Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 1

Studiengang:	ASE	Semester:	1
Hilfsmittel:	keine	Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 + e^x.$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für die Komposition $f \circ f$. Sie müssen den Funktionsterm nicht vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x^2 + e^x) \\ &= (x^2 + e^x)^2 + e^{x^2+e^x}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \qquad f(x) = e^{1/x}$$

ist bijektiv. Berechnen Sie einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie auch an, von wo nach wo f^{-1} abbildet.

Lösung von Aufgabe 2. Es gilt

$$f(x) = y \text{ genau dann wenn } f^{-1}(y) = x.$$

Da

$$f(x) = e^{1/x} = y$$

muss die Gleichung

$$e^{1/x} = y$$

nach x aufgelöst werden. Logarithmieren auf beiden Seiten ergibt

$$1/x = \ln(y)$$

und damit

$$x = \frac{1}{\ln(y)}.$$

Die Umkehrfunktion ist somit

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln(y)}.$$

Aufgabe 3. (5 Punkte) Definieren Sie wann eine Funktion $f \in A \to B$ injektiv ist.

Lösung von Aufgabe 3. $f \in A \to B$ heißt injektiv, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: Wenn $a_1 \neq a_2$ dann $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei

$$f \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Finden Sie zwei Folgen x_n und y_n, die beide gegen 1 konvergieren und für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -\infty.$$

Achten Sie darauf, dass $f(x_n)$ und $f(y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

Lösung von Aufgabe 4. Ein Beispiel ist

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitung der Funktion

$$f(x, y) = \frac{e^x + y}{e^{\sin(xy)}}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Zunächst wird $f(x, y)$ vereinfacht:

$$f(x, y) \quad = \quad (e^x + y)e^{-\sin(xy)}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= e^x e^{-\sin(xy)} + (e^x + y)e^{-\sin(xy)}(-\cos(xy))y \\
&= \frac{e^x - (e^x + y)\cos(xy)y}{e^{\sin(xy)}} \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= e^{-\sin(xy)} + (e^x + y)e^{-\sin(xy)}(-\cos(xy))x \\
&= \frac{1 - (e^x + y)\cos(xy)x}{e^{\sin(xy)}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie die Linearisierung der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = \pi/2$. Bringen Sie das Ergebnis auf die Form

$$\ell(x) = ax + b.$$

Lösung von Aufgabe 6. Ableitung mit Quotientenregel.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}.$$

Auswerten bei $\hat{x}$.

$$\begin{aligned} f(\pi/2) &= \frac{1}{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi} \\ f'(\pi/2) &= \frac{-1}{(\pi/2)^2} \\ &= -\frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Linearisierung.

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}(x - \pi/2) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4\pi/2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}x \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}x \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}x. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 \sin(x^2) - 1}{x}.$$

Lösung von Aufgabe 7. Vereinfachung von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \sin(x^2) - 1}{x} \\ &= x \sin(x^2) - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von

$$\int x \sin(x^2) dx$$

führt man eine Substitution durch:

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int x \sin(x^2) dx &= \int \frac{1}{2} \sin(u) du \\
&= -\frac{1}{2} \cos(u) + C \\
&= -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) - \ln(x) + C.$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2x^2 + x}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Mit Partialbruchzerlegung erhält man den Ansatz

$$\frac{1}{2x^2 + x} = \frac{1}{x(2x + 1)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x + 1}.$$

Multiplizieren mit dem Nenner auf beiden Seiten ergibt

$$\begin{aligned}
1 &= c_1(2x + 1) + c2x \\
1 &= x(2c_1 + c_2) + c_1.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= -2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{1}{2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x + 1}.$$

Eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^+$ ist

$$\ln(x) - \ln(2x + 1).$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \left(e^{1+j\pi/10}\right)^5.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}\left(e^{1+j\pi/10}\right)^5 &= e^{5(1+j\pi/10)}\\ &= e^{5+j\pi/2}\\ &= e^5 e^{j\pi/2}\\ &= e^5 j.\end{aligned}$$

Der Realteil ist somit 0, der Imaginärteil ist e^5.

Aufgabe 10. (5 Punkte) Sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Vektor $\vec{z}$, der senkrecht zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11. (10 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

Hinweis: Taylor Reihen.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-1}{x^2} &= \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots-1}{x^2}\\ &= \frac{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4!}-\ldots\\ &\to -\frac{1}{2} \text{ für } x \to 0.\end{aligned}$$