\neg F$ zu einem Widerspruch führt. Ein Widerspruch ist z.B. die Aussage

$$G \wedge \neg G$$

wobei G eine beliebige Aussage ist.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Beweistechnik korrekt ist: Aussagenlogische Umformung ergibt

$$\neg F \rightarrow (G \wedge \neg G) = F \vee (G \wedge \neg G) = F \vee \text{falsch} = F.$$

Der Beweis von F ist somit äquivalent zum Beweis von $\neg F \rightarrow (G \wedge \neg G)$. Diesen führt man dadurch, dass man $\neg F$ annimmt und $G \wedge \neg G$ zeigt, siehe Kapitel 5.6.

Zu zeigen: F

Beweisschritt: Widerspruchsbeweis.

Annahme: $\neg F$

Zu zeigen: $G \wedge \neg G$ für eine beliebige Aussage G .

Widerspruchsbeweise eignen sich besonders, wenn die zu zeigende Aussage die Form $\neg F$ hat. Man nimmt dann F an und leitet daraus einen Widerspruch her.

Beispiel 5.7 Der Beweis, dass es keine surjektive Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{R} gibt, d.h. dass \mathbb{R} überabzählbar ist, wird am einfachsten durch Widerspruch geführt.

Zu zeigen:

$$\neg(\exists f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{N} f(x) = y).$$

Beweisschritt.

Annahme:

$$\exists f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{N} f(x) = y.$$

Zu zeigen: Widerspruch.

Man nimmt somit an, dass es eine surjektive Funktion $f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt. Im weiteren Verlauf dieses Beweises konstruiert man unter Verwendung dieser Funktion eine Zahl $\hat{y} \in \mathbb{R}$ mit

$$\neg \exists x \in \mathbb{N} f(x) = \hat{y},$$

d.h. \hat{y} tritt nicht als Funktionswert von f auf. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme ist, dass f surjektiv ist.

5.10 Hinreichende Bedingung

Beim Beweis einer Aussage F ist es manchmal einfacher, eine hinreichende Bedingung für F zu beweisen.

Zu zeigen: F

Beweisschritt: Zeige eine beliebige, hinreichende Bedingung G für F .

Zu zeigen: $G \wedge (G \rightarrow F)$.

Wenn die Aussagen G und $G \rightarrow F$ wahr sind, dann ist auch F wahr (modus ponens).

Beispiel 5.8 Beim Beweis, dass eine Folge x_n Nullfolge ist, kann man diese nach oben abschätzen durch eine einfachere Folge y_n , von der man leichter zeigen kann, dass sie Nullfolge ist. Sei N die Menge aller Nullfolgen.

Zu zeigen:

$$\underbrace{x \in N}_F$$

Beweisschritt.

Zu zeigen:

$$\underbrace{(y \in N \wedge \forall n |x_n| \leq |y_n|)}_G \wedge \underbrace{(y \in N \wedge \forall n |x_n| \leq |y_n|) \rightarrow x \in N}_{G \rightarrow F}.$$

Da in diesem Beispiel die Aussage $G \rightarrow F$ ein bekanntes Theorem ist und folglich zu den Annahmen dazugenommen werden kann, muss man nur noch G beweisen.

6 Beispiele

Beispiel 6.1 Die Komposition von zwei surjektiven Funktionen ist eine surjektive Funktion. Sei S die Menge aller surjektiver Funktionen.

Zu zeigen:

$$\forall A, B, C \forall g \in A \rightarrow B \forall f \in B \rightarrow C (f \in S \wedge g \in S \rightarrow f \circ g \in S)$$

Beweisschritt: Seien $A, B, C, g \in A \rightarrow B, f \in B \rightarrow C$ beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$f \in S \wedge g \in S \rightarrow f \circ g \in S$$

Beweisschritt: Einsetzen der Definition von surjektiv.

Annahme:

$$\forall c \in C \exists b \in B f(b) = c$$

$$\forall b \in B \exists a \in A g(a) = b$$

Zu zeigen:

$$\forall c \in C \exists a \in A f(g(a)) = c$$

Beweisschritt: Sei $\hat{c} \in C$ beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$\exists a \in A f(g(a)) = \hat{c}.$$

Beweisschritt: Annahme gilt für alle $c \in C$, folglich auch für \hat{c} .

Annahme:

$$\exists b \in B f(b) = \hat{c}$$

Beweisschritt: Benennen dieses $b \in B$ durch neues Konstantensymbol \hat{b} .

Annahme:

$$f(\hat{b}) = \hat{c}.$$

Beweisschritt: Annahme gilt für alle $b \in B$, folglich auch für \hat{b} .

Annahme:

$$\exists a \in A g(a) = \hat{b}.$$

Beweisschritt: Benennen diese $a \in A$ durch neues Konstantensymbol \hat{a} .

Annahme:

$$g(\hat{a}) = \hat{b}.$$

Beweisschritt: Als Term für $a \in A$ wählt man $a = \hat{a}$.

Zu zeigen:

$$f(g(\hat{a})) = \hat{c}.$$

Dies folgt aus den Annahmen $g(\hat{a}) = \hat{b}$ und $f(\hat{b}) = \hat{c}$.

Beispiel 6.2 Wenn y_n Nullfolge ist und $|x_n| \leq |y_n|$ für alle n , dann ist auch x_n Nullfolge.

Annahme:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |y_n| < \varepsilon \\ \forall n |x_n| \leq |y_n|$$

Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n| < \varepsilon$$

Beweisschritt: Sei $\hat{\varepsilon} > 0$ beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$\exists N \forall n > N |x_n| < \hat{\varepsilon}$$

Beweisschritt: Annahme gilt für alle $\varepsilon > 0$, folglich auch für $\hat{\varepsilon}$.

Annahme:

$$\exists N \forall n > N |y_n| < \hat{\varepsilon}$$

Beweisschritt: Benennen dieses N durch neues Konstantensymbol \hat{N} .

Annahme:

$$\forall n > \hat{N} |y_n| < \hat{\varepsilon}$$

Beweisschritt: Existenzquantor in *zu Zeigen*. Als Term für N wählt man $N = \hat{N}$.

Zu zeigen:

$$\forall n > \hat{N} |x_n| < \hat{\varepsilon}$$

Beweisschritt: Sei $\hat{n} > \hat{N}$ beliebig aber fest.

Zu zeigen:

$$|x_{\hat{n}}| < \hat{\varepsilon}.$$

Beweisschritt: Annahme gilt für alle $n > \hat{N}$, folglich auch für \hat{n} .

Annahme:

$$|x_{\hat{n}}| \leq |y_{\hat{n}}|, \quad |y_{\hat{n}}| < \hat{\varepsilon}$$

Hieraus folgt mit Transitivität der Kleiner-Relation $|x_{\hat{n}}| < \hat{\varepsilon}$.