Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 1

Studiengang:	ASE	Semester:	1
Hilfsmittel:	keine	Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

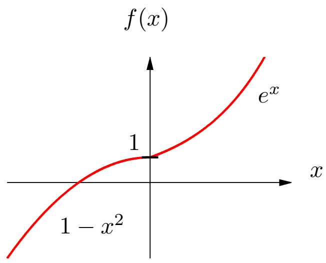
- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{falls } x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f.

Lösung von Aufgabe 1. Die Aufgabe lässt sich am einfachsten lösen wenn man $f(x)$ zeichnet.



Für $y \geq 1$ erhält man das x mit $f(x) = y$ durch

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ x &= \ln(y). \end{aligned}$$

Für $y < 1$ erhält man das x mit $f(x) = y$ durch

$$\begin{aligned} y &= 1 - x^2 \text{ mit } x < 0 \\ x^2 &= 1 - y \\ x &= -\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

Damit ist $f^{-1} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \ln(y) & \text{falls } y \geq 1 \\ -\sqrt{1-y} & \text{falls } y < 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei

$$\begin{aligned} &f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, && f(x,y) = \frac{\sqrt{\sin(y)}}{x} \\ &g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, && g(x) = \left(\frac{1}{x}, \ln(x+1)\right). \end{aligned}$$

Berechnen Sie je einen Funktionsterm für die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$. Geben Sie auch die Signaturen der Funktionen an.

Lösung von Aufgabe 2. $f \circ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{x}, \ln(x+1)\right) \\ &= \frac{\sqrt{\sin(\ln(x+1))}}{1/x} \end{aligned}$$

$g \circ f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g\left(\frac{\sqrt{\sin(y)}}{x}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\sin(y)}}, \ln\left(\frac{\sqrt{\sin(y)}}{x} + 1\right)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Die Funktion

$$f(x) = \sin(|x|)$$

ist an der Stelle $\hat{x} = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Beweisen Sie dies, indem Sie zwei Nullfolgen Δx_n und $\Delta x'_n$ finden so dass die Folgen

$$y_n = \frac{f(\hat{x} + \Delta x_n) - f(\hat{x})}{\Delta x_n} \quad \text{und} \quad y'_n = \frac{f(\hat{x} + \Delta x'_n) - f(\hat{x})}{\Delta x'_n}$$

unterschiedliche Grenzwerte haben. Hinweis: Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Lösung von Aufgabe 3. Sei

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= 1/n\\ \Delta x'_n &= -1/n.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{\sin(|\hat{x}+\Delta x_n|)-\sin(|\hat{x}|)}{\Delta x_n}\\ &= \frac{\sin(|1/n|)}{1/n}\\ &= \frac{\sin(1/n)}{1/n}\\ y'_n &= \frac{\sin(|\hat{x}+\Delta x'_n|)-\sin(|\hat{x}|)}{\Delta x'_n}\\ &= \frac{\sin(|-1/n|)}{-1/n}\\ &= -\frac{\sin(1/n)}{1/n}.\end{aligned}$$

Foglich ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= 1\\ \lim_{n\to\infty} y'_n &= -1.\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 von

$$f(x) = x\sin(x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x}=\pi$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin(x) + x\cos(x)\\ f''(x) &= \cos(x)+\cos(x) - x\sin(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)\end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x}=\pi$.

$$\begin{aligned}f(\hat{x}) &= 0\\ f'(\hat{x}) &= -\pi\\ f''(\hat{x}) &= -2\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x-\hat{x}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x})(x-\hat{x})^2 \\ &= -\pi(x-\pi) + \frac{1}{2}(-2)(x-\pi)^2 \\ &= -\pi x + \pi^2 - (x^2 - 2\pi x + \pi^2) \\ &= -\pi x + \pi^2 - x^2 + 2\pi x - \pi^2 \\ &= \pi x - x^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \pi, \qquad a_2 = -1.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von

$$f(x) = x^2 e^x,$$

die die Zusatzbedingung $F(0) = 0$ erfüllt.

Lösung von Aufgabe 5. Mit zweimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 e^x dx \\ &= x^2 e^x - \int 2xe^x \\ &= x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

Die Zusatzbedingung $F(0) = 0$ ist erfüllt wenn

$$\begin{aligned} 2 + C &= 0 \\ C &= -2. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Stammfunktion

$$F(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

Lösung von Aufgabe 6. Substitution

$$g = x + 1, \qquad \frac{dg}{dx} = 1, \qquad dx = dg, \qquad x = g - 1$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{(g-1)^2}{g^2} dg \\
&= \int \frac{g^2 - 2g + 1}{g^2} dg \\
&= \int \left(1 - \frac{2}{g} + \frac{1}{g^2}\right) dg \\
&= g - 2\ln|g| - \frac{1}{g} \\
&= x + 1 - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a+b)x\big) + \cos\big((a-b)x\big)\Big).$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}
\cos(ax)\cos(bx) &= \frac{1}{2}(e^{jax} + e^{-jax})\frac{1}{2}(e^{jbx} + e^{-jbx}) \\
&= \frac{1}{4}\big(e^{jax}e^{jbx} + e^{jax}e^{-jbx} + e^{-jax}e^{jbx} + e^{-jax}e^{-jbx}\big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{j(a+b)x} + e^{j(a-b)x} + e^{-j(a-b)x} + e^{-j(a+b)x}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{j(a+b)x} + e^{-j(a+b)x} + e^{j(a-b)x} + e^{-j(a-b)x}\Big) \\
&= \frac{1}{4}(2\cos((a+b)x) + 2\cos((a-b)x)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z+1)^3 = 1 + j.$$

Lösung von Aufgabe 8. Seien r, φ die Polarkoordinaten von $z+1$, d.h.

$$z + 1 = re^{j\varphi}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(re^{j\varphi})^3 &= \sqrt{2}e^{j\pi/4} \\
r^3 e^{j3\varphi} &= 2^{1/2}e^{j\pi/4}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
r &= 2^{1/6} \\
3\varphi &= \pi/4 + 2k\pi \\
\varphi &= \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$z + 1 = \sqrt[6]{2}e^{j\pi(1/12+2k/3)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Die Lösungen der Gleichung sind

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{2}e^{j\pi/12} - 1 \\
z_2 &= \sqrt[6]{2}e^{j\pi 9/12} - 1 \\
z_3 &= \sqrt[6]{2}e^{j\pi 17/12} - 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Sei

$$z = \frac{\sqrt{2+2j}}{e^{j\pi/8}(1-j)^4}.$$

Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von z.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\sqrt{2(1+j)}}{e^{j\pi/8}\left(\sqrt{2}e^{-j\pi/4}\right)^4} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^{1/2}}{e^{j\pi/8}4e^{-j\pi}} \\
&= \frac{2^{3/4}e^{j\pi/8}}{-4e^{j\pi/8}} \\
&= \frac{2^{3/4}}{-4} \\
&= -2^{3/4}2^{-2} \\
&= -2^{-5/4} \\
&= -\frac{1}{\sqrt[4]{32}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(z) &= -\frac{1}{\sqrt[4]{32}} \\
\mathrm{im}(z) &= 0 \\
|z| &= \frac{1}{\sqrt[4]{32}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) = \frac{2x-6}{x^2-2x+5}.$$

Lösung von Aufgabe 10. Nullstellen des Nenners.

$$\begin{aligned} x^2-2x+5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4j}{2} \\ &= 1 \pm 2j. \end{aligned}$$

Damit ist

$$x^2-2x+5 = (x-(1+2j))(x-(1-2j)).$$

Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{2x-6}{x^2-2x+5} &= \frac{c_1}{x-(1+2j)} + \frac{c_2}{x-(1-2j)} \\ 2x-6 &= c_1(x-(1-2j)) + c_2(x-(1+2j)). \end{aligned}$$

Spezialfall $x = 1+2j$:

$$\begin{aligned} 2(1+2j)-6 &= c_1(1+2j-(1-2j)) \\ -4+4j &= 4jc_1 \\ c_1 &= \frac{-4+4j}{4j} = \frac{-1+j}{j} = 1+j \end{aligned}$$

Spezialfall $x = 1-2j$:

$$\begin{aligned} 2(1-2j)-6 &= c_2(1-2j-(1+2j)) \\ -4-4j &= -4jc_1 \\ c_1 &= \frac{-4-4j}{-4j} = \frac{1+j}{j} = 1-j \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = \frac{1+j}{x-(1+2j)} + \frac{1-j}{x-(1-2j)}.$$

Aufgabe 11. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix X so dass $AX = E$.

Lösung von Aufgabe 11. X ist die Inverse von A, die sich mit dem Gauß Algorithmus berechnen lässt.

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2
\end{array}$$

Damit ist

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$