Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 1

Studiengang: ASE	Semester: 1
Hilfsmittel: keine	Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Name:	**Matrikelnr.:**
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{falls } x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f.

$f^{-1}(y) =$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{\sqrt{\sin(y)}}{x}$$
$$g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{x}, \ln(x+1)\right).$$

Berechnen Sie je einen Funktionsterm für die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$. Geben Sie auch die Signaturen der Funktionen an.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Die Funktion

$$f(x) = \sin(|x|)$$

ist an der Stelle $\hat{x} = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Beweisen Sie dies, indem Sie zwei Nullfolgen Δx_n und $\Delta x'_n$ finden so dass die Folgen

$$y_n = \frac{f(\hat{x} + \Delta x_n) - f(\hat{x})}{\Delta x_n} \quad \text{und} \quad y'_n = \frac{f(\hat{x} + \Delta x'_n) - f(\hat{x})}{\Delta x'_n}$$

unterschiedliche Grenzwerte haben. Hinweis: Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$x_n =$	$x'_n =$
$\lim_{n \to \infty} y_n =$	$\lim_{n \to \infty} y'_n =$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 von

$$f(x) = x \sin(x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = \pi$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von

$$f(x) = x^2 e^x,$$

die die Zusatzbedingung $F(0) = 0$ erfüllt.

$F(x) =$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

$F(x) =$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(ax)\cos(bx) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a+b)x\big) + \cos\big((a-b)x\big)\Big).$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^3 \quad = \quad 1+j.$$

$\mathbb{L} =$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Sei

$$z \quad = \quad \frac{\sqrt{2+2j}}{e^{j\pi/8}(1-j)^4}.$$

Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von z.

$\mathrm{re}(z) =$	$\mathrm{im}(z) =$	$\lvert z\rvert =$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) \quad = \quad \frac{2x-6}{x^2-2x+5}.$$

$f(x) \quad =$

Aufgabe 11. Sei

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix X so dass $AX = E$.

$X \quad =$