Leistungsnachweis Mathematik 1

Studiengang: ASE/IIT	Semester: 1
Hilfsmittel: keine	Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Name:	Matrikelnr.:
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = (x_2, e^{x_1+x_2}).$$

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls ja, berechnen Sie diese, falls nein begründen Sie weshalb keine Umkehrfunktion existiert.

Lösung von Aufgabe 1. Damit eine Umkehrfunktion existiert, muss für jedes Paar $(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ genau ein Paar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existieren so dass

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$$

bzw.

$$(y_1, y_2) = (x_2, e^{x_1+x_2}).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1 \\ e^{x_1+x_2} &= y_2. \end{aligned}$$

Da $y_2 \in \mathbb{R}^+$ kann man logarithmieren und erhält aus der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ln(y_2) \\ x_1 &= \ln(y_2) - x_2 = \ln(y_2) - y_1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$(x_1, x_2) = (\ln(y_2) - y_1, y_1)$$

die eindeutige Lösung der o.g. Gleichung. Folglich ist die Funktion bijektiv mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f^{-1}(y_1, y_2) = (\ln(y_2) - y_1, y_1).$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\leq_{\mathbb{N}}$ die kleiner-gleich Relation auf $\mathbb{N}$. Berechnen Sie die Menge

$$A = (\{0, 1, 2\}^2 \setminus \leq_{\mathbb{N}})^{-1}.$$

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} \{0, 1, 2\}^2 &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), \dots, (2, 2)\} \\ \{0, 1, 2\}^2 \setminus \leq_{\mathbb{N}} &= \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\} \\ (\{0, 1, 2\}^2 \setminus \leq_{\mathbb{N}})^{-1} &= \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n e^n \\ f(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ist die Folge $f(x_n)$ konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent? Berechnen Sie den (uneigentlichen) Grenzwert von $f(x_n)$ sofern er existiert.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{(-1)^n e^n} = (-1)^n e^{-n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei

$$f \in [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad f(x) = \arccos(x).$$

Bestimmen Sie alle x , an denen f differenzierbar ist und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

Hinweis: Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\cos(\arccos(x)) = x.$$

Lösung von Aufgabe 4. Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

bzw.

$$\cos(f(x)) = x.$$

Ableiten auf beiden Seiten ergibt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} -\sin(f(x))f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{\sin(f(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist jedoch nur definiert wenn der Nenner ungleich 0 ist, d.h.

$$\arccos(x) \neq 0 \text{ und } \arccos(x) \neq \pi.$$

Dies ist genau dann der Fall wenn

$$x \neq \pm 1.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ so dass

$$\frac{1-j}{e^{j\pi/4}} = re^{j\varphi}.$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} \frac{1-j}{e^{j\pi/4}} &= (1-j)e^{-j\pi/4} \\ &= \sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{-j\pi/4} \\ &= \sqrt{2}e^{-j\pi/2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$r = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 von

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + 1)^{-1} \\f'(x) &= -(x^2 + 1)^{-2} 2x = -2x(x^2 + 1)^{-2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \\f''(x) &= -2((x^2 + 1)^{-2} + x(-2)(x^2 + 1)^{-3} 2x) = -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{8x^2}{(x^2 + 1)^3}\end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 1$ ergibt

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{1}{2} \\f'(1) &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\f''(1) &= -\frac{2}{4} + \frac{8}{8} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$\begin{aligned}p(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2 \\&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 \\&= \frac{1}{4}(2 - (2x - 2) + (x - 1)^2) \\&= \frac{1}{4}(-2x + 4 + x^2 - 2x + 1) \\&= \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 5)\end{aligned}$$

Damit ist

$$a_0 = \frac{5}{4}, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von

$$f(x) = \frac{\sin(\ln(\sqrt{x}))}{x}.$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$f(x) = \frac{\sin(\ln(\sqrt{x}))}{x} = \frac{\sin(\ln(x^{1/2}))}{x} = \frac{\sin(1/2 \ln(x))}{x}.$$

Substitution

$$u = \frac{1}{2} \ln(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad dx = 2x du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(1/2 \ln(x))}{x} dx &= \int \frac{\sin(u)}{x} 2x du \\ &= 2 \int \sin(u) du \\ &= -2 \cos(u) \\ &= -2 \cos(1/2 \ln(x)) \\ &= -2 \cos(\ln(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = e^{x+2} \cos(e^{x-1} + 3).$$

Lösung von Aufgabe 8. Substitution

$$u = e^{x-1} + 3, \quad \frac{du}{dx} = e^{x-1}, \quad dx = \frac{1}{e^{x-1}} du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int e^{x+2} \cos(e^{x-1} + 3) dx &= \int e^{x+2} \cos(u) \frac{1}{e^{x-1}} du \\ &= \int e^x e^2 \cos(u) \frac{1}{e^x e^{-1}} du \\ &= \int e^2 e^1 \cos(u) du \\ &= e^3 \int \cos(u) du \\ &= e^3 \sin(u) \\ &= e^3 \sin(e^{x-1} + 3).\end{aligned}$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Berechnen Sie Konstanten $c_1, c_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ so dass

$$\frac{x-1}{x^2+2x+2} = \frac{c_1}{x-z_1} + \frac{c_2}{x-z_2}.$$

Lösung von Aufgabe 9. Faktorisierung des Nenners.

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm j.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}z_1 &= -1 + j \\ z_2 &= -1 - j.\end{aligned}$$

Ansatz der Partialbruchzerlegung.

$$\frac{x-1}{(x-(-1+j))(x-(-1-j))} = \frac{c_1}{x-(-1+j)} + \frac{c_2}{x-(-1-j)}$$

$$x-1 = c_1(x-(-1-j)) + c_2(x-(-1+j)).$$

Spezialfall $x = -1 + j$.

$$\begin{aligned} -1+j-1 &= c_1(-1+j-(-1-j)) \\ -2+j &= 2jc_1 \\ c_1 &= \frac{-2+j}{2j} = \frac{1}{2}(1+2j) = \frac{1}{2} + j. \end{aligned}$$

Spezialfall $x = -1 - j$.

$$\begin{aligned} -1-j-1 &= c_2(-1-j-(-1+j)) \\ -2-j &= -2jc_2 \\ c_2 &= \frac{2+j}{2j} = \frac{1}{2}(1-2j) = \frac{1}{2} - j. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{x-1}{x^2+2x+2} = \frac{1/2+j}{x-(-1+j)} + \frac{1/2-j}{x-(-1-j)}$$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Euler Gleichung

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \operatorname{im}(e^{jx}) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \\ \cos(x) &= \operatorname{re}(e^{jx}) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \end{aligned}$$

Entsprechend wird die sin- und cos-Funktion für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass damit auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \frac{1}{4}(e^{jz} + e^{-jz})^2 - \frac{1}{4}(e^{jz} - e^{-jz})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2jz} + e^{-2jz} + 2e^{jz}e^{-jz} - (e^{2jz} + e^{-2jz} - 2e^{jz}e^{-jz})) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2jz} + e^{-2jz} + 2 - e^{2jz} - e^{-2jz} + 2) \\ &= \frac{1}{4}4 \\ &= 1.\end{aligned}$$