Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 1

Studiengang:	ASE/IIT	Semester:	1
Hilfsmittel:	keine	Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) \quad = \quad \left(x_2, e^{x_1 + x_2}\right).$$

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls ja, berechnen Sie diese, falls nein begründen Sie weshalb keine Umkehrfunktion existiert.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\leq_{\mathbb{N}}$ die kleiner-gleich Relation auf $\mathbb{N}$. Berechnen Sie die Menge

$$A \quad = \quad \left(\{0,1,2\}^2 \setminus \leq_{\mathbb{N}}\right)^{-1}.$$

$A \ =$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n e^n \\ f(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ist die Folge $f(x_n)$ konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent? Berechnen Sie den (uneigentlichen) Grenzwert von $f(x_n)$ sofern er exisiert.

$f(x_n)$ ist
- ☐ konvergent
- ☐ bestimmt divergent
- ☐ unbestimmt divergent

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \; =$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei

$$f \in [-1,1] \to [0,\pi], \qquad f(x) \; = \; \arccos(x).$$

Bestimmen Sie alle x, an denen f differenzierbar ist und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

Hinweis: Für alle $x \in [-1,1]$ gilt

$$\cos(\arccos(x)) \quad = \quad x.$$

f ist differenzierbar an der Stelle x für

$f'(x) \; =$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ so dass

$$\frac{1-j}{e^{j\pi/4}} \quad = \quad re^{j\varphi}.$$

$r =$ $\qquad\qquad$ $\varphi =$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 von

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x^2+1}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von

$$f(x) \quad = \quad \frac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)}{x}.$$

$F(x) \quad =$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \quad = \quad e^{x+2}\cos(e^{x-1}+3).$$

$F(x) \quad =$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Berechnen Sie Konstanten $c_1, c_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ so dass

$$\frac{x-1}{x^2+2x+2} \quad = \quad \frac{c_1}{x-z_1} + \frac{c_2}{x-z_2}.$$

$c_1 =$	$c_2 =$	$z_1 =$	$z_2 =$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Euler Gleichung

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \operatorname{im}(e^{jx}) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) \\ \cos(x) &= \operatorname{re}(e^{jx}) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right) \end{aligned}$$

Entsprechend wird die sin- und cos-Funktion für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{jz} + e^{-jz}\right). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass damit auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$