Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 1

Studiengang: ASE	Semester: 1
Hilfsmittel: keine	Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Name:	**Matrikelnr.:**
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) \quad = \quad (x\sin(y), y^2).$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für die Komposition $f \circ f$.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} f(f(x,y)) &= f(x\sin(y), y^2) \\ &= (x\sin(y)\sin(y^2), y^4) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Die Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$ ist bijektiv. Berechnen Sie eine Funktionsterm für die Umkehrfunktion von f.

Lösung von Aufgabe 2. Aus der Gleichung

$$y = 3^x$$

erhält man durch Umformen

$$\ln(y) = x\ln(3)$$

bzw.

$$x = \frac{\ln(y)}{\ln(3)}.$$

Damit ist

$$f^{-1}(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(3)}.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \quad = \quad \arctan\left(1/x\right).$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grezwert hat, indem Sie zwei Nullfolgen x_n, x'_n finden mit $x_n \neq 0$, $x'_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Begründen Sie dann *anschaulich*, weshalb die Funktion $|f(x)|$ einen Grenzwert bei $\hat{x} = 0$ hat und berechnen Sie diesen.

Lösung von Aufgabe 3. Sei z.B.

$$\begin{aligned} x_n &= 1/n \\ x'_n &= -1/n. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 1/x_n &= n \\ 1/x'_n &= -n. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \arctan(n) &= \pi/2 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \arctan(-n) &= -\pi/2. \end{aligned}$$

Für den Grenzwert von $|f(x)|$ bei $\hat{x} = 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| \quad = \quad \pi/2.$$

Anschauliche Begründung: Sei x_n eine beliebige Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle n. Dann ist der Wert von $1/x_n$ für große n eine große positive oder eine große negative Zahl. Folglich ist der Wert von $\arctan(1/x_n)$ entweder nah bei $\pi/2$ oder nah bei $-\pi/2$. In beiden Fällen ist dann aber der Betrag $|\arctan(1/x_n)|$ nah bei $\pi/2$.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$ von

$$f(x) \quad = \quad \sin(x^2).$$

Lösung von Aufgabe 4. Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2!} f''(0)(x-0)^2 \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Sei

$$z = a + jb.$$

Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von $e^{\overline{z}}$.

Lösung von Aufgabe 5. Sei $z = a + jb$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{\overline{z}} &= e^{\overline{a+jb}} \\ &= e^{a-jb} \\ &= e^a e^{-jb} \\ &= e^a(\cos(b) - j\sin(b)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(e^{\overline{z}}) &= e^a \cos(b) \\ \mathrm{im}(e^{\overline{z}}) &= -e^a \sin(b). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen von

$$z^3 - 1 - j = 0.$$

Lösung von Aufgabe 6. Umformen.

$$z^3 = 1 + j.$$

Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} 1 + j &= \sqrt{2} e^{j\pi/4} \\ z &= re^{j\varphi} \\ z^3 &= r^3 e^{j3\varphi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} r^3 &= \sqrt{2} \\ r &= 2^{1/6} \\ \varphi &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right). \end{aligned}$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{1/6}e^{j\pi/12} \\ z_2 &= 2^{1/6}e^{j3\pi/4} \\ z_3 &= 2^{1/6}e^{j17\pi/12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie

$$\mathrm{re}(\ln(1+j))$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned} 1+j &= \sqrt{2}e^{j\pi/4} \\ \ln(1+j) &= \ln(\sqrt{2}e^{j\pi/4}) \\ &= \ln(\sqrt{2}) + j\pi/4 \\ \mathrm{re}(\ln(1+j)) &= \ln(\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Faktorisierung des Nenners:

$$x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{x+1} \\ x^2+1 &= c_1(x-1)(x+1) + c_2x(x+1) + c_3x(x-1) \end{aligned}$$

- Aus dem Spezialfall $x = 0$ folgt $c_1 = -1$.
- Aus dem Spezialfall $x = 1$ folgt

$$\begin{aligned} 2 &= 2c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

- Aus dem Spezialfall $x = -1$ folgt

$$\begin{aligned} 2 &= 2c_3 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

und

$$F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|.$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Lösung von Aufgabe 9. Subsitution

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sin(x)}{x} \\ \frac{dg}{dx} &= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \\ dx &= \frac{x^2}{x\cos(x) - \sin(x)} dg. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &\int \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} dx \\ &= \int \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \frac{x^2}{x\cos(x) - \sin(x)} dg \\ &= \int 1 dg \\ &= g + C \\ &= \frac{\sin(x)}{x} + C. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist somit

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & 4 & 2 & 6 \\
1 & 4 & 3 & 7 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 4 & 3 & 7 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
 & 2 & 2 & 4 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 \\
 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}
x_3 &= \text{beliebig} \\
x_2 &= 2 - x_3 \\
x_1 &= 3 - 2x_2 - x_3 \\
&= 3 - 2(2 - x_3) - x_3 \\
&= x_3 - 1
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 1 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$