

Mathematik 1

Skript zur Vorlesung an der Hochschule Heilbronn

(Stand: 1. Juni 2025)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1	Definitionen, Theoreme, Beweise	5
2	Terme	7
3	Aussagenlogik	11
3.1	Aussagenlogische Funktionen	11
3.2	Rechengesetze für aussagenlogische Funktionen	13
4	Mengen	15
4.1	Motivation	15
4.2	Zahlenmengen	17
4.3	Teilmengen	18
4.4	Mengengleichheit	21
4.5	Aufzählende und beschreibende Form einer Menge	22
4.6	Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Mengendifferenz	24
5	Paare	27
6	Tupel	29
7	Kartesische Produkte	30
8	Relationen	33
9	Funktionen	35
9.1	Beispiele	35
9.2	Definition des Begriffs Funktion	38
9.3	Funktionsterme	39
9.4	Komposition von Funktionen	41
9.5	Injektiv, Surjektiv, Bijektiv	44
9.6	Umkehrfunktion	48
10	Folgen	54
10.1	Nullfolgen	56
10.2	Konvergente Folgen	58
10.3	Rechengesetze für konvergente Folgen	60
10.4	Bestimmt divergente Folgen	61
10.5	Funktionen von Folgen	63
11	Grenzwert von Funktionen	65
11.1	Veranschaulichung	66
11.2	Formale Definition	71
11.3	Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen	72
12	Stetigkeit	73

13 Differentialrechnung	76
13.1 Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigung	76
13.2 Beispiele für Ableitungen	78
13.3 Differentialnotation	83
13.4 Ableitungsregeln	86
13.5 Höhere Ableitungen	94
13.6 Partielle Ableitungen	95
14 Linearisierung	96
15 Taylor Polynome	99
15.1 Herleitung des Taylor Polynoms	100
15.2 Fehlerabschätzung	104
15.3 Taylor Reihen	106
16 Integralrechnung	108
16.1 Stammfunktion als Umkehrung der Ableitung	108
16.2 Stammfunktionen elementarer Funktionen	110
16.3 Flächenberechnung durch Diskretisierung und Grenzwert	111
16.4 Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Fläche	113
16.5 Bestimmtes Integral	118
16.6 Unbestimmtes Integral	121
16.7 Beispiele für bestimmte Integrale	123
16.8 Integrationsregeln	126
17 Komplexe Zahlen	141
17.1 Motivation	141
17.2 Menge der komplexen Zahlen	143
17.3 Komplexe Ebene	145
17.4 Division von komplexen Zahlen	147
17.5 Polarkoordinaten	149
17.6 Komplexe e -Funktion	152
17.7 Rechnen in Polarkoordinaten	155
17.8 Komplexe Wurzel	158
17.9 Potenzrechnen	162
17.10 Komplexer Logarithmus	163
18 Polynome und rationale Funktionen	165
18.1 Komplexe Nullstellen von Polynomen	165
18.2 Horner Schema	168
18.3 Faktorisierung	171
18.4 Polynomdivision	172
18.5 Partialbruchzerlegung	174
19 Vektoren	180
19.1 Darstellung von Vektoren	180
19.2 Rechenoperationen auf Vektoren	185
19.3 Winkel zwischen Vektoren	195
19.4 Geraden	199
19.5 Ebenen im Anschauungsraum und Kreuzprodukt	202

20 Lineare Gleichungssysteme	209
20.1 Vektorielle Darstellung	211
20.2 Zeilenstufenform	212
20.3 Gauß Algorithmus	216
21 Matrizen	220
21.1 Addition und skalare Multiplikation	221
21.2 Matrix Vektor Multiplikation	223
21.3 Matrix-Matrix Multiplikation	228
21.4 Inverse Matrix	232
21.5 Eindeutigkeit der inversen Matrix*	237
21.6 Transponierte Matrix	238
21.7 Orthogonale Matrizen	241
22 Vektorräume	243
22.1 Abgeschlossenheit	243
22.2 Lineare Unabhängigkeit	246
22.3 Basis und Dimension von Vektorräumen	253
23 Lineare Funktionen	259
23.1 Definition einer linearen Funktion	260
23.2 Beispiele zu linearen Funktionen	261
23.3 Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und Matrizen	264
23.4 Abschlusseigenschaften linearer Funktionen	269

1 Definitionen, Theoreme, Beweise

In der Mathematik gibt es viele Begriffe wie z.B. Funktion, Ableitung, Polynom, usw. Ich bin überzeugt, dass Mathematik oft nur deshalb schwierig erscheint, weil die Bedeutung der Begriffe nicht richtig klar ist.

Der Zweck einer **Definition** ist es, einen Begriff einfach und unmissverständlich zu erklären. Zum Beispiel wird der Begriff "Polynom" wie folgt definiert:

Definition 1.1 (Polynom)

Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn es Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \neq 0$ so dass

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man kann so eine Definition natürlich nur verstehen, wenn die Begriffe, die in der Definition auftreten, vorher bereits definiert wurden und klar sind. Wenn man nicht weiß, was eine Funktion ist, fängt man mit dieser Definition nichts an. Die Begriffe in der Mathematik bauen aufeinander auf und es ist daher wichtig, eine Definition gut verstanden zu haben, bevor man weitergeht.

Ein **Theorem** ist eine wahre Aussage. Es gibt natürlich unendlich viele wahre Aussagen, aber einige davon sind für uns besonders relevant, wie z.B. häufig benutzte Rechengesetze. Es lohnt sich daher, solche Aussagen kurz und prägnant in einem Theorem festzuhalten, zum Beispiel:

Theorem 1.2

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Theoreme sollte man nicht blind auswendig lernen und glauben. Man sollte vielmehr in der Lage sein, zu begründen warum sie wahr sind. Solche Erklärungen nennt man **Beweis**. In einem Beweis darf man bekanntes Wissen verwenden und muss daraus die Aussage des Theorems logisch herleiten. Ein Beweis für o.g. Theorem könnte wie folgt aussehen:

Beweis.

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)}_{n\text{mal}} \\ &= \underbrace{aa\dots a}_{n\text{mal}} \underbrace{bb\dots b}_{n\text{mal}} \\ &= a^n b^n. \end{aligned}$$

In diesem Beweis wurden bekannte Rechengesetze verwendet wie das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz, wonach die Reihenfolge der Faktoren in

einem Produkt vertauscht und die Klammern weggelassen werden dürfen. Ähnlich wie Definitionen bauen somit auch Theoreme aufeinander auf und es ist daher wichtig, keine Lücken zu lassen. Weiterhin werden in Beweisen auch Definitionen verwendet. In o.g. Beispiel haben wir die Definition der Potenzfunktion verwendet, wonach a^n die n -fache Multiplikation von a mit sich selbst bedeutet.

Wenn man auf ein Theorem stößt, das man nicht beweisen kann, ist das ein Zeichen, dass man etwas noch nicht gut genug verstanden hat. Lassen Sie sich also kein Theorem entgehen ohne es zu beweisen — das ist die beste Lernkontrolle!

2 Terme

Terme sind “Rechenausdrücke” mit denen wir ständig hantieren. Beispiele für Terme sind

$$\begin{aligned} x + 3 \\ \sin(x)^2 \\ 7 \\ \frac{\max(3,y)}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Keine Terme sind hingegen

$$\begin{aligned} x + 1 = 3 \\ 2 < 3 \\ \sin(x, y) \\ + \sin + 7 \end{aligned}$$

Terme sind Zeichenketten mit einer bestimmten Struktur. Die Symbole, die in einem Term auftreten dürfen, können wie folgt kategorisiert werden:

- **Konstantensymbole** sind Symbole mit einer festen Bedeutung wie z.B. 7 oder π .
- **Variablensymbole** wirken als Platzhalter. Verwendet werden oft Buchstaben wie a, b, c, x, y , usw. Ein Variablensymbol unterscheidet sich von einem Konstantensymbol dadurch, dass es keine festgelegte Bedeutung hat.
- **Funktionssymbole** wie z.B. \sin oder $+$. Von jedem Funktionssymbol ist festgelegt, wie viele Argumente es nimmt. So ist \sin ein einstelliges Funktionssymbol und $+$ ein zweistelliges. Leider hat man sehr viel Energie investiert, Funktionssymbole möglichst phantasievoll und unleserlich zu schreiben. So ist auch das Wurzelsymbol, der Bruchstrich oder das Hochstellen eines Exponenten ein Funktionssymbol, auch wenn es als solches kaum erkennbar ist.
- **Hilfssymbole** wie Klammern und Kommas, die man für die Argumentliste eines Funktionssymbols braucht wie z.B. in $\max(3, y)$.

Andere Symbole dürfen in einem Term nicht auftreten. Insbesondere sind z.B. $=$ und $<$ keine Funktionssymbole sondern Relationssymbole. Damit ist auch klar, dass $2 < 3$ kein Term ist.

Nicht jede Aneinanderreihung dieser Symbole ergibt einen Term. So ist z.B. $+ \sin + 7$ kein Term, obwohl alle Symbole in die o.g. Kategorien fallen. Wann eine Zeichenkette ein Term ist, wird durch folgende Regeln festgelegt.

- Jedes Konstantensymbol und jedes Variablensymbol ist ein Term.
- Sind t_1, \dots, t_n Terme und ist f ein n -stelliges Funktionssymbol, dann ist auch

$$f(t_1, \dots, t_n)$$

ein Term.

Ok, das kam überraschend. Vereinfachen wir die Situation, indem wir vorläufig nur ganz wenige Symbole zulassen und damit Terme bauen:

- Konstantensymbole: $1, 2, 3$
- Variablensymbole: x, y
- Funktionssymbole: f zweistellig und g einstellig.

Unter Verwendung der ersten Regel ist klar, dass $1, 2, 3, x, y$ Terme sind. Da f ein zweistelliges Funktionssymbol ist und x und 3 Terme sind, ist laut zweiter Regel auch $f(x, 3)$ ein Term. Da g ein einstelliges Funktionssymbol ist und $f(x, 3)$ ein Term ist, ist wiederum $g(f(x, 3))$ ein Term. Und so weiter — obwohl wir nur endlich viele Symbole haben, können wir trotzdem unendlich viele Terme damit erzeugen. Vergewissern Sie sich, dass Sie verstanden haben, weshalb

$$f(x, g(f(1, x)))$$

ein Term ist und

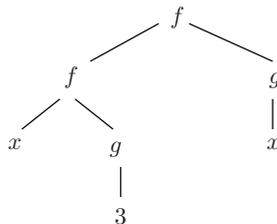
$$g(x, f(x, 1))$$

kein Term ist.

Die Struktur eines Terms lässt sich sehr übersichtlich durch einen Baum darstellen. Der Term

$$f(f(x, g(3)), g(x))$$

sieht als Baum so aus:



An den Knoten des Baums stehen Funktionssymbole, an den Blättern Variablen- und Konstantensymbole. Die Anzahl Nachfolger in einem Knoten ist gleich der Stelligkeit des zugehörigen Funktionssymbols. Die Baumdarstellung ist übersichtlicher und man benötigt keine Klammern. Außerdem ist in der Baumstruktur codiert, wie der Term “zusammengebaut” wurde.

Greift man in dem Baum ein Blatt bzw. einen Knoten mit allem was darunter hängt heraus, erhält man einen Teilbaum bzw. einen Teilterm. Teilterme sind im obigen Beispiel $x, 3, g(3), g(x), f(x, g(3))$ und $f(f(x, g(3)), g(x))$. Das Analysieren eines Terms, d.h. das Zerlegen in Teilterme ist u.a. für das Anwenden von Rechengesetzen erforderlich.

Lassen wir nun wieder alle handelsüblichen Symbole zu. Eingangs hatten wir gesagt, dass $x + 3$ ein Term ist. Fest steht, dass x ein Variablensymbol, 3 ein Konstantensymbol und $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist. Nach unseren Regeln müsste folglich

$$+(x, 3)$$

ein Term sein. Das ist auch völlig korrekt, nur sieht es halt einfach nicht so schick aus wie $x + 3$. Statt $+(x, 3)$ wie es richtig wäre, schreibt man bei zweistelligen Funktionssymbolen das Funktionssymbol zwischen die Argumente und spart sich so ein Klammernpaar. Man nennt dies Infixnotation. Was zunächst wie eine gute Idee klingt, rächt sich bitter. Statt

$$+(x, \times(2, y))$$

schreibt man Infix

$$x + 2 \times y.$$

In dieser Notation ist aber zunächst unklar, ob man $(x + 2) \times y$ meint oder $x + (2 \times y)$. Man benötigt also wieder Klammern oder aber zusätzliche Regeln wie Punkt vor Strich. In der Baumdarstellung würde dieses Problem ebenfalls nicht auftreten.

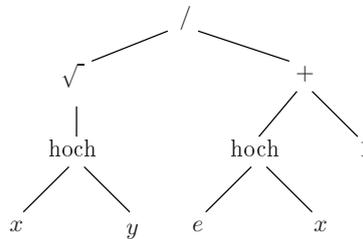


Lassen Sie sich von den exotischen Funktionssymbolen nicht verwirren. Der Term

$$\frac{\sqrt{x^y}}{e^x + 1}$$

sieht zwar wild aus, hat aber genau die gleiche, einfache Baumstruktur:

$$/(\sqrt{(\text{hoch}(x, y)), +(\text{hoch}(e, x), 1)})$$



Abschließend noch eine Denksportaufgabe. Ist

$$1 + 1 = 2$$

wahr oder falsch?

Tatsächlich ist die Antwort nicht so einfach. Auf beiden Seiten der Gleichung steht ein Term. Links der Term $1 + 1$, rechts der Term 2 . Sind die beiden Terme gleich? Erinnern wir uns, dass ein Term eine Zeichenkette ist. Offensichtlich ist die Zeichenkette $1 + 1$ und die Zeichenkette 2 nicht gleich, sie sind ja noch nicht einmal gleich lang. Wäre Ihr Passwort $1+1$, würden Sie mit 2 nicht durchkommen. Andererseits kann man aber natürlich argumentieren, dass der *Wert* des Terms $1 + 1$ gleich dem *Wert* des Terms 2 ist.

Solange man nur Zeichenketten ohne jede Bedeutung betrachtet, spricht man von der **Syntax**. Die Bedeutung von Zeichenketten ist deren **Semantik**. Die korrekte Antwort auf o.g. Frage ist somit, dass die Terme syntaktisch ungleich sind, semantisch jedoch gleich. Wenn wir Terme vereinfachen, d.h. "rechnen", bedeutet das nichts anderes als dass wir einen Term durch einen anderen Term ersetzen, der syntaktisch idealerweise einfacher ist, aber semantisch gleich.

Bücher bestehen ausschließlich aus Zeichenketten, d.h. Syntax. Wenn Sie ein Buch lesen, führen Sie im Kopf den Übergang zur Semantik durch, d.h. "verstehen" was geschrieben ist. Dass hier tatsächlich ein Prozess stattfindet, merken Sie wenn Sie ein Buch in einer fremden Sprache zu lesen versuchen. Kommunikation zwischen Menschen findet immer über ein Medium statt, sei es Text oder gesprochene Sprache. Dies sind letztlich Zeichenketten, egal ob in geschriebener oder gesprochener Form. Wir springen also ständig zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene hin und her und natürlich entstehen Verluste bei beim Übergang von Semantik zu Syntax beim Sender (Codierung) und umgekehrt beim Empfänger (Decodierung).

3 Aussagenlogik

3.1 Aussagenlogische Funktionen

In der Aussagenlogik beschäftigt man sich mit Wahrheitswerten wahr, falsch und den folgenden Funktionen auf Wahrheitswerten:

- und \wedge
- oder \vee
- nicht \neg
- wenn-dann \rightarrow
- genau dann wenn \leftrightarrow .

Da es nur zwei Wahrheitswerte gibt, lassen sich diese Funktionen sehr einfach durch eine Tabelle definieren.

Definition 3.1 (Aussagenlogische Funktionen)

<i>F</i>	<i>G</i>	<i>F</i> \wedge <i>G</i>	<i>F</i> \vee <i>G</i>	<i>F</i> \rightarrow <i>G</i>	<i>F</i> \leftrightarrow <i>G</i>
<i>wahr</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>
<i>wahr</i>	<i>falsch</i>	<i>falsch</i>	<i>wahr</i>	<i>falsch</i>	<i>falsch</i>
<i>falsch</i>	<i>wahr</i>	<i>falsch</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>	<i>falsch</i>
<i>falsch</i>	<i>falsch</i>	<i>falsch</i>	<i>falsch</i>	<i>wahr</i>	<i>wahr</i>

<i>F</i>	\neg <i>F</i>
<i>wahr</i>	<i>falsch</i>
<i>falsch</i>	<i>wahr</i>

Während die aussagenlogischen Funktionen \wedge , \vee , \neg dem entsprechen, wie wir und, oder, nicht im alltäglichen Sprachgebrauch verwenden, macht \rightarrow Probleme. Es ist klar, dass die Aussage

Die Erde ist rund und der Mond ist eine Scheibe

falsch ist, aber warum sollte die Aussage

Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist der Mond rund

wahr sein?

Eine Definition muss keinen "Sinn" machen, sie legt lediglich fest, was die Bedeutung eines Begriffs ist, in diesem Fall von \rightarrow . Die Verwirrung kommt daher, dass wir im natürlichen Sprachgebrauch ebenfalls wenn-dann verwenden, allerdings mit einer anderen Bedeutung als in der Mathematik. Ich werde Sie aber

gleich davon überzeugen, dass die mathematische Definition durchaus sinnvoll ist.

Nehmen wir die Aussage

Wenn Sie Ihre Hausaufgaben machen, dann bestehen Sie die Prüfung,

die sich in zwei Teilaussagen zerlegen lässt:

F : Sie machen Ihre Hausaufgaben.

G : Sie bestehen die Prüfung.

Wenn ich behaupte, dass $F \rightarrow G$ wahr ist, können Sie aus o.g. Wahrheitstabelle schließen, dass es nur 3 Möglichkeiten gibt

F wahr, G wahr

F falsch, G wahr

F falsch, G falsch.

Es kann aber nicht sein, dass F wahr ist und G falsch, denn dann wäre $F \rightarrow G$ falsch. Nach meiner Aussage hätten Sie auch nur in diesem Fall einen Grund, sauer zu sein.

Zwei Punkte sollte man sich über wenn-dann merken:

- $F \rightarrow G$ ist immer wahr, außer in dem einen Fall wenn F wahr und G falsch ist.
- Wenn F falsch ist, dann ist $F \rightarrow G$ immer wahr, unabhängig davon ob G wahr oder falsch ist.

3.2 Rechengesetze für aussagenlogische Funktionen

Analog zu den Rechengesetzen für Addition und Multiplikation wie z.B. das Distributivgesetz

$$(a + b)c = ac + bc$$

gibt es auch einige Rechengesetze für aussagenlogische Funktionen. Ein Beispiel ist das Gesetz von de Morgan

$$\neg(F \wedge G) = (\neg F) \vee (\neg G).$$

Der Beweis von Rechengesetzen von aussagenlogischen Funktionen ist denkbar einfach. Da es nur je zwei Möglichkeiten für F und G gibt, muss man lediglich alle vier Kombinationen ausprobieren und prüfen, ob in jedem Fall auf beiden Seiten das Gleiche rauskommt. Bei Gesetzen auf Zahlen ist das nicht möglich, da es ja unendlich viele Zahlen gibt. Rechnen wir also alle Fälle aus und stellen dies in einer Wahrheitstabelle dar.

F	G	$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F) \vee (\neg G)$
wahr	wahr	falsch	falsch
wahr	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr

Fertig ist unser erster Beweis!

Die wichtigsten Rechengesetze der Aussagenlogik fassen wir in folgendem Theorem zusammen.

Theorem 3.2 (Rechengesetze der Aussagenlogik)

Für alle Wahrheitswerte F, G gilt

$$\begin{aligned} \neg(F \wedge G) &= (\neg F) \vee (\neg G) \\ \neg(F \vee G) &= (\neg F) \wedge (\neg G) \\ F \rightarrow G &= (\neg F) \vee G \\ F \rightarrow G &= (\neg G) \rightarrow (\neg F) \\ F \leftrightarrow G &= (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \end{aligned}$$

Insbesondere gelten für \wedge und \vee Gesetze, die Sie vielleicht schon von der Addition und Multiplikation von Zahlen kennen:

Theorem 3.3 (Rechengesetze der Aussagenlogik)

- *Kommutativgesetz*

$$\begin{aligned}F \wedge G &= G \wedge F \\F \vee G &= G \vee F\end{aligned}$$

- *Assoziativgesetz*

$$\begin{aligned}F \wedge (G \wedge H) &= (F \wedge G) \wedge H \\F \vee (G \vee H) &= (F \vee G) \vee H\end{aligned}$$

- *Distributivgesetz*

$$\begin{aligned}F \wedge (G \vee H) &= (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\F \vee (G \wedge H) &= (F \vee G) \wedge (F \vee H)\end{aligned}$$

Sie sollten jetzt in der Lage sein, diese Gesetze anhand einer Wahrheitstabelle zu beweisen.

4 Mengen

4.1 Motivation

Wie in Kapitel 1 erwähnt, gibt es in der Mathematik viele Begriffe, deren Verständnis essentiell wichtig ist. Tatsächlich ist die Mathematik die *einzig*e Wissenschaft, die so einfach ist, dass alle darin verwendeten Begriffe exakt definiert werden können. Fragen Sie mal eine Physiker, was Masse oder Kraft genau ist. Die Philosophie lebt sogar davon, dass ihre Begriffe unklar sind und man sich endlos darüber streiten kann.

Ein Problem hat die Mathematik jedoch auch. Wenn man einen Begriff definiert, dürfen in der Definition nur Begriffe auftreten, die zuvor schon definiert wurden. Womit fängt man also an?

Einen Ausweg aus diesem Dilemma gibt es nicht. Man versucht daher, mit möglichst wenigen, einfachen Begriffen zu beginnen und alles andere darauf aufzubauen. Tatsächlich ist es gelungen, die gesamte Mathematik mit einigen wenigen Begriffen der Logik und dem Begriff “Menge” zu beschreiben. Bei der Definition des Begriffs Menge sind wir jedoch gezwungen, ausnahmsweise Begriffe zu verwenden, die lediglich intuitiv klar sein sollten. Ich verwende hierfür die Definition nach Georg Cantor, dem Erfinder der Mengenlehre.

Definition 4.1 (Menge)

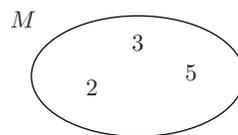
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung.

Man setzt also voraus, dass klar ist, was ein Objekt ist und was eine Zusammenfassung ist. Dass es sich um Objekte “unseres Denkens oder unserer Anschauung” handelt, bedeutet lediglich, dass diese Dinge nicht physikalisch existieren müssen, d.h. rein abstrakt sein können, wie z.B. Zahlen. Die Objekte, die zusammengefasst werden, nennt man Elemente der Menge.

Man kann z.B. die Zahlen 2,3 und 5 zu einer Menge M zusammenfassen. Die Zusammenfassung wird syntaktisch durch geschweifte Klammern beschrieben, die Elemente werden durch Kommas getrennt. Man schreibt somit

$$M = \{2, 3, 5\}.$$

Mengen sind also etwas sehr Einfaches — und genau das war ja die Absicht. Man kann Mengen durch Diagramme wie folgt veranschaulichen:



Um auszudrücken, dass 2 ein Element der Menge M ist, schreibt man

$$2 \in M.$$

Die Zahl 4 ist kein Element von M . Man schreibt

$$4 \notin M.$$

Beachten Sie, dass z.B.

$$3 \neq \{3\}.$$

Während 3 eine Zahl ist, ist $\{3\}$ eine Menge.

Die Mächtigkeit (oder Kardinalität) einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente. Als Funktionssymbol für die Mächtigkeit verwendet man Betragsstriche, also z.B.

$$|\{2, 3, 5\}| = 3.$$

Eine besonders einfache Menge ist die leere Menge, d.h. eine Zusammenfassung, in der nichts drin ist. Die leere Menge wird mit $\{\}$ oder \emptyset bezeichnet. Da die leere Menge keine Elemente hat, gilt

$$|\emptyset| = 0.$$

Mengen kann man schachteln, d.h. Mengen können ihrerseits wiederum Elemente von Mengen sein. So ist z.B.

$$\{1, 2, \{3, 4\}\}$$

eine Menge mit 3 Elementen: 1, 2 und $\{3, 4\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\in \{1, 2, \{3, 4\}\} \\ \{3, 4\} &\in \{1, 2, \{3, 4\}\} \\ 3 &\notin \{1, 2, \{3, 4\}\}. \end{aligned}$$

Die Menge

$$\{\emptyset\}$$

hat ein Element, nämlich \emptyset . Es gilt folglich

$$\emptyset \in \{\emptyset\}.$$

Beachten Sie, dass

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}.$$

Die leere Menge ist nicht “nichts” sondern eine Menge, also ein Objekt unseres Denkens oder unserer Anschauung.

4.2 Zahlenmengen

Mengen können durchaus unendlich viele Elemente haben. Ein Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Nimmt man die Null dazu, erhält man eine neue Menge:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Die nächst größere Zahlenmenge ist die Menge der ganzen Zahlen.

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Als nächstes kommt die Menge der Rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Dies sind alle Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lassen. So ist z.B.

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, \text{ aber } \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

Tatsächlich gibt es auch Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lassen wie z.B. π , e , $\sqrt{2}$. Diese Zahlen nennt man folglich irrationale Zahlen. Rationale und irrationale Zahlen werden zu der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} zusammengefasst. So ist z.B.

$$\pi \in \mathbb{R}, \text{ aber } \pi \notin \mathbb{Q}.$$

4.3 Teilmengen

Betrachten Sie z.B. die beiden Mengen

$$A = \{2, 5\} \text{ und } B = \{2, 3, 5\}.$$

Jedes Element von A ist auch Element von B . Daher nennt man A eine Teilmenge von B und schreibt

$$A \subseteq B.$$

Definition 4.2 (Teilmenge)

A ist Teilmenge von B genau dann wenn

für alle x gilt

wenn $x \in A$

dann $x \in B$.

Die Definition klingt etwas holprig — allerdings aus gutem Grund. Was wenn-dann bedeutet, wissen Sie schon von Kapitel 3 und Sie erinnern sich, dass man das mit \rightarrow abkürzen kann. Neu ist der Satzteil “für alle x gilt”, den wir in fast allen Definitionen und Theoremen finden werden. In der Logik bezeichnet man dies als Allquantor und kürzt es mit $\forall x$ ab. Damit lässt sich die Definition sehr kompakt schreiben durch

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Die in Kapitel 4.2 erwähnten Zahlenmengen sind gute Beispiele für Teilmengenbeziehungen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Da \mathbb{Q} keine Teilmenge von \mathbb{Z} ist, schreibt man

$$\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}.$$

Wir wissen bereits, dass $\{2, 5\} \subseteq \{2, 3, 5\}$. Laut Definition muss daher

$$x \in \{2, 5\} \rightarrow x \in \{2, 3, 5\}$$

wahr sein für jedes beliebige x . Testen wir dies anhand einiger Beispiele von x .

- Für $x = 5$ erhält man

$$\underbrace{5 \in \{2, 5\}}_{\text{wahr}} \rightarrow \underbrace{5 \in \{2, 3, 5\}}_{\text{wahr}} \quad \text{und} \quad \text{wahr} \rightarrow \text{wahr} = \text{wahr}$$

- Für $x = 3$ erhält man

$$\underbrace{3 \in \{2, 5\}}_{\text{falsch}} \rightarrow \underbrace{3 \in \{2, 3, 5\}}_{\text{wahr}} \quad \text{und} \quad \text{falsch} \rightarrow \text{wahr} = \text{wahr}.$$

- Für $x = 8$ erhält man

$$\underbrace{8 \in \{2, 5\}}_{\text{falsch}} \rightarrow \underbrace{8 \in \{2, 3, 5\}}_{\text{falsch}} \quad \text{und} \quad \text{falsch} \rightarrow \text{falsch} = \text{wahr}.$$

Damit die wenn-dann Aussage $x \in \{2, 5\} \rightarrow x \in \{2, 3, 5\}$ falsch wäre, müsste der wenn-Teil wahr sein und der dann-Teil falsch. Es müsste also $x \in \{2, 5\}$ wahr und $x \in \{2, 3, 5\}$ falsch sein. Dies ist unmöglich und folglich ist

$$x \in \{2, 5\} \rightarrow x \in \{2, 3, 5\}$$

in der Tat wahr für alle x . Die Definition 3.1 von wenn-dann machte also rückblickend durchaus Sinn.

Was würden Sie sagen, ist die leere Menge eine Teilmenge von \mathbb{N} ? Ist jedes Element, das in der leeren Menge ist, auch in \mathbb{N} ? Macht die Frage überhaupt Sinn, wo doch die leere Menge gar keine Elemente hat? In so einer Situation ist man gut beraten, sich an die Definition zu halten. Es ist zu klären ob

$$\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$$

wahr ist. Stellen wir uns zunächst ein beliebiges, aber festes x vor. Natürlich ist $x \in \emptyset$ falsch, da die leere Menge ja gar keine Elemente hat. Anhand der Definition von wenn-dann sieht man, dass

$$\underbrace{x \in \emptyset}_{\text{falsch}} \rightarrow x \in \mathbb{N}$$

wahr sein muss: Eine wenn-dann Aussage ist ja immer wahr, wenn der wenn-Teil falsch ist. Da die Aussage für jedes beliebige x wahr ist, ist folglich

$$\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in \mathbb{N})$$

wahr. Wir haben damit bewiesen, dass $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$.

Tatsächlich gilt diese Überlegung nicht nur für die Menge \mathbb{N} sondern für jede beliebige Menge A . Es gilt also $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A oder kurz ausgedrückt

$$\forall A \emptyset \subseteq A.$$

Ist \mathbb{N} Teilmenge von sich selbst, d.h. gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$? Auch hier sollte man sich nicht auf die Intuition verlassen sondern auf die Definition. Die Frage ist

$$\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{N}).$$

Stellen wir uns wieder zunächst ein beliebiges aber festes x vor. Dann ist $x \in \mathbb{N}$ entweder wahr oder falsch. In beiden Fällen ist aber die Aussage

$$x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{N}$$

wahr. Da dies für jedes beliebige x gilt, ist

$$\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{N})$$

wahr. Wir haben damit bewiesen, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Auch diese Überlegung lässt sich auf jede beliebige Menge A übertragen und somit gilt

$$\forall A A \subseteq A.$$

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

4.4 Mengengleichheit

Zwei Mengen sind gleich genau dann wenn sie die gleichen Elemente haben. Aber ist

$$\{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3\}?$$

Ist bei einer Zusammenfassung die Reihenfolge relevant oder nicht? Tatsächlich wird das in der Definition 4.1 des Begriffs Menge gar nicht festgelegt. Das kommt davon, wenn man in einer Definition Begriffe verwendet, die noch nicht definiert wurden!

Zwei Mengen sind gleich, wenn jedes Element der einen auch Element der anderen ist und umgekehrt. Da wir den Teilmengenbegriff bereits definiert haben, können wir ihn in der Definition der Mengengleichheit verwenden.

Definition 4.3 (Mengengleichheit)

Zwei Mengen A und B sind gleich, d.h. $A = B$ genau dann wenn

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Anhand dieser Definition der Mengengleichheit können wir o.g. Frage eindeutig beantworten. Es gilt

$$\{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3\}.$$

Mengen sind somit *ungeordnete* Zusammenfassungen.

Damit lässt sich auch eine weitere Unklarheit beseitigen. Es gilt z.B. dass

$$\{2, 2, 3\} = \{2, 3\}.$$

Ein Objekt ist entweder Element einer Menge oder nicht. Es macht folglich keinen Unterschied, ob man es mehrfach hinschreibt.

Häufig steht man vor der Aufgabe, zu entscheiden ob zwei gegebene Mengen A, B gleich sind. Mit Hilfe der Definition 4.3 kann man das Problem vereinfachen: Man zerlegt es in zwei einfachere Teilprobleme, nämlich zu entscheiden ob $A \subseteq B$ ist und $B \subseteq A$. Damit ist schon der erste Schritt geschafft — und das ist ja meistens der schwierigste.

Es gibt noch ein paar weitere Relationen auf Mengen.

- A ist echte Teilmenge von B , geschrieben $A \subset B$ wenn A Teilmenge von B ist, aber nicht gleich B , d.h.

$$A \subset B \text{ genau dann wenn } A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Das ist vergleichbar mit $<$ und \leq auf Zahlen.

- Statt $A \subseteq B$ schreibt man auch $B \supseteq A$ und sagt B ist Obermenge von A , d.h.

$$B \supseteq A \text{ genau dann wenn } A \subseteq B.$$

Das ist vergleichbar mit \geq und \leq auf Zahlen.

4.5 Aufzählende und beschreibende Form einer Menge

Bisher haben wir Mengen dadurch beschrieben, dass wir ihre Elemente in geschweiften Klammern und durch Kommata getrennt aufgezählt haben. Für Mengen mit unendlich vielen Elementen wie z.B. \mathbb{N} ist das natürlich nicht möglich.

Mengen sind im Wesentlichen nichts anderes als Eigenschaften.¹ Hinter der Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein und der Menge aller natürlicher Zahlen steckt das gleiche Konzept. Wir können quasi aus jeder Eigenschaft eine Menge konstruieren. Nehmen wir z.B. die Eigenschaft, eine Primzahl größer 10 zu sein. Die entsprechende Menge ist

$$\{11, 13, 17, 19, \dots\}.$$

Aus dieser Darstellung ist allerdings nicht leicht ersichtlich, was mit den 3 Punkten gemeint ist. Es gibt daher die sog. beschreibende Form einer Menge.

$$\{x \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge x > 10\}.$$

Gelesen wird das als

“Menge aller Objekte x , für die gilt: x ist Primzahl und $x > 10$ ”.

Die Eigenschaft hinter dem senkrechten Strich ist durch eine Aussage gegeben, in der ein Variablensymbol x auftritt. Die Elemente der Menge sind genau die Werte für x , für die die Aussage $F(x)$ wahr ist. Dies ist das Bindeglied zwischen Logik und Mengenlehre. Ist allgemein $F(x)$ eine Aussage, in der die Variable x auftritt, dann ist

$$\{x \mid F(x)\}.$$

die Menge aller Werte von x , für die die Aussage wahr ist.

Wie sind eigentlich Primzahlen definiert? Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die man nicht als Produkt zweier unterschiedlicher natürlicher Zahlen darstellen kann. Versuchen wir dies in einer formalen Sprache zu beschreiben.

- Beginnen wir mit der Aussage, dass x Produkt zweier Zahlen ist. Das heißt, es gibt eine Zahl a und eine Zahl b so dass $x = ab$. Der Satzteil “es gibt ein” ist wie das bereits bekannte “für alle gilt” ein Quantor. Er wird durch \exists abgekürzt und heißt Existenzquantor. Damit lässt sich kompakt schreiben

$$\exists a \exists b x = ab.$$

- Im nächsten Schritt formulieren wir, dass x in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen zerlegt werden kann. Es gibt ein a und ein b so dass $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ und $x = ab$.

$$\exists a \exists b a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge x = ab.$$

Damit es übersichtlicher bleibt, kürzen wir das ab.

$$\exists a, b \in \mathbb{N} x = ab.$$

¹Es gibt hierbei einen Haken, der für uns jedoch keine Rolle spielt, siehe Russellsche Antinomie

- Natürlich kann man jede Zahl in ein Produkt zerlegen, wenn man als einen Faktor 1 nimmt. Wir wollen aber eine “echte” Faktorisierung und schließen daher 1 aus.

$$\exists a, b \in \mathbb{N} \ a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge x = ab.$$

- Damit x eine Primzahl ist, darf eine solche Faktorisierung *nicht* möglich sein. Also braucht es noch eine Negation. Außerdem sind nur natürliche Zahlen Primzahlen und 1 ist per Definition keine Primzahl. Somit ist x Primzahl genau dann wenn

$$x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 1 \wedge \neg(\exists a, b \in \mathbb{N} \ a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge x = ab).$$

- Auch für Quantoren gibt es Rechengesetze ähnlich zu den Gesetzen der Aussagenlogik, die jedoch den Rahmen hier sprengen würden. Überzeugen Sie sich aber, dass o.g. Formel gleichbedeutend ist mit

$$x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 1 \wedge (\forall a, b \in \mathbb{N} \ (a \neq 1 \wedge b \neq 1) \rightarrow x \neq ab).$$

- Die Menge aller Primzahlen größer 10 ist somit

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 10 \wedge (\forall a, b \in \mathbb{N} \ (a \neq 1 \wedge b \neq 1) \rightarrow x \neq ab)\}.$$

Warum verwenden wir eine so komplizierte Sprache?

Erstens ist die Sprache extrem einfach, da sie nur aus ganz wenigen Begriffen der Logik besteht: für alle x gilt, es gibt ein x so dass, und, oder, nicht, wenn-dann.

Zweitens hat sie den unschätzbaren Vorteil, dass alles, was wir darin ausdrücken, eine exakte Bedeutung hat. Es gibt keine Missverständnisse oder Unklarheiten mehr.

Drittens hat die Sprache eine sehr einfache Grammatik, die es erlaubt, einen schwierigen Satz in seine Bestandteile zu zerlegen.

Aus diesen Gründen ist diese Sprache auch für maschinelle Wissensverarbeitung sehr gut geeignet. Allerdings erfordert es etwas Übung, Dinge in dieser Weise zu formulieren und zu verstehen.

4.6 Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Mengendifferenz

Es gibt drei grundlegende Rechenoperationen auf Mengen. Seien

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{3, 6\}.$$

Vereinigungsmenge. Nehmen wir alle Elemente von A und von B zusammen und erzeugen daraus eine neue Menge, erhalten wir die Vereinigungsmenge von A und B , geschrieben $A \cup B$. In unserem Beispiel ist

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 6\}.$$

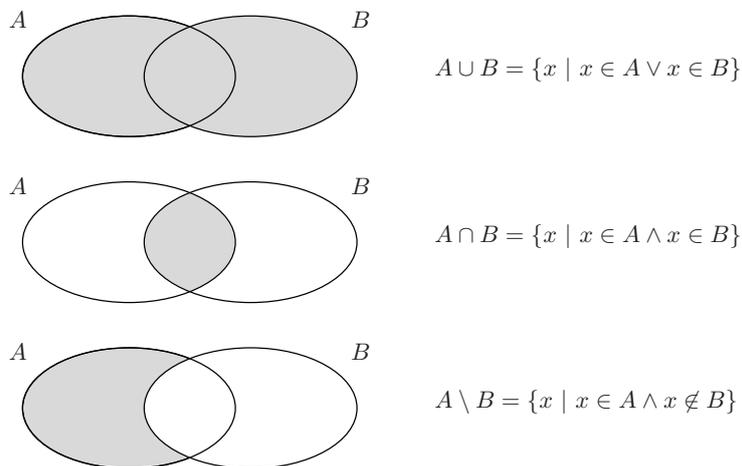
Schnittmenge. Nehmen wir nur die Elemente, die sowohl in A als auch in B sind, erhalten wir die Schnittmenge von A und B , geschrieben $A \cap B$. In unserem Beispiel ist

$$A \cap B = \{3\}.$$

Mengendifferenz. Nehmen wir die Elemente, die zwar in A sind, aber nicht in B , erhalten wir die Mengendifferenz von A und B , geschrieben $A \setminus B$. In unserem Beispiel ist

$$A \setminus B = \{2, 5\}.$$

Die Mengenoperationen lassen sich durch Mengendiagramme veranschaulichen:



Unter Verwendung der beschreibenden Form lassen sich die Mengenoperationen wie folgt definieren.

Definition 4.4 (Mengenoperationen)

Seien A, B Mengen. Dann gilt

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Die Ähnlichkeit der mengentheoretischen Symbole \cup und \cap mit den aussagelogischen Funktionssymbolen \vee und \wedge ist durchaus beabsichtigt.

Ein paar Beispiele mit Zahlenmengen:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset.$$

Für die Mengenoperationen gelten viele Gesetze, von denen ein paar wie folgt zusammengefasst werden.

Theorem 4.5

Für alle Mengen A, B, C gilt

- *Kommutativgesetz*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

- *Assoziativgesetz*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- *Distributivgesetz*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beachten Sie insbesondere, dass die Mengendifferenz weder kommutativ noch assoziativ ist.

Beweis. Die Beweise basieren direkt auf den Gesetzen der Aussagenlogik, siehe Theorem 3.3. Nehmen wir als Beispiel das letzte Gesetz.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Der wichtigste Schritt war die Anwendung des aussagenlogischen Gesetzes

$$F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

auf die Aussagen

$$F = x \in A, \quad G = x \in B, \quad H = x \in C.$$

5 Paare

Mengen sind ungeordnete Zusammenfassungen von Objekten. Häufig möchte man Objekte jedoch geordnet zusammenfassen. Sie kennen das vermutlich schon von Vektoren. Ein zweistelliger Vektor ist eine Zusammenfassung von zwei Zahlen, deren Reihenfolge wichtig ist. Der Punkt mit Koordinaten $(5, 3)$ liegt woanders als der Punkt mit Koordinaten $(3, 5)$. Paare werden auch für Argumentlisten von zweistelligen Funktionen gebraucht, siehe Kapitel 2.

Für zwei beliebige Objekte a, b können wir die geschachtelte Menge

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

konstruieren. Diese Menge kürzen wir ab mit (a, b) und bezeichnen Sie als Paar.

Definition 5.1 (Paar)

Für alle a, b ist das Paar (a, b) definiert durch

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Eine Menge M heißt Paar, wenn es a, b gibt so dass

$$M = (a, b).$$

Warum macht das Sinn? Obwohl nur Mengen verwendet werden, die inhärent ungeordnet sind, haben wir durch die Schachtelung eine Ordnung codiert. So ist z.B. für $a = 5$ und $b = 3$

$$\begin{aligned}(5, 3) &= \{\{5\}, \{5, 3\}\} \\ (3, 5) &= \{\{3\}, \{3, 5\}\}\end{aligned}$$

und da diese Mengen unterschiedlich sind, gilt wie gewünscht

$$(5, 3) \neq (3, 5).$$

So weit können wir aus zwei Objekten a, b ein Paar konstruieren. Aber wie kommt man von dem Paar, das ja in Wirklichkeit eine geschachtelte Menge ist, wieder an die ursprünglichen Komponenten a, b ? Ein Paar ist eine Menge mit zwei Elementen. Beide Elemente sind ihrerseits Mengen, wobei eine Menge ein Element hat und die andere zwei. Das Element der Einermenge ist die erste Komponente des Paares, das andere Element der Zweiermenge ist die zweite Komponente.

Es gibt eine Ausnahme, wenn die beiden Komponenten des Paares gleich sind. Dann ist

$$\begin{aligned}(a, a) &= \{\{a\}, \{a, a\}\} \\ &= \{\{a\}, \{a\}\} \\ &= \{\{a\}\}.\end{aligned}$$

Ein Paar, bei dem beide Komponenten gleich sind, ist also eine Menge mit einem Element, das wiederum eine Menge mit einem Element ist. Dieses Element ist erste und zweite Komponente des Paares.

Beispiele.

$$\begin{aligned}\{\{5\}, \{3, 5\}\} &= (5, 3) \\ \{\{3, 5\}, \{3\}\} &= (3, 5) \\ \{\{3\}\} &= (3, 3) \\ \{\{5, 3\}, \{4\}\} &\text{ ist kein Paar}\end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft von Paaren ist, dass die Komponenten eindeutig sind. Man kann nicht ein und das selbe Paar mit verschiedenen Komponenten erzeugen.

Theorem 5.2

Für alle a, b, u, v gilt

$$(a, b) = (u, v) \text{ genau dann wenn } a = u \text{ und } b = v.$$

Der Beweis dieses Theorems ist nicht schwierig, andererseits aber auch nicht kurz genug um ihn an dieser Stelle bereits vorzuführen. Anwendung findet dieses Theorem z.B. in der Vektorrechnung. Zwei Vektoren sind gleich genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind.

6 Tupel

Im letzten Kapitel haben wir zwei Objekte a, b geordnet zu einem Paar zusammengefasst. Wie fasst man nun drei Objekte a, b, c geordnet zusammen? Anstatt sich wieder mit geschachtelten Mengen herumzuschlagen, können wir hierfür Paare benutzen: Wir fassen zunächst a, b zum Paar (a, b) zusammen und dann (a, b) und c zum Paar $((a, b), c)$. Das Ergebnis nennt sich Tripel

Definition 6.1 (Tripel)

Für alle a, b, c ist das Tripel (a, b, c) definiert durch

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Da die Komponenten eines Paares eindeutig sind, sind folglich auch die Komponenten eines Tripels eindeutig.

Im nächsten Schritt bauen wir nach der gleichen Systematik vier Objekte geordnet zusammen. Da wir Tripel bereits definiert haben, können wir diese in der nächsten Definition verwenden.

Definition 6.2 (Quadrupel)

Für alle a, b, c, d ist das Quadrupel (a, b, c, d) definiert durch

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d).$$

Diesen Prozess können wir beliebig fortsetzen.

Definition 6.3 (n -Tupel)

Das n -Tupel mit Komponenten a_1, a_2, \dots, a_n ist definiert durch

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Der Vollständigkeit halber ergänzen wir dies noch für den Fall $n = 1$. Das 1-Tupel mit einer Komponenten a ist a selbst, d.h.

$$(a) = a.$$

7 Kartesische Produkte

Die Felder eines Schachbretts werden durch Paare beschrieben, z.B. $(E, 2)$ oder $(H, 5)$. Die erste Komponente dieser Paare ist ein Element der Menge $\{A, \dots, H\}$, die zweite ein Element der Menge $\{1, \dots, 8\}$. Die Menge aller Felder ist die Menge aller solcher Paare und heißt kartesisches Produkt der beiden Mengen.

$$\{A, \dots, H\} \times \{1, \dots, 8\} = \{(A, 1), (A, 2), \dots, (H, 8)\}.$$

Neben der in Kapitel 4.6 beschriebenen Vereinigungsmenge, Schnittmenge und Mengendifferenz haben wir somit eine weitere Mengenfunktion.

Definition 7.1 (Kartesisches Produkt)

Das kartesische Produkt zweier Mengen A, B ist definiert durch

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Wir haben die beschreibende Form von Mengen verwendet, allerdings der Lesbarkeit halber etwas vereinfacht. Korrekt hätte man so schreiben müssen:

$$A \times B = \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B x = (a, b)\}.$$

Für den Spezialfall leere Menge folgt

$$A \times \emptyset = \emptyset.$$

Ein Schachbrett hat 64 Felder, was das Produkt aus Länge und Breite ist. Diese Beobachtung gilt allgemein für kartesische Produkte.

Theorem 7.2

Seien A, B endliche Mengen. Dann gilt

$$|A \times B| = |A| |B|.$$

Für die Paare aus $A \times B$ gibt es $|A|$ Möglichkeiten für die erste Komponente und $|B|$ Möglichkeiten für die zweite. Macht insgesamt $|A| |B|$ Kombinationen.

Viele Theoreme lassen sich durch sog. **kommutative Diagramme** veranschaulichen.

$$\begin{array}{ccc}
 A, B & \xrightarrow{\text{Kartesisches Produkt}} & A \times B \\
 \downarrow |\cdot| & & \downarrow |\cdot| \\
 |A|, |B| & \xrightarrow{\text{Multiplikation}} & |A \times B| \\
 & & = |A| |B|
 \end{array}$$

Das Wort “kommutativ” deutet darauf hin, dass man etwas vertauschen darf – im Fall von kommutativen Diagrammen ist dies die Reihenfolge von Operationen: Es ist egal, ob man zuerst das kartesische Produkt berechnet und dann

dessen Mächtigkeit nimmt, oder zuerst die Mächtigkeit nimmt und dann die beiden Zahlen multipliziert. Beide Wege führen zum selben Resultat. In der oberen Hälfte des Diagramms hantiert man mit Mengen und Mengenoperationen, in der unteren mit Zahlen. Der Übergang wird durch die Mächtigungsoperation bewerkstelligt. Diese Operation an den vertikalen Pfeilen wird im Kontext von kommutativen Diagrammen auch als **Morphismus** bezeichnet. Er führt von der Welt der Mengen in die Welt der Zahlen. Das kartesische Produkt auf Mengen entspricht der Multiplikation auf Zahlen. Wir werden solche Situationen sehr häufig in ganz anderen Gebieten wieder finden und es hilft dem Verständnis unheimlich, wenn man diese Analogien erkennt. Denken Sie z.B. an das Logarithmengesetz $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ oder die Summenregel der Ableitung $(f + g)' = f' + g'$.

***n*-fache kartesische Produkte.** Interessant sind kartesische Produkte von Mengen mit sich selbst. Im Fall von reellen Zahlen ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge aller Paare von reellen Zahlen, d.h. die Menge aller zweistelliger Vektoren.

Angelehnt an die Multiplikation wird $A \times A$ mit A^2 abgekürzt. Entsprechend ist dann

$$A^3 = A \times A \times A.$$

Wir verwenden das \times -Symbol in Infix Notation, folglich stellt sich die Frage in welcher Reihenfolge die kartesischen Produkte auszuführen sind. Oder ist

$$(A \times A) \times A = A \times (A \times A) ?$$

Schon an einem einfachen Beispiel sieht man, dass dem nicht so ist. Sei $A = \{1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A \times A &= \{(1, 1)\} \\ (A \times A) \times A &= \{((1, 1), 1)\} \\ A \times (A \times A) &= \{(1, (1, 1))\} \end{aligned}$$

und da

$$((1, 1), 1) \neq (1, (1, 1))$$

folgt, dass die beiden Mengen nicht gleich sind und Klammern erforderlich sind, um die Sache eindeutig zu machen.

Wir legen fest, dass

$$\begin{aligned} A^3 &= (A \times A) \times A \\ &= A^2 \times A. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$A^4 = A^3 \times A$$

und so weiter.

Definition 7.3 (*n*-faches kartesisches Produkt)

Das *n*-fache kartesische Produkt der Menge *A* ist definiert durch

$$A^n = A^{n-1} \times A.$$

Ergänzend wird festgelegt, dass

$$A^1 = A.$$

8 Relationen

Sie kennen bereits Beispiele von Relationen auf Zahlen wie z.B. die kleiner-gleich Relation. Schränken wir diese Relation der Einfachheit halber auf natürliche Zahlen ein und bezeichnen wir sie mit $\leq_{\mathbb{N}}$. Wir wissen z.B. dass

$$3 \leq_{\mathbb{N}} 7.$$

Da alle Objekte in der Mathematik Mengen sind, stellt sich die Frage, wie sich $\leq_{\mathbb{N}}$ als Menge ausdrücken lässt. Es stehen 2 Zahlen in Relation, wobei die Reihenfolge wichtig ist. Schließlich ist

$$7 \not\leq_{\mathbb{N}} 3.$$

Es bietet sich daher an, die Zahlen zu einem Paar $(3, 7)$ zusammenzufassen. Da $\leq_{\mathbb{N}}$ eine Menge sein muss, schreiben wir

$$(3, 7) \in \leq_{\mathbb{N}}.$$

Sieht zwar komisch aus, bedeutet aber nichts anderes als dass die Relation $\leq_{\mathbb{N}}$ eine Menge von Paaren von natürlichen Zahlen ist:

$$\leq_{\mathbb{N}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 2), (2, 3) \dots\}.$$

Die Gleichheitsrelation auf \mathbb{N} ist entsprechend

$$=_{\mathbb{N}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}.$$

Allgemein ist eine Relation nichts anderes als eine Menge von Paaren — so einfach.

Definition 8.1 (Relation)

Eine Menge R heißt Relation, wenn R eine Menge von Paaren ist.

R heißt Relation auf A wenn

$$R \subseteq A \times A.$$

Relationen schreibt man meistens in Infix Notation, d.h.

$$a R b \text{ statt } (a, b) \in R.$$

Relationen können beliebige Mengen von Paaren sein. So ist z.B.

$$R = \{(2, 3), (1, 1)\}$$

eine Relation. Da die Komponenten der Elemente von R natürliche Zahlen sind, ist $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und somit eine Relation auf \mathbb{N} . Natürlich ist R auch eine Relation auf \mathbb{Z} .

Auch die Menge

$$R = \{(2, 3), ((1, 1), 1)\}$$

ist eine Menge von Paaren und somit eine Relation, allerdings nicht auf \mathbb{N} .

Da Relationen Mengen sind, können wir alles Wissen über Mengen und alle Funktionen auf Mengen direkt auf Relationen übertragen. So ist z.B.

$$\begin{aligned}\leq_{\mathbb{N}} \cap \geq_{\mathbb{N}} &= =_{\mathbb{N}} \\ \geq_{\mathbb{N}} \setminus =_{\mathbb{N}} &= >_{\mathbb{N}} \\ \mathbb{N}^2 \setminus =_{\mathbb{N}} &= \neq_{\mathbb{N}} \\ \mathbb{N}^2 \cap \geq_{\mathbb{Z}} &= \geq_{\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Die Umkehrrelation einer Relation R erhält man, in dem man die Komponenten der Paare in R vertauscht.

Definition 8.2 (Umkehrrelation)

Die Umkehrrelation einer Relation R ist definiert durch

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

So ist z.B.

$$\begin{aligned}\leq_{\mathbb{N}}^{-1} &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 2), (2, 3), \dots\}^{-1} \\ &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (2, 2), (3, 2), \dots\} \\ &= \geq_{\mathbb{N}} \\ =_{\mathbb{N}}^{-1} &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}^{-1} \\ &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\} \\ &= =_{\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Umkehrrelation der Gleichheitsrelation wiederum die Gleichheitsrelation ist und nicht, wie man vielleicht vermutet hätte, die Ungleichheitsrelation.

Relationen auf \mathbb{R} lassen sich durch Bilder veranschaulichen, indem man jedes Paar $(a, b) \in R$ als Punkt in ein zweidimensionales Koordinatensystem einzeichnet. Die Relation

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge b = a^2\}$$

ergibt dann eine Parabel.

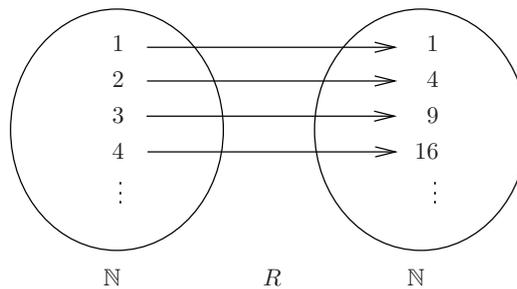
$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2 + b^2 \leq 1\}$$

ergibt einen ausgefüllten Kreis mit Radius 1.

9 Funktionen

9.1 Beispiele

Beispiel 9.1 Beginnen wir mit der Quadratfunktion auf natürlichen Zahlen. Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist wiederum eine natürliche Zahl, so dass jeder natürlichen Zahl eine natürliche Zahl zugeordnet wird. Es handelt sich also um eine Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{N} . Die beiden Mengen und die Zuordnung können durch ein Bild veranschaulicht werden:



Jeder Pfeil entspricht einem Zuordnungspaar, z.B. $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, usw. Fassen wir alle diese Zuordnungspaare zu einer Menge zusammen, erhalten wir die Relation

$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Unsere Funktion besteht somit aus 3 Dingen: Inputmenge \mathbb{N} , Outputmenge \mathbb{N} und Zuordnungsrelation R , die wir zu einem Tripel zusammenpacken.

$$f = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, R).$$

Der Funktionswert einer Funktion ist immer eindeutig, d.h. zu jedem Input $a \in \mathbb{N}$ gibt es einen eindeutigen Funktionswert $f(a)$. Es kann nie sein, dass nichts oder zwei verschiedene Werte herauskommen. Für die Relation R heißt das:

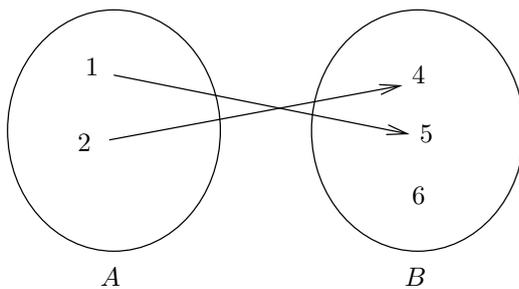
zu jedem $a \in \mathbb{N}$
 existiert genau ein $b \in \mathbb{N}$ so dass
 $(a, b) \in R$.

Beispiel 9.2 Sei

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$R = \{(1, 5), (2, 4)\}$$



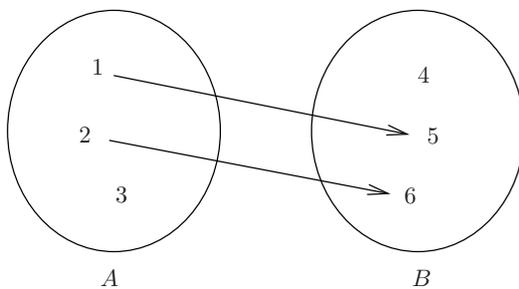
Dann ist $f = (A, B, R)$ eine Funktion. Es gilt $f(1) = 5$ und $f(2) = 4$. Zu jedem Element $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit aRb .

Beispiel 9.3 Sei

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$R = \{(1, 5), (2, 6)\}$$



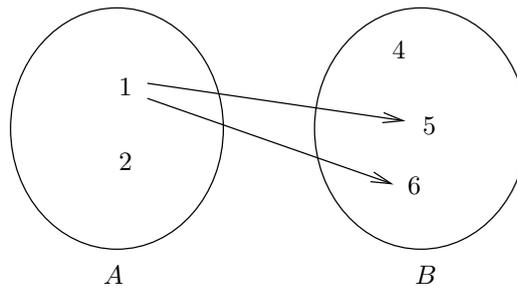
Dann ist $f = (A, B, R)$ *keine* Funktion. Da $3 \in A$ muss es ein Paar in R geben mit erster Komponente 3. Der Zahl 3 wird kein Funktionswert zugeordnet.

Beispiel 9.4 Sei

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$R = \{(1, 5), (1, 6)\}$$



Dann ist $f = (A, B, R)$ *keine* Funktion. Da sowohl $(1, 5)$ als auch $(1, 6)$ Elemente von R sind, ist der Funktionswert $f(1)$ nicht eindeutig.

9.2 Definition des Begriffs Funktion

Eine Funktion f ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge A zu Elementen einer Menge B . Welches $a \in A$ welchem $b \in B$ zugeordnet wird, ist durch eine Relation beschrieben, deren Elemente genau diese Zuordnungspaare (a, b) sind.

Eine Funktion besteht somit aus drei Dingen: Einer Inputmenge A , einer Outputmenge B und einer Zuordnungsrelation R . Funktionen können damit wie alles in der Mathematik durch Mengen definiert werden.

Definition 9.5 (Funktion)

Ein Tripel $f = (A, B, R)$ heißt Funktion wenn gilt:

- $R \subseteq A \times B$
- zu jedem $a \in A$

existiert genau ein $b \in B$ so dass
 aRb

Der Funktionswert von f an der Stelle $a \in A$ ist das das eindeutige $b \in B$ mit aRb . Man schreibt hierfür $f(a)$.

Die Relation R heißt Graph der Funktion.

Die erste Bedingung besagt, dass die Relation R nur Paare enthält, deren erste Komponente aus der Inputmenge A und deren zweite Komponente aus der Outputmenge B kommt.

Die zweite Bedingung legt fest, dass der Funktionswert eindeutig ist: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau einen zugehörigen Funktionswert $b \in B$.

Definition 9.6 (Menge aller Funktionen von A nach B)

Die Menge aller Funktionen von A nach B ist

$$A \rightarrow B = \{f \mid \exists R f = (A, B, R) \text{ ist Funktion} \}.$$

Beachten Sie, dass der Pfeil zwischen zwei Mengen A, B nicht wenn-dann bedeutet, sondern die Menge aller Funktionen von A nach B . Neben \cup, \cap, \setminus und \times haben wir somit eine neue Mengenoperation \rightarrow . Um auszudrücken, dass eine Funktion f von A nach B abbildet, kann man einfach schreiben

$$f \in A \rightarrow B.$$

9.3 Funktionsterme

Sie kennen vermutlich die Definition von Funktionen durch Terme wie z.B.

$$f(x) = x + 1.$$

Durch den Funktionsterm $x + 1$ wird ebenfalls jeder Zahl x genau ein Funktionswert $x + 1$ zugeordnet. Es ist jedoch nicht klar, aus welcher Menge x kommen darf. Eine Funktion, die nur natürliche Zahlen schluckt, ist etwas anderes als eine Funktion, die auch ganze Zahlen verarbeiten kann. Um dies eindeutig zu machen schreibt man

$$f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = x + 1.$$

Damit ist klar, dass

$$f = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots\})$$

ist. Für

$$g \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g(x) = x + 1$$

ist

$$g = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \{\dots, (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), \dots\})$$

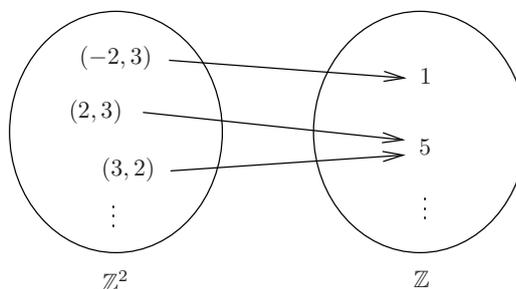
und somit $f \neq g$.

Beispiel 9.7 Die Kehrwertfunktion ist für alle reellen Zahlen außer Null definiert. Man schreibt folglich

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Beispiel 9.8 Die Additionsfunktion von ganzen Zahlen ist eine zweistellige Funktion. Sie nimmt ein Paar von ganzen Zahlen und gibt deren Summe zurück. Folglich schreibt man

$$f \in \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x, y) = x + y.$$



Damit ist

$$f = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, \{((-2, 3), 1), ((2, 3), 5), ((3, 2), 5), \dots\})$$

Beispiel 9.9 Abschließend noch ein Beispiel für eine Funktion, die jeder Zahl ein Paar zuordnet.

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (x - 1, x + 2).$$

So ist z.B.

$$f(3) = (2, 5).$$

9.4 Komposition von Funktionen

Beispiel 9.10 Sei

$$\begin{aligned} f &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x + 1 \\ g &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x^2) \\ &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt macht oft Probleme. Ausgehend von

$$f(x) = x + 1$$

muss lediglich auf beiden Seiten das Variablensymbol x durch x^2 ersetzt werden und schon hat man

$$f(x^2) = x^2 + 1.$$

Durch die Hintereinanderausführung von f und g entsteht eine neue Funktion

$$f(g(x)) = x^2 + 1.$$

Diese Funktion wird mit $f \circ g$ bezeichnet, d.h.

$$f \circ g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Beispiel 9.11 Ändert man im vorigen Beispiel die Reihenfolge der Ausführung von f und g erhält man

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x + 1) \\ &= (x + 1)^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt geht man wieder von

$$g(x) = x^2$$

aus und ersetzt auf beiden Seiten das Variablensymbol x durch $x + 1$. Wichtig ist allerdings, dass man in diesem Fall den Term $x + 1$ klammert!

$$g(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Man erhält somit eine neue Funktion

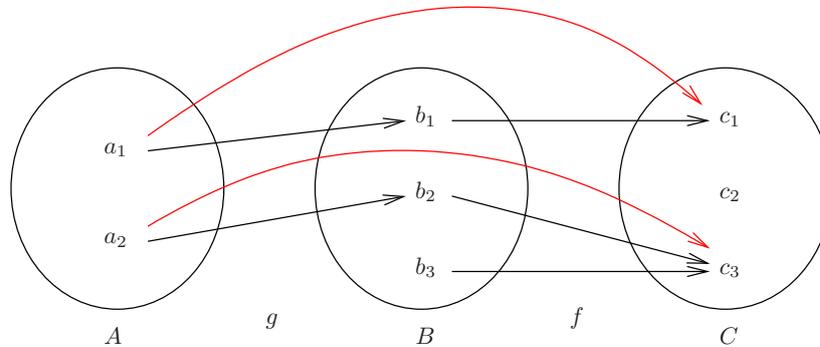
$$g \circ f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = (x + 1)^2.$$

Vergleicht man mit dem vorigen Beispiel, wird klar, dass

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Die Komposition von Funktionen ist somit nicht kommutativ.

Beispiel 9.12 Mit Mengendiagrammen stellt sich die Funktionskomposition wie folgt dar. Gegeben seien zwei Funktionen $g \in A \rightarrow B$ und $f \in B \rightarrow C$.



Es gilt

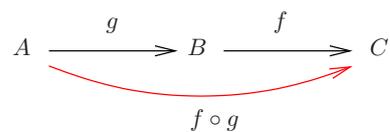
$$\begin{aligned} f(g(a_1)) &= c_1 \\ f(g(a_2)) &= c_3. \end{aligned}$$

Jedem $a \in A$ wird durch die Hintereinanderausführung genau ein $c \in C$ zugeordnet. Man erhält somit eine neue Funktion

$$f \circ g \in A \rightarrow C, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Beachten Sie die Reihenfolge: Zuerst wird g ausgeführt, danach f . Trotzdem schreibt man $f \circ g$. Der Grund für diese Verdrehung der Reihenfolge liegt darin dass man das Funktionssymbol *vor* das Argument schreibt. Im Term $f(g(x))$ schreibt man zuerst f , obwohl zuerst g ausgeführt wird.

Der Übersichtlichkeit halber wird die Hintereinanderausführung von Funktionen auch wie folgt dargestellt.



Beachten Sie, dass $f \circ g$ bedeutet, dass man *zuerst* g ausgeführt wird und *danach* f :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Die innere Funktion $g(x)$ wird zuerst ausgeführt. Man spricht $f \circ g$ daher "f nach g".

Definition 9.13 (Komposition)

Sei $g \in A \rightarrow B$ und $f \in B \rightarrow C$. Dann ist die Komposition $f \circ g$ definiert durch

$$f \circ g \in A \rightarrow C, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Beispiel 9.14 Sei

$$\begin{aligned} f &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= 3x \\ g &\in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y) &= x + y. \end{aligned}$$

Dann ist $f \circ g \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= f(g(x, y)) \\ &= f(x + y) \\ &= 3(x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & & & \searrow & \\ & & & & f \circ g \end{array}$$

Die Komposition $g \circ f$ ist hingegen nicht definiert. Die Funktion f liefert Werte in \mathbb{R} , die Funktion g benötigt jedoch Argumente aus \mathbb{R}^2 .

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

9.5 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

In diesem Kapitel werden drei Eigenschaften von Funktionen vorgestellt, die z.B. für das Lösen von Gleichungen und für die Umkehrfunktion relevant sind.

Injektiv. Eine Funktion ist injektiv, wenn sie zwei unterschiedlichen Argumenten nie den selben Funktionswert zuordnet.

Beispiel 9.15 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$$

ist injektiv. Wenn $x_1 \neq x_2$ dann ist auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 9.16 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ist *nicht* injektiv. Es ist z.B. $3 \neq -3$ aber $f(3) = f(-3) = 9$.

Beispiel 9.17 Sei

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$$

die Menge der nicht-negativen, reellen Zahlen. Dann ist

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

injektiv, obwohl der Funktionsterm gleich ist wie im letzten Beispiel. Am Funktionsterm allein kann man also i.a. nicht entscheiden, ob eine Funktion injektiv ist oder nicht.

Beispiel 9.18 Die Additionsfunktion ganzer Zahlen

$$f \in \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x, y) = x + y$$

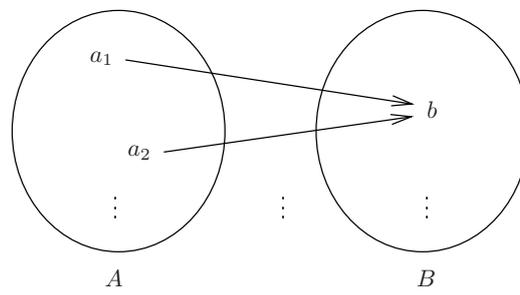
ist nicht injektiv. Es gilt z.B. $(2, 3) \neq (1, 4)$ aber $f(2, 3) = f(1, 4) = 5$.

Definition 9.19 (Injektiv)

Eine Funktion $f \in A \rightarrow B$ heißt injektiv wenn gilt:

für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt
wenn $a_1 \neq a_2$
dann $f(a_1) \neq f(a_2)$

Bei einer injektiven Funktion kann folgende Situation im Mengendiagramm folglich *nicht* auftreten.



Sobald zwei Pfeile zusammenlaufen, wird zwei unterschiedlichen Argumenten der selbe Funktionswert zugewiesen und die Funktion ist nicht injektiv.

Surjektiv. Eine Funktion $f \in A \rightarrow B$ heißt surjektiv, wenn jedes Element $b \in B$ tatsächlich auch Funktionswert von einem $a \in A$ ist. In der Menge B bleiben sozusagen keine Elemente übrig.

Beispiel 9.20 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ist *nicht* surjektiv. Die Menge \mathbb{R} enthält auch negative Zahlen, die jedoch nie Quadrat einer reellen Zahl sein können.

Beispiel 9.21 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = x^2$$

ist surjektiv. Zu jeder Zahl $b \in \mathbb{R}_0^+$ ist Funktionswert einer Zahl $a \in \mathbb{R}$, nämlich $a = \sqrt{b}$ oder $a = -\sqrt{b}$. Da es zwei verschiedene Werte für a gibt, die zum selben Funktionswert b führen, ist diese Funktion allerdings nicht injektiv.

Beispiel 9.22 Die Funktion

$$f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = x + 1$$

ist nicht surjektiv: Die Zahl $b = 1$ kann nie als Funktionswert auftreten.

Definition 9.23 (Surjektiv)

Eine Funktion $f \in A \rightarrow B$ heißt surjektiv wenn gilt

für alle $b \in B$

existiert ein $a \in A$ so dass

$$f(a) = b$$

Mit “existiert ein” meint man genau genommen “existiert mindestens ein”.

Beispiel 9.24 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

ist nicht surjektiv. Die Sinusfunktion liefert nur Werte zwischen -1 und 1 . Daher ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$$

surjektiv.

Bijektiv. Eine Funktion heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

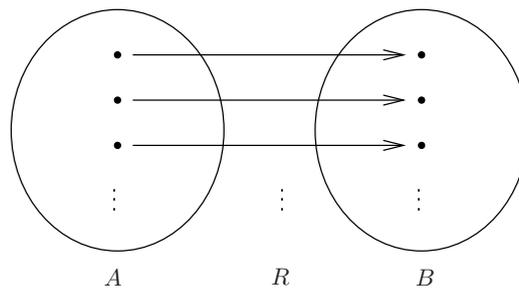
Definition 9.25 (Bijektiv)

Eine Funktion $f \in A \rightarrow B$ heißt bijektiv wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bijektive Funktionen f haben die Eigenschaft, dass es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ gibt, mit $f(a) = b$:

- Gibt es zu einem b kein a , dann ist die Funktion nicht surjektiv.
- Gibt es zu einem b zwei verschiedene a , d.h. $a_1 \neq a_2$ mit $f(a_1) = f(a_2) = b$, dann ist die Funktion nicht injektiv.

Andererseits gilt für jede Funktion f , dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, mit $f(a) = b$. Bijektive Funktionen sind somit 1:1 Zuordnungen von Elementen von A zu Elementen von B . Jedes $a \in A$ bekommt genau ein $b \in B$, und zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$.



9.6 Umkehrfunktion

Beispiel 9.26 Sei

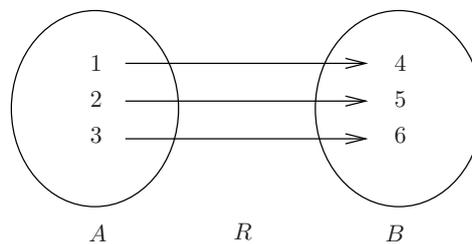
$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}.$$

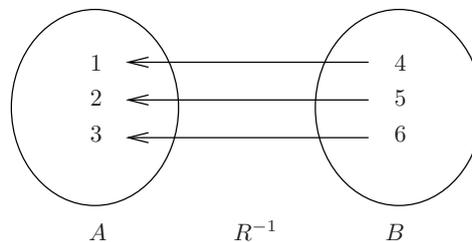
Dann ist $f = (A, B, R)$ eine bijektive Funktion. Es gilt

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 6.$$



Kehrt man in diesem Bild die Zuordnungspfeile um, erhält man die Umkehrrelation

$$R^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}.$$



Durch R^{-1} wird jedem Element aus B genau ein Element aus A zugeordnet. Damit ist

$$f^{-1} = (B, A, R^{-1})$$

wieder eine bijektive Funktion. Es gilt

$$f^{-1}(4) = 1, \quad f^{-1}(5) = 2, \quad f^{-1}(6) = 3.$$

Theorem 9.27

Ist (A, B, R) eine bijektive Funktion, dann ist auch (B, A, R^{-1}) eine bijektive Funktion.

Definition 9.28 (Umkehrfunktion)

Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven Funktion $f = (A, B, R)$ ist definiert durch

$$f^{-1} = (B, A, R^{-1}).$$

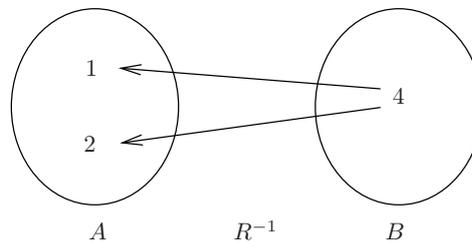
Nur bijektive Funktionen haben Umkehrfunktionen! Ist $f = (A, B, R)$ nicht bijektiv, dann ist $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ keine Funktion:

- Wenn f nicht injektiv ist, gibt es $a_1 \neq a_2$ mit $f(a_1) = f(a_2) = b$. Dann wäre aber $f^{-1}(b)$ nicht eindeutig und somit ist f^{-1} keine Funktion.
- Wenn f nicht surjektiv ist, existiert ein $b \in B$ so dass $f(a) \neq b$ für alle $a \in A$. Dann wäre aber $f^{-1}(b)$ undefiniert.

Beispiel 9.29 Sei

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ B &= \{4\} \\ R &= \{(1, 4), (2, 4)\}. \end{aligned}$$

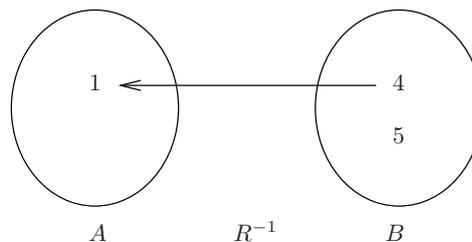
Dann ist $f = (A, B, R)$ nicht injektiv. Man sieht am Mengendiagramm, dass $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ keine Funktion ist, da $f^{-1}(4)$ nicht eindeutig ist.



Beispiel 9.30 Sei

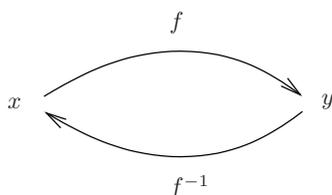
$$\begin{aligned} A &= \{1\} \\ B &= \{4, 5\} \\ R &= \{(1, 4)\}. \end{aligned}$$

Dann ist $f = (A, B, R)$ nicht surjektiv. Man sieht am Mengendiagramm, dass $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ keine Funktion ist, da $f^{-1}(5)$ undefiniert ist.



Terme für Umkehrfunktionen

Funktionen sind oft durch Terme definiert. Es stellt sich das Problem, wie man dann einen Term für die Umkehrfunktion findet. Hierfür ist folgendes Bild hilfreich:



Danach ist $f^{-1}(y)$ das x mit $f(x) = y$. Gesucht ist nun ein Term, mit dem man dieses x für ein gegebenes y berechnen kann.

Beispiel 9.31 Sei

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 3.$$

Für ein gegebenes x lässt sich $y = f(x)$ durch Auswerten des Funktionsterms berechnen. Ist nun aber y gegeben und x gesucht, muss man die Gleichung

$$y = 2x + 3$$

nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2x \\ x &= \frac{y - 3}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2}.$$

Da der Name der Funktionsvariablen egal ist, kann man y in x umbenennen, oft lässt man aber y stehen.

Wenn $f \in A \rightarrow B$ eine bijektive Funktion ist, hat die Gleichung

$$y = f(x)$$

für jedes $y \in B$ genau eine Lösung $x \in A$. Man kann auf diese Weise testen, ob eine Funktion bijektiv ist. Wenn die Gleichung für ein $x \in A$ nicht lösbar ist oder mehrere Lösungen hat, ist die Funktion nicht bijektiv.

Beispiel 9.32 Die Funktion

$$f \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2x + 3$$

hat den selben Funktionsterm wie im vorigen Beispiel, besitzt aber *keine* Umkehrfunktion, da sie nicht surjektiv ist.

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

würde z.B. der Zahl $y = 2$ den Funktionswert $-1/2$ zuordnen, was jedoch keine ganze Zahl ist.

Beispiel 9.33 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = x^2$$

ist bijektiv. Für $x \in \mathbb{R}_0^+$ hat die Gleichung

$$y = x^2$$

zunächst zwei Lösungen

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

Da aber $y \in \mathbb{R}_0^+$ verlangt ist, existiert nur genau eine Lösung. Damit ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

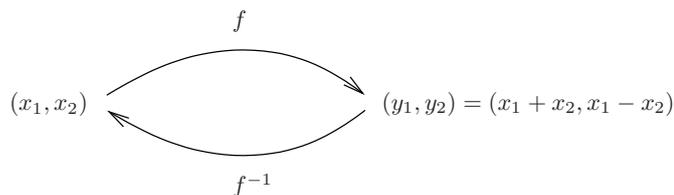
Beispiel 9.34 Abschließend noch ein etwas schwierigeres Beispiel. Sei

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Zunächst sieht man gar nicht direkt, dass f bijektiv ist. Man kann jedoch die entsprechende Gleichung aufstellen und zeigen, dass diese immer eindeutig lösbar ist. Sei

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2),$$

d.h.



Gegeben ist nun y_1, y_2 , gesucht x_1, x_2 . Erinnern wir uns daran, dass zwei Paare gleich sind genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind, siehe Theorem 5.2. Man erhält somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2, \end{aligned}$$

das man nach x_1, x_2 auflösen muss. Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2x_1 \\ x_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die Gleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= 2x_2 \\ x_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

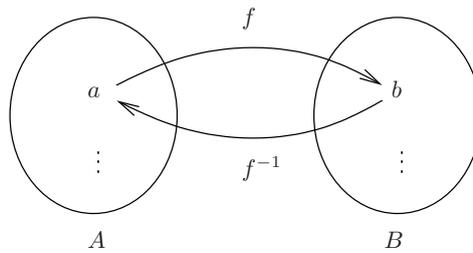
$$(x_1, x_2) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right).$$

Folglich ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right).$$

Komposition einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktion macht das rückgängig, was eine Funktion macht. Führt man die beiden hintereinander aus, geschieht somit nichts. Für $f \in A \rightarrow B$ und $f^{-1} \in B \rightarrow A$ ergibt sich folgendes Bild:



Für ein beliebiges $a \in A$ sei $f(a) = b$ und folglich $f^{-1}(b) = a$. Damit ist

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(a) &= f^{-1}(f(a)) \\ &= f^{-1}(b) \\ &= a. \end{aligned}$$

Die Funktion $f^{-1} \circ f \in A \rightarrow A$ macht somit nichts, außer das Argument als Funktionswert zurückliefern. Sie heißt daher Identitätsfunktion auf A .

Umgekehrt sei nun Für ein beliebiges $b \in B$ sei $f^{-1}(b) = a$ und folglich $f(a) = b$. Damit ist

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(b) &= f(f^{-1}(b)) \\ &= f(a) \\ &= b. \end{aligned}$$

Die Funktion $f \circ f^{-1} \in B \rightarrow B$ macht somit nichts, außer das Argument als Funktionswert zurückliefern. Sie heißt daher Identitätsfunktion auf B .

Beispiel 9.35 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = e^x$$

ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1} \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln(y).$$

Die Komposition ist somit die Identitätsfunktion.

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &\in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & (f^{-1} \circ f)(x) &= \ln(e^x) = x \\ f \circ f^{-1} &\in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, & (f \circ f^{-1})(y) &= e^{\ln(y)} = y. \end{aligned}$$

10 Folgen

Definition 10.1 (Folge)

Eine Folge ist eine Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{R} .

Beispiel 10.2 Die Funktion

$$f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ist eine Folge.

Die Funktionswerte einer Folge kann man für alle $x \in \mathbb{N}$ aufzählen. Folgen stellt man daher auch in der Form

$$f = \langle 1, 4, 9, 16, \dots \rangle$$

dar.

Für natürlichzahlige Variablen verwendet man häufig nicht das Symbol x sondern n . Weiterhin schreibt man bei Folgen i.a. f_n statt $f(n)$, d.h.

$$f_n = n^2.$$

Aus Gründen, die später ersichtlich werden, verwenden wir für Folgen i.a. nicht das Symbol f sondern x :

$$x_n = n^2.$$

Von Interesse ist das Verhalten einer Folge x_n wenn n gegen unendlich geht. Hier gibt es drei Fälle:

- **Konvergente Folge.** x_n nähert sich immer mehr einer reellen Zahl \hat{x} an. Die Folge x_n heißt dann konvergent mit Grenzwert \hat{x} . Man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$$

oder

$$x_n \rightarrow \hat{x} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beispiel:

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

- **Bestimmt divergente Folge.** x_n läuft gegen ∞ oder gegen $-\infty$. Die Folge x_n heißt dann bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ oder $-\infty$. Man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Beispiel:

$$x_n = -\frac{n!}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

- **Unbestimmt divergente Folge.** Folgen, die weder konvergent noch bestimmt divergent sind, heißen unbestimmt divergent, z.B.

$$x_n = (-1)^n \text{ oder } x_n = n \sin(n).$$

Am wichtigsten sind für unsere Zwecke die konvergenten Folgen.

10.1 Nullfolgen

Als einfacher Spezialfall werden zunächst Nullfolgen betrachtet. Dies sind Folgen mit Grenzwert Null, z.B.

$$x_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

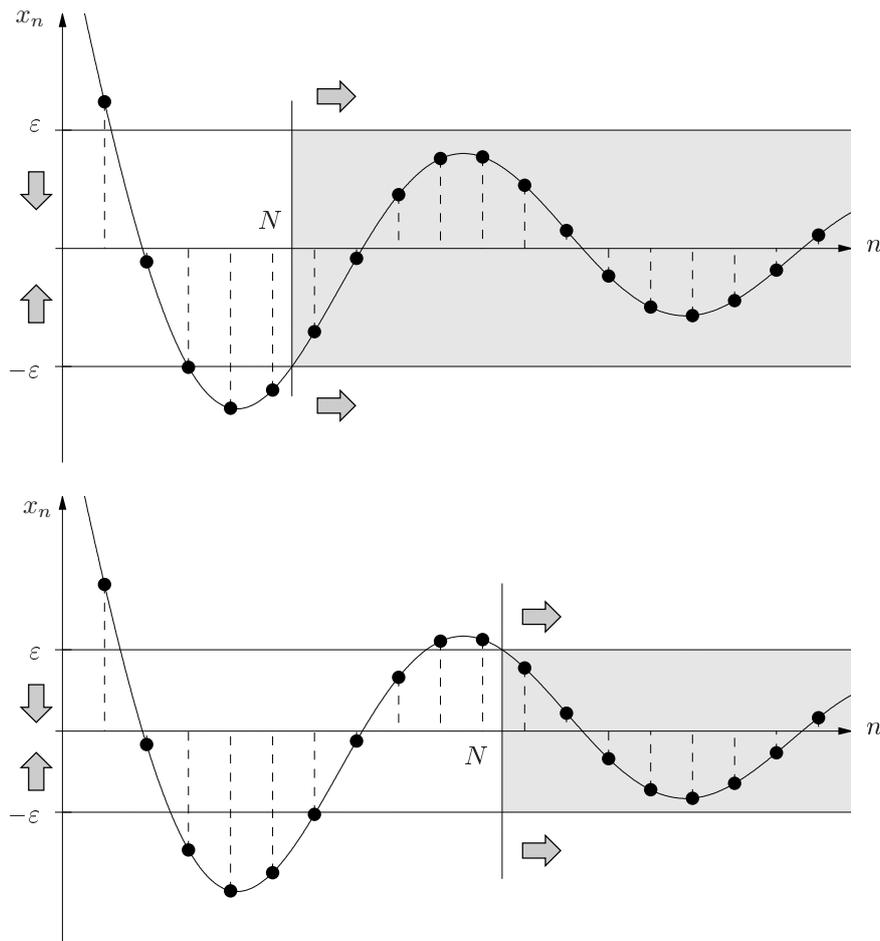
Nachdem intuitiv klar ist, was gemeint ist wenn man sagt, dass sich eine Folge immer mehr der Zahl Null annähert, ist nun eine exakte Definition erforderlich.

Stellen Sie sich eine kleine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und eine Folge x_n , die ab einem Punkt N zwischen $\pm\varepsilon$ bleibt, d.h.

für alle $n > N$ gilt

$$|x_n| < \varepsilon$$

Die Folge hält sich also ab einem bestimmten N nur noch im Bereich zwischen $\pm\varepsilon$ auf. Wenn dies für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ gilt, muss sich die Folge beliebig nah an Null annähern und auch dort bleiben.



Dies führt zu der (zugegebenermaßen nicht ganz einfachen) Definition:

Definition 10.3 (Nullfolge)

Eine Folge x_n heißt Nullfolge wenn gilt:

für jedes $\varepsilon > 0$

gibt es ein N so dass

für alle $n > N$ gilt, dass

$$|x_n| < \varepsilon$$

Beispiel 10.4 Die Folge

$$x_n = 1/n$$

ist offensichtlich eine Nullfolge, da die Werte von x_n für große n immer kleiner werden. Man kann dies auch formal wie folgt anhand der Definition zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Man muss nun eine Grenze N finden, so dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da $n \in \mathbb{N}$ und damit positiv ist, kann man diese Ungleichung wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} |x_n| &< \varepsilon \\ |1/n| &< \varepsilon \\ 1/n &< \varepsilon \\ n &> 1/\varepsilon. \end{aligned}$$

Die gesuchte Grenze ist somit $N = 1/\varepsilon$. Ist $n > N$, dann sind die o.g. Ungleichungen alle erfüllt und es gilt insbesondere $|x_n| < \varepsilon$.

Beispiel 10.5 Ein besonders einfaches Beispiel einer Nullfolge ist die konstante Folge

$$x_n = 0.$$

In diesem Fall ist der Wert von N egal, da ohnehin für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_n| < \varepsilon.$$

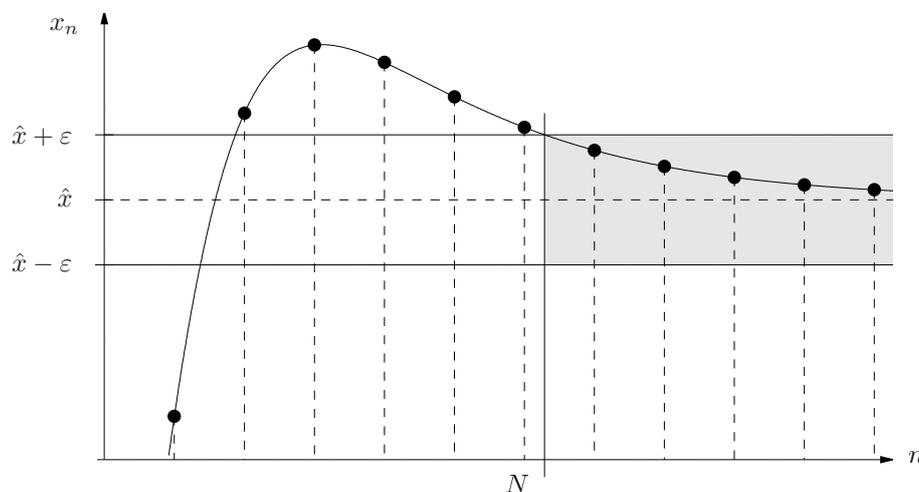
10.2 Konvergente Folgen

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall einer konvergenten Folge x_n mit Grenzwert \hat{x} . Statt der Forderung $|x_n| < \varepsilon$ muss nun gefordert werden, dass x_n um weniger als ε von \hat{x} abweicht. Dies wird mit

$$x_n - \hat{x} < \varepsilon \quad \text{und} \quad x_n - \hat{x} > -\varepsilon$$

ausgedrückt bzw. kompakter durch

$$|x_n - \hat{x}| < \varepsilon.$$



Definition 10.6 (Konvergente Folge mit Grenzwert \hat{x})

Eine Folge x_n heißt konvergent mit Grenzwert \hat{x} wenn gilt:

für jedes $\varepsilon > 0$

gibt es ein N so dass

für alle $n > N$ gilt, dass

$$|x_n - \hat{x}| < \varepsilon$$

Ist x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert \hat{x} , schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$$

oder auch einfach

$$x_n \rightarrow \hat{x}.$$

Beispiel 10.7 Sei

$$x_n = \frac{1-n}{1+n}$$

Setzt man für n große Zahlen ein, kommt man zu der Vermutung, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1.$$

Nachfolgend wird dies bewiesen: Laut Definition muss es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N geben, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n - (-1)| < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Gesucht ist nun die Grenze N , ab der

$$|x_n + 1| < \varepsilon$$

gilt. Umformen der Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-n}{1+n} + 1 \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{1-n}{1+n} + \frac{1+n}{1+n} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2}{1+n} \right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Betragsstriche können weggelassen werden, da $n \in \mathbb{N}$ und der Term somit immer positiv ist.

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+n} &< \varepsilon \\ 2 &< \varepsilon(1+n) \\ 2/\varepsilon &< 1+n \\ n &> 2/\varepsilon - 1. \end{aligned}$$

Mit der Wahl

$$N = 2/\varepsilon - 1$$

gilt somit $|x_n + 1| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Damit ist bewiesen, dass die Folge x_n tatsächlich gegen $\hat{x} = -1$ konvergiert.

Verschiebt man eine konvergente Folge x_n mit Grenzwert \hat{x} um \hat{x} nach unten, erhält man eine Nullfolge.

Theorem 10.8

Für jede Folge x_n gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$$

genau dann wenn die Folge $y_n = x_n - \hat{x}$ eine Nullfolge ist.

Dies folgt direkt aus der Definition einer konvergenten Folge bzw. Nullfolge.

10.3 Rechengesetze für konvergente Folgen

Es gibt ein paar Rechengesetze, mit deren Hilfe man entscheiden kann, ob eine Folge konvergent ist und gegebenenfalls ihren Grenzwert berechnen kann.

Theorem 10.9 (Rechengesetze für Grenzwerte konvergenter Folgen)

Seien x_n und y_n konvergente Folgen mit $x_n \rightarrow \hat{x}$ und $y_n \rightarrow \hat{y}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_n + y_n &\rightarrow \hat{x} + \hat{y} \\ x_n - y_n &\rightarrow \hat{x} - \hat{y} \\ c x_n &\rightarrow c \hat{x} \\ x_n y_n &\rightarrow \hat{x} \hat{y} \\ x_n / y_n &\rightarrow \hat{x} / \hat{y} \quad \text{falls } \hat{y} \neq 0 \text{ und } y_n \neq 0 \text{ für alle } n. \end{aligned}$$

Grafisch läßt sich Theorem 10.9 durch ein kommutatives Diagramm für den Fall der Addition wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccc} x_n, y_n & \xrightarrow{+} & x_n + y_n \\ \lim \downarrow & & \downarrow \lim \\ \hat{x}, \hat{y} & \xrightarrow{+} & \hat{x} + \hat{y} \end{array}$$

Beispiel 10.10 Gegeben ist die Folge

$$x_n = \frac{2^n - 3}{3^n + 1}.$$

Man wäre versucht, an dieser Stelle Theorem 10.9 auf die Folgen $2^n - 3$ und $3^n + 1$ anzuwenden. Das klappt aber nicht, weil beides keine konvergenten sondern bestimmt divergente Folgen sind und man auf den undefinierten Ausdruck ∞/∞ stoßen würde. Der Trick ist, zuerst Zähler und Nenner durch 3^n zu dividieren:

$$\frac{2^n - 3}{3^n + 1} = \frac{(2/3)^n - 1/3^{n-1}}{1 + 1/3^n}.$$

In diesem Term treten überall konvergente Folgen auf. Es gilt

$$\begin{aligned} (2/3)^n &\rightarrow 0 \\ 1/3^{n-1} &\rightarrow 0 \\ 1/3^n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung von Theorem 10.9 ergibt nun

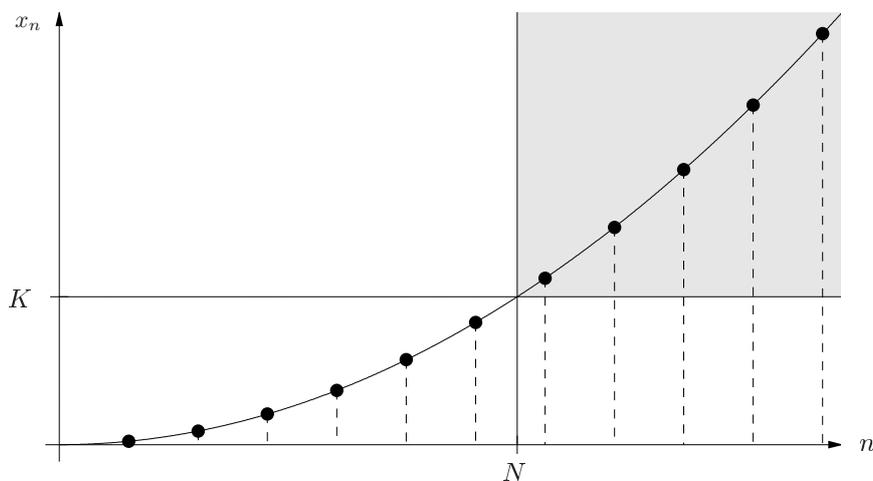
$$\begin{aligned} (2/3)^n - 1/3^{n-1} &\rightarrow 0 - 0 = 0 \\ 1 + 1/3^n &\rightarrow 1 + 0 = 1 \\ \frac{(2/3)^n - 1/3^{n-1}}{1 + 1/3^n} &\rightarrow \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

10.4 Bestimmt divergente Folgen

Stellen wir uns eine sehr große Zahl K vor und eine Folge, die ab einem bestimmten N immer oberhalb von K bleibt, d.h.

$$\begin{aligned} &\text{für alle } n > N \text{ gilt} \\ &x_n > K. \end{aligned}$$

Wenn dies für beliebig große K gilt, muss die Folge gegen unendlich gehen.



Definition 10.11 (Bestimmt divergente Folge)

Eine Folge x_n heißt bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ wenn gilt

$$\begin{aligned} &\text{für jedes } K \\ &\text{gibt es ein } N \text{ so dass} \\ &\text{für alle } n > N \text{ gilt} \\ &x_n > K \end{aligned}$$

Entsprechend heißt eine Folge x_n bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$ wenn gilt

$$\begin{aligned} &\text{für jedes } K \\ &\text{gibt es ein } N \text{ so dass} \\ &\text{für alle } n > N \text{ gilt} \\ &x_n < K \end{aligned}$$

Beispiel 10.12 Die Folge

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}$$

ist bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ . Dies kann man anhand der Definition wie folgt zeigen.

Sei K beliebig aber fest. Es muss nun ein N gefunden werden so dass für alle $n > N$ gilt $x_n > K$. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}x_n &> K \\ \frac{n^2}{n+1} &> K \\ n^2 &> Kn + K \\ n^2 - Kn - K &> 0.\end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht eine nach oben geöffnete Parabel. Mit der Mitternachtsformel berechnet man die größere der beiden Nullstellen:

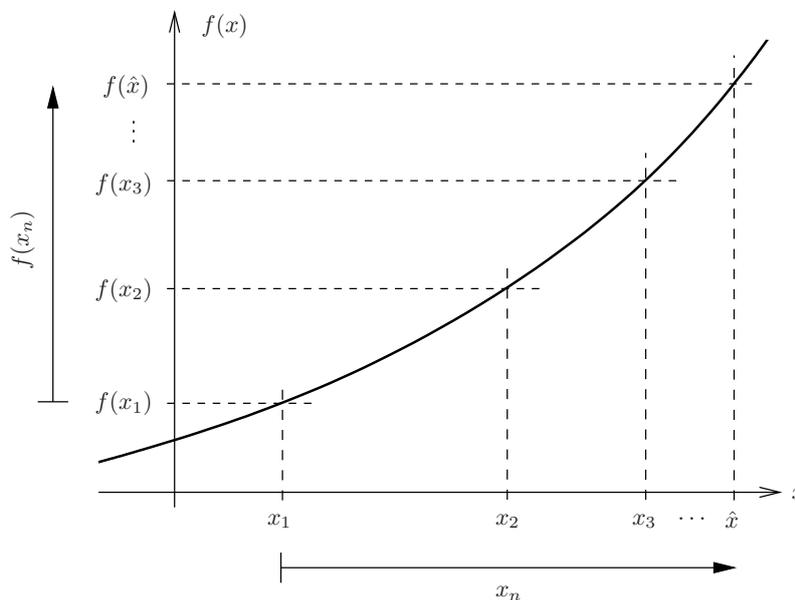
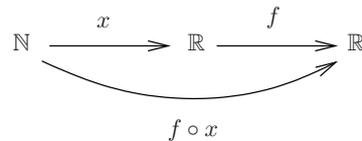
$$N = \frac{K + \sqrt{K^2 + 4K}}{2}$$

Falls die Diskriminante negativ ist, ist der Wert von N beliebig. Mit diesem Wert von N sind die o.g. Ungleichungen erfüllt für alle $n > N$. Insbesondere gilt für alle $n > N$, dass $x_n > K$.

10.5 Funktionen von Folgen

Die Komposition einer Folge $x \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ und einer Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt wieder eine Folge:

$$f \circ x \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ x)(n) = f(x(n)) = f(x_n).$$



Sei x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert \hat{x} , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob auch $f(x_n)$ eine konvergente Folge ist und ob wie zu erwarten gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}).$$

Diese Gleichung wird durch das folgende Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{array}{ccc}
 x_n & \xrightarrow{f} & f(x_n) \\
 \lim \downarrow & & \downarrow \lim \\
 \hat{x} & \xrightarrow{f} & f(\hat{x})
 \end{array}$$

In "einfachen" Fällen ist dies tatsächlich zutreffend, d.h. es ist egal ob man

- zuerst die Funktion f anwendet und dann den Grenzwert der Folge $f(x_n)$ berechnet oder
- zuerst den Grenzwert \hat{x} berechnet und darauf die Funktion f anwendet.

Beispiel 10.13 Sei

$$\begin{aligned}x_n &= 2 + \frac{1}{n} \\ f(x) &= x^2.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 2 \\ f(\hat{x}) &= 4 \\ f(x_n) &= \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 4\end{aligned}$$

und tatsächlich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}).$$

Es gibt jedoch auch Fälle, in denen dies nicht gilt:

Beispiel 10.14 Sei

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{n} \\ f(x) &= \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 0 \\ f(\hat{x}) &= 0 \\ f(x_n) &= \text{sign}(1/n) = 1 \quad \text{da } n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= 1\end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(\hat{x}).$$

Probleme entstehen immer dann, wenn f an der Stelle \hat{x} einen Sprung, eine Lücke oder einen Ausreißer hat. Um exakt zu beschreiben, was damit gemeint ist, benötigt man das Konzept des Grenzwerts einer Funktion f an einer Stelle \hat{x} .

11 Grenzwert von Funktionen

Bisher haben wir den Begriff Grenzwert nur auf Folgen x_n angewandt. Nachfolgend wird der Begriff auch für Funktionen $f(x)$ definiert. Der Grenzwertbegriff wird vor allem dann benötigt, wenn Funktionen an einer Stelle \hat{x} etwas “Außergewöhnliches” tun, d.h. einen Sprung, eine Definitionslücke, oder einen Ausreißer haben. Anschaulich ist der Grenzwert einer Funktion an der Stelle \hat{x} der Wert, auf den der Funktionswert $f(x)$ zuläuft, wenn x auf \hat{x} zuläuft. Man schreibt hierfür

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x).$$

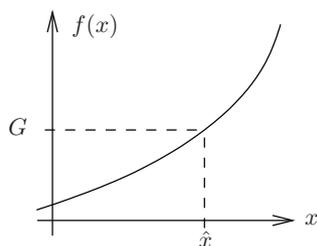
Die anschauliche Formulierung, “mit x auf \hat{x} zuzulaufen” bedeutet, dass man eine Folge x_n betrachtet, die gegen \hat{x} konvergiert. Die Frage ist dann, ob und wogegen die Folge $f(x_n)$ konvergiert, siehe voriges Kapitel.

11.1 Veranschaulichung

Zunächst ein paar Bilder und Beispiele, die die Ausnahmesituationen illustrieren.

Normalfall

Im Normalfall gilt: Wenn x auf \hat{x} zuläuft, dann läuft $f(x)$ auf den Grenzwert $G = f(\hat{x})$ zu.



Beispiel 11.1

$$\hat{x} = 3, \quad f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = 9 = f(\hat{x}).$$

Läuft man z.B. mit der Folge

$$x_n = 3 + 1/n$$

auf 3 zu, dann ist die Folge der Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(x_n) &= (3 + 1/n)^2 \\ &= 9 + 6/n + 1/n^2 \end{aligned}$$

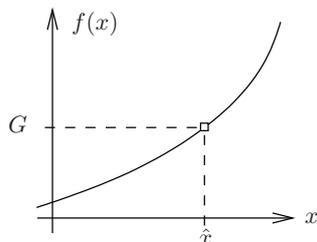
und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 9.$$

Wenn x gegen 3 läuft, dann läuft $f(x)$ gegen 9. Dies gilt nicht nur für die Folge $x_n = 3 + 1/n$ sondern für *jede* gegen 3 konvergente Folge.

Definitionslücke

Bei einer Definitionslücke hat f an der Stelle \hat{x} keinen Funktionswert, aber einen Grenzwert G .

**Beispiel 11.2**

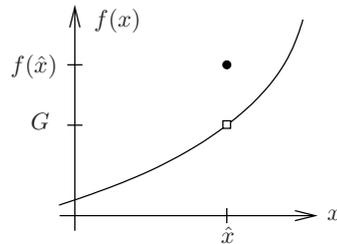
$$\hat{x} = 3, \quad f \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = 9, \quad f(\hat{x}) \text{ ist undefiniert.}$$

Wie im vorigen Beispiel gilt für die Folge $x_n = 3 + 1/n$, die auf 3 zuläuft, dass die Folge $f(x_n)$ gegen 9 läuft, obwohl $f(3)$ nicht definiert ist. Dies gilt wiederum für *jede* gegen 3 konvergente Folge. Einschränken muss man lediglich, dass $f(x_n)$ definiert sein muss.

Ausreißer

Wenn f an der Stelle \hat{x} einen Ausreißer hat, dann hat f dort einen Grenzwert G . Dieser ist jedoch nicht gleich dem Funktionswert $f(\hat{x})$.

**Beispiel 11.3**

$$\hat{x} = 3, \quad f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \neq \hat{x} \\ 10 & \text{falls } x = \hat{x} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = 9, \quad f(\hat{x}) = 10.$$

Auch hier sieht man wieder am Beispiel der Folge $x_n = 3 + 1/n$, dass $f(x_n)$ gegen 9 konvergiert.

Es gibt jedoch bei Ausreißern eine kleine Gemeinsamkeit. Die triviale Folge

$$x_n = 3$$

konvergiert auch gegen 3. Es gilt jedoch

$$f(x_n) = 10,$$

und diese Folge konvergiert *nicht* gegen 9. Noch schlimmer ist die Folge

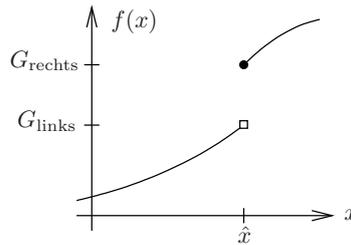
$$x_n = \begin{cases} 3 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3 + 1/n & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Auch diese Folge konvergiert gegen 3, die zugehörige Folge $f(x_n)$ ist jedoch unbestimmt divergent.

Man kann das Problem aber leicht beheben, indem man nur Folgen x_n zulässt, für die $x_n \neq \hat{x}$ für alle n .

Sprung

Wenn f an der Stelle \hat{x} einen Sprung hat, dann hat f dort keinen Grenzwert. Läuft man von links mit x auf \hat{x} zu, dann läuft $f(x)$ gegen G_{links} , läuft man von rechts mit x auf \hat{x} zu, dann läuft $f(x)$ gegen G_{rechts} . Man sagt, dass f dann einen linksseitigen Grenzwert G_{links} und einen rechtsseitigen Grenzwert G_{rechts} hat, aber da $G_{\text{links}} \neq G_{\text{rechts}}$, hat f an der Stelle \hat{x} keinen Grenzwert.

**Beispiel 11.4**

$$\hat{x} = 3, \quad f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < \hat{x} \\ \sqrt{x} & \text{falls } x \geq \hat{x} \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \hat{x} \\ x < \hat{x}}} f(x) = 9, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \hat{x} \\ x > \hat{x}}} f(x) = \sqrt{3}.$$

Für $x_n = 3 - 1/n$ gilt

$$f(x_n) = (3 - 1/n)^2$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 9.$$

Für $x_n = 3 + 1/n$ gilt

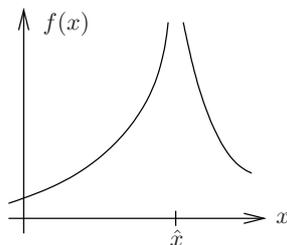
$$f(x_n) = \sqrt{3 + 1/n}$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sqrt{3}.$$

Pol ohne Vorzeichenwechsel

Der Grenzwert von f bei \hat{x} kann auch im Unendlichen liegen.

**Beispiel 11.5**

$$\hat{x} = 3, \quad f \in \mathbb{R} \setminus \{\hat{x}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(x - \hat{x})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \infty.$$

Für die Folge $x_n = 3 + 1/n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{(3 + 1/n - 3)^2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

Bei einem Pol mit Vorzeichenwechsel ist die Situation gleich wie bei einem Sprung: Die Funktion hat dann an der Polstelle keinen Grenzwert.

11.2 Formale Definition

Das Zulaufen von x auf \hat{x} lässt sich durch eine Folge x_n beschreiben, die gegen \hat{x} konvergiert. Es soll dabei keine Rolle spielen, in welcher Weise x auf \hat{x} zuläuft, d.h. von links, rechts, alternierend, schnell, langsam, usw. Wir betrachten daher *alle* gegen \hat{x} konvergenten Folgen x_n .

Da wir die Konvergenz der zugehörigen Folge $f(x_n)$ untersuchen wollen, beschränken wir uns jedoch auf die Folgen, für die $f(x_n)$ definiert ist. Ist also f nicht auf ganz \mathbb{R} sondern nur auf einer Menge $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ definiert, dann muss $x_n \in \mathbb{D}$ gelten für alle n .

Wie Beispiel 11.3 zeigt, müssen wir außerdem fordern, dass $x_n \neq \hat{x}$ sein soll für alle n . Die Folge nähert sich also \hat{x} , tritt aber nie auf \hat{x} drauf.

Wenn nun für jede solche Folge x_n die zugehörige Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ immer gegen *den selben* Grenzwert G konvergiert, hat f an der Stelle \hat{x} den Grenzwert G .

Zugegebenermaßen ist das sehr viel Maschinerie um zu beschreiben, dass wenn x auf \hat{x} zuläuft, $f(x)$ gegen G läuft. Wenn Sie eine einfachere Möglichkeit finden, wäre das super.

Definition 11.6 (Grenzwert einer Funktion)

Eine Funktion $f \in \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle \hat{x} den Grenzwert G , wenn

für jede Folge x_n mit

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$
- $x_n \in \mathbb{D}$ und $x_n \neq \hat{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = G.$$

Wie bei Folgen heißt ein Grenzwert $G = \pm\infty$ *uneigentlicher Grenzwert*.

11.3 Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle \hat{x} zu berechnen, ist manchmal etwas aufwändig. Hierfür gibt es folgende Rechengesetze.

Theorem 11.7 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen)

Seien $f, g \in \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = F$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} g(x) = G$$

mit $F, G \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} (f(x) + g(x)) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} (f(x) - g(x)) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} (f(x)g(x)) = FG$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} (f(x)/g(x)) = F/G \quad \text{falls } G \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} cf(x) = cF \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

12 Stetigkeit

Viele Theoreme über Funktionen gelten nur im “Normalfall”, d.h. wenn die Funktion an der betreffenden Stelle keinen Sprung, keine Definitionslücke und keinen Ausreißer hat. Der Fachbegriff hierfür heißt Stetigkeit. Anschaulich ist eine Funktion stetig, wenn man ihren Graph ohne abzusetzen zeichnen kann.

Definition 12.1 (Stetigkeit)

Eine Funktion $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle \hat{x} wenn

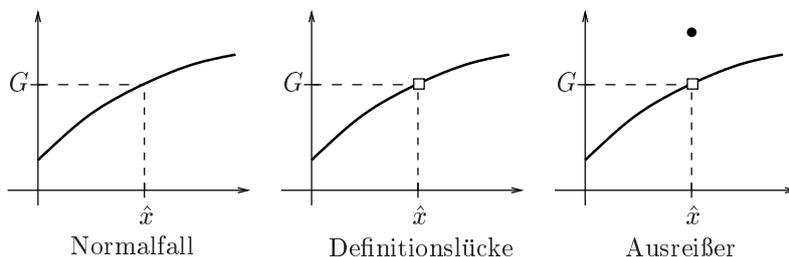
- $f(\hat{x})$ definiert ist, d.h. $\hat{x} \in D$
- $f(x)$ einen Grenzwert bei \hat{x} hat
- der Grenzwert von f bei \hat{x} gleich dem Funktionswert von f bei \hat{x} , ist, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x}).$$

f heißt stetig auf einer Menge A wenn f an jeder Stelle $\hat{x} \in A$ stetig ist.

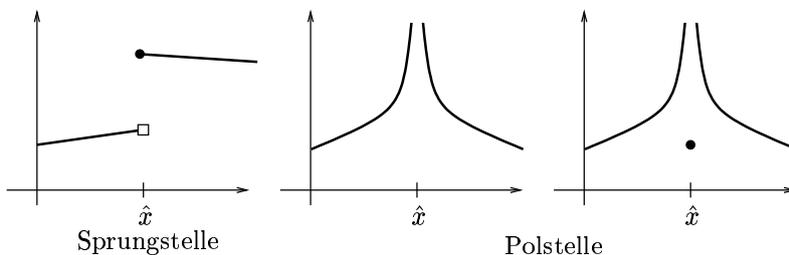
Die Existenz eines Grenzwerts an der Stelle \hat{x} ist somit eine notwendige Voraussetzung für Stetigkeit, aber nicht hinreichend. Stetigkeit ist folglich eine stärkere Forderung als nur die Existenz eines Grenzwerts.

In folgenden Situationen hat f an der Stelle \hat{x} den Grenzwert G :



Im linken Bild ist f bei \hat{x} stetig, im mittleren und rechten Bild nicht.

In folgenden Situationen hat f an der Stelle \hat{x} keinen Grenzwert und ist dort folglich auch nicht stetig.



Beispiel 12.2 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)$$

ist an der Stelle \hat{x} stetig für jedes $\hat{x} \in \mathbb{R}$. Damit ist f stetig auf \mathbb{R} .

Beispiel 12.3 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

ist stetig auf \mathbb{R} .

Beispiel 12.4 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

ist an der Stelle $\hat{x} = 0$ nicht definiert und dort folglich auch nicht stetig. Sie ist aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiel 12.5 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert und ist dort folglich auch nicht stetig. Sie ist aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beispiel 12.6 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \neq 3 \\ 7 & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

hat an der Stelle $\hat{x} = 3$ zwar einen Funktionswert 7 und einen Grenzwert 9, da diese jedoch ungleich sind, ist f bei \hat{x} nicht stetig. f ist aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Beispiel 12.7 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x)$$

ist stetig auf \mathbb{R}^+ .

Nachfolgendes Theorem hilft bei der Entscheidung, ob eine Funktion stetig ist oder nicht.

Theorem 12.8 (Stetigkeitssatz)

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig an der Stelle \hat{x} , dann auch

$$\begin{aligned} f(x) + g(x), \\ f(x) - g(x), \\ f(x)g(x), \\ f(x)/g(x) \quad \text{falls } g(\hat{x}) \neq 0. \end{aligned}$$

Beispiel 12.9 Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ sind auf ganz \mathbb{R} stetig. Damit ist die Funktion

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

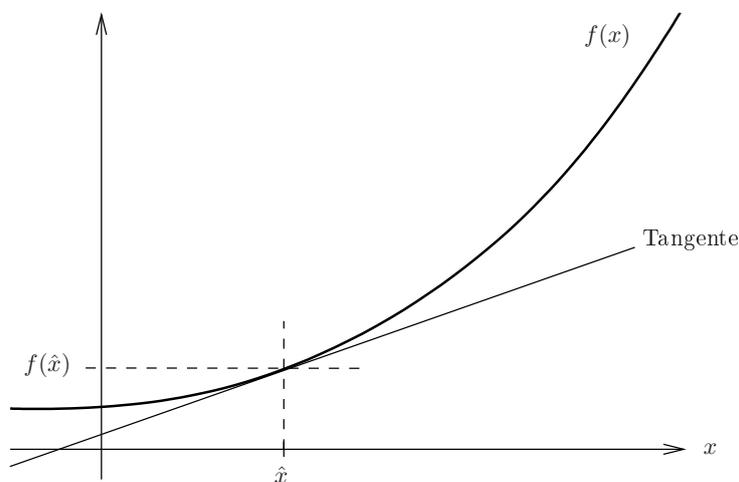
stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13 Differentialrechnung

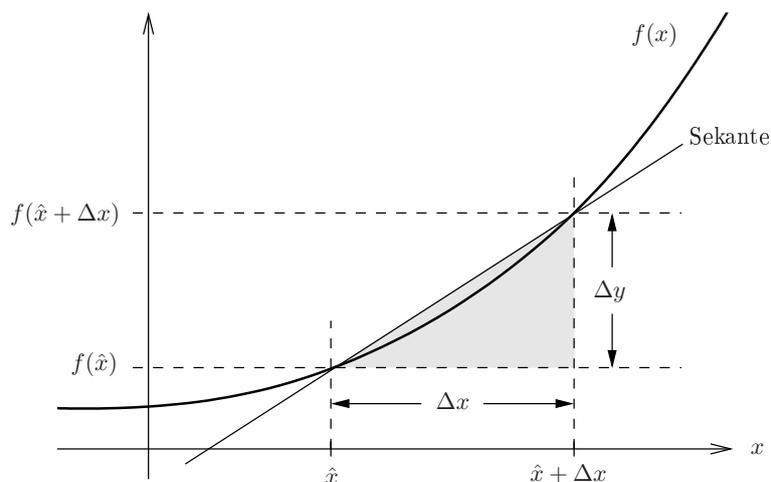
13.1 Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigung

In der Differentialrechnung beschäftigt man sich mit der Frage, wie steil eine Funktion f an einer Stelle \hat{x} ist. Dieser Wert wird als Ableitung von f bei \hat{x} bezeichnet, kurz $f'(\hat{x})$.

Die Frage kann man dadurch vereinfachen, dass man die Tangente an f im Punkt \hat{x} anlegt. Die Steigung der Tangente ist dann gleich der Steigung von f bei \hat{x} und die Steigung einer Geraden lässt sich leicht berechnen.



Problematisch ist jedoch, dass man die Tangente ja gar nicht kennt. Man kann sie jedoch durch eine Sekante approximieren. Hierzu wählt man einen weiteren Punkt $\hat{x} + \Delta x$ und legt die Gerade durch die Funktionswerte von f bei \hat{x} und $\hat{x} + \Delta x$. Macht man Δx nun immer kleiner, geht die Sekante in die Tangente über und folglich die Sekantensteigung in die Tangentensteigung.



Die Steigung der Sekante ist nun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}.$$

Da im Zähler und Nenner Differenzen stehen, heißt dieser Term Differenzenquotient.

Die Tangentensteigung erhält man, indem man Δx immer kleiner macht und den Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \rightarrow 0$ berechnet, d.h.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

Da Δx im Nenner steht, ist dieser Wert für $\Delta x = 0$ nicht definiert. Die Hoffnung ist aber, dass der Grenzwert bei $\Delta x = 0$ existiert, da sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null gehen. Oft ist dies der Fall, aber leider nicht immer. Wenn der Grenzwert existiert, heißt f an der Stelle \hat{x} differenzierbar.

Definition 13.1 (Differenzierbarkeit)

Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle \hat{x} wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x}$$

existiert und endlich ist.

Die Funktion $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar wenn f differenzierbar an allen Stellen $\hat{x} \in \mathbb{D}$ ist.

Definition 13.2 (Ableitungsfunktion)

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitungsfunktion von f ist definiert durch

$$f' \in D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Damit f an der Stelle \hat{x} differenzierbar ist, muss f zumindest stetig sein bei \hat{x} :

- f muss einen Funktionswert bei \hat{x} haben, da $f(\hat{x})$ im Zähler auftritt.
- f muss einen Grenzwert bei \hat{x} haben, da sonst der Teilterm $f(\hat{x} + \Delta x)$ im Zähler für $\Delta x \rightarrow 0$ undefiniert ist.
- Funktionswert und Grenzwert von f bei \hat{x} müssen gleich sein, sonst geht der Zähler nicht gegen Null. Da aber Δx im Nenner gegen Null geht, würde in diesem Fall der Bruch nicht gegen einen endlichen Wert gehen.

Somit ist Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit. Stetigkeit genügt aber nicht, es gibt Funktionen die zwar stetig sind, aber nicht differenzierbar.

13.2 Beispiele für Ableitungen

Beispiel 13.3 Sei

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Für einen festen Arbeitspunkt \hat{x} und $\Delta x \neq 0$ ist die Sekantensteigung von f zwischen \hat{x} und $\hat{x} + \Delta x$ nach der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Formel

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{(\hat{x} + \Delta x)^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\hat{x}^2 + 2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2 - \hat{x}^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2\hat{x}\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2\hat{x} + \Delta x. \end{aligned}$$

Der wichtige Schritt hierbei war, dass Δx gekürzt werden kann und aus dem Nenner verschwindet. Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, mit dem die Sekantensteigung in die Tangentensteigung übergeht, ist jetzt einfach.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\hat{x} + \Delta x = 2\hat{x}.$$

Damit ist

$$f'(\hat{x}) = 2\hat{x}.$$

Da der Grenzwert für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}$ existiert, ist die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$$

Beispiel 13.4 Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Für einen festen Arbeitspunkt $\hat{x} \neq 0$ und $\Delta x \neq 0$ ist die Sekantensteigung von f zwischen \hat{x} und $\hat{x} + \Delta x$

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{\hat{x} + \Delta x} - \frac{1}{\hat{x}}}{\Delta x} \\ &= \left(\frac{1}{\hat{x} + \Delta x} - \frac{1}{\hat{x}} \right) \frac{1}{\Delta x} \\ &= \frac{\hat{x} - (\hat{x} + \Delta x)}{\hat{x}(\hat{x} + \Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\ &= \frac{-\Delta x}{\hat{x}(\hat{x} + \Delta x)} \frac{1}{\Delta x} \\ &= -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x} + \Delta x)}. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, mit dem die Sekantensteigung in die Tangentensteigung übergeht, ist jetzt einfach. Für $\hat{x} \neq 0$ gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{\hat{x}(\hat{x} + \Delta x)} = -\frac{1}{\hat{x}^2}.$$

Damit ist

$$f'(\hat{x}) = -\frac{1}{\hat{x}^2}.$$

Da der Grenzwert für alle $\hat{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, ist die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Beispiel 13.5 Sei

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Die Sekantensteigung von f zwischen \hat{x} und $\hat{x} + \Delta x$ ist

$$\frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} - \sqrt{\hat{x}}}{\Delta x}.$$

Da man an dieser Stelle den Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ noch nicht direkt berechnen kann, muss man weiter vereinfachen. Der Trick ist, den Bruch mit $\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}$ zu erweitern und die zweite Binomische Formel zu verwenden.

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} - \sqrt{\hat{x}})(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} &= \frac{(\hat{x} + \Delta x) - \hat{x}}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}}. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ ist jetzt einfach.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\hat{x} + \Delta x} + \sqrt{\hat{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{x}}} \quad \text{falls } \hat{x} \neq 0.$$

Da für $\hat{x} = 0$ nur ein uneigentlicher Grenzwert ∞ existiert, ist $f(x)$ an der Stelle $\hat{x} = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Damit ist die auf \mathbb{R}^+ eingeschränkte Funktion

$$f \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

differenzierbar und hat die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Nach diesem Schema lassen sich weitere Ableitungsfunktionen von Standardfunktionen berechnen. Folgende Ableitungen sollten Sie aber im Kopf haben:

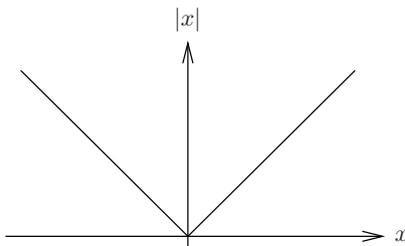
$$\begin{aligned}f(x) &= \text{const} & f'(x) &= 0 \\f(x) &= x^a & f'(x) &= ax^{a-1}, a \in \mathbb{R} \\f(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \cos(x) \\f(x) &= \cos(x) & f'(x) &= -\sin(x) \\f(x) &= \tan(x) & f'(x) &= 1 + \tan(x)^2 \\f(x) &= e^x & f'(x) &= e^x \\f(x) &= \ln(x) & f'(x) &= 1/x.\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass $1/x$ und \sqrt{x} Spezialfälle von x^a sind für $a = -1$ bzw. $a = 1/2$.

Beispiel 13.6 Abschließend ein Beispiel, wo der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \rightarrow 0$ nicht existiert. Sei

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Gesucht ist die Steigung von f an der Stelle $\hat{x} = 0$.



Die Betragsfunktion ist zwar auf ganz \mathbb{R} stetig, man sieht aber am Schaubild, dass man bei $\hat{x} = 0$ aufgrund des Knicks keine Tangente anlegen kann. Dies bestätigt sich auch rechnerisch.

Die Sekantensteigung zwischen \hat{x} und $\hat{x} + \Delta x$ berechnet sich für $\hat{x} = 0$ wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{x} + \Delta x) - f(\hat{x})}{\Delta x} &= \frac{|\hat{x} + \Delta x| - |\hat{x}|}{\Delta x} \\ &= \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} \quad \text{da } \hat{x} = 0 \\ &= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{falls } \Delta x < 0 \end{cases} \\ &= \text{sign}(\Delta x). \end{aligned}$$

Da diese Funktion einen Sprung an der Stelle $\Delta x = 0$ hat, ist f an der Stelle $\hat{x} = 0$ nicht differenzierbar.

Für alle anderen $\hat{x} \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar, d.h.

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

ist differenzierbar und hat die Ableitungsfunktion

$$f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \text{sign}(x).$$

Anschaulich kann man sich die Situationen für Existenz eines Grenzwerts, Stetigkeit und Differenzierbarkeit wie folgt merken:

- Wenn f bei \hat{x} keinen Sprung hat, hat f dort einen Grenzwert.
- Wenn f zusätzlich bei \hat{x} keine Lücke und keinen Ausreißer hat, ist f dort stetig.
- Wenn f zusätzlich bei \hat{x} keinen Knick und keine vertikale Tangente hat, ist f dort differenzierbar.

13.3 Differentialnotation

Um die Notation zu vereinfachen, führt man sog. Differentiale ein. Es handelt sich nicht um ein neues Konzept, man möchte die Sache nur etwas übersichtlicher darstellen und das Limesymbol weglassen.

Anschaulich ist mit dem Symbol dx ein “unendlich kleines” Δx gemeint. Solche unendlich kleinen Zahlen heißen Differentiale. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ lässt sich damit viel einfacher schreiben:

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Da dx sowieso unendlich klein ist, braucht man keinen Grenzübergang mehr hinzuschreiben. Natürlich haben wir nicht definiert, was “unendlich klein” ist und werden dies auch nicht tun. Das Mysterium hinter Differentialen klärt sich viel einfacher:

Definition 13.7 (Differential)

Sei $t(dx)$ ein Term, in dem das Symbol dx auftritt und $t(\Delta x)$ der Term, in dem jedes Auftreten von dx in $t(dx)$ durch ein neues Symbol Δx ersetzt wurde. Dann ist

$$t(dx) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} t(\Delta x).$$

Schreibt man also dx in einem Term, meint man den Grenzwert des Terms für $\Delta x \rightarrow 0$, wobei jedes dx durch Δx im Term ersetzt wurde.

So ist z.B.

$$x + dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \Delta x = x.$$

Rechnen mit Differentialen führt oft zur Verwirrung. So ist z.B.

$$dx = 0$$

völlig korrekt, aber trotzdem darf dx im Nenner auftreten und es gilt z.B.

$$\frac{dx}{dx} = 1.$$

Ersetzt man dx durch Grenzwerte, wird dies klar:

$$\begin{aligned} dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \\ \frac{dx}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Die Verwirrung kommt daher, dass man bei einem Bruch den Grenzübergang im Zähler und Nenner nur dann unabhängig voneinander durchführen darf, wenn der Grenzwert des Nenners nicht Null ist, siehe Theorem 11.7 auf Seite 72.

Beispiel 13.8 Mit dieser Definition von dx kann man die Ableitung von $f(x) = x^2$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2}{dx} \\ &= \frac{2x dx + dx^2}{dx} \\ &= 2x + dx \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt sieht falsch aus. In der ganzen Rechnung wurde vorausgesetzt, dass $dx \neq 0$ ist, wieso kann man es dann am Ende einfach weglassen? Unter Verwendung des Limesymbols und ohne Differentiale wird dies klar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Den Term

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

nennt man Differentialquotient. Wenn dx unendlich klein ist, dann ist auch der Zähler unendlich klein und somit ebenfalls ein Differential. Man kürzt daher ab

$$df(x) = f(x+dx) - f(x).$$

Damit lässt sich die Ableitung noch kompakter schreiben.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Manchmal schreibt man auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Hierbei ist mit d/dx der Ableitungsoperator gemeint. Für die Ableitung der Sin-Funktion kann man z.B. schreiben

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Obwohl die Differentialnotation viele Dinge vereinfacht, muss man aufpassen, dass es nicht zu Widersprüchen kommt. Es wurde gezeigt, dass

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Korrekt ist auch

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx$$

da auf beiden Seiten der Grenzwert Null ist.

Korrekt wäre aus dem gleichen Grund

$$f(x+dx) - f(x) = 5f'(x)dx$$

da

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x)}_{=0} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5f'(x)\Delta x}_{=0}.$$

Hieraus kann jedoch *nicht* geschlossen werden, dass

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 5f'(x).$$

Laut der Rechengesetze für Grenzwerte (Theorem 11.7 auf Seite 72) gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)}$$

eben *nur* wenn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \neq 0.$$

13.4 Ableitungsregeln

Man kann die Ableitung einer Funktion anhand der Definition 13.2 als Grenzwert der Sekantensteigung wie in den Beispielen in Kapitel 13.2 berechnen. Da diese jedoch oft mühsam ist, gibt es Ableitungsregeln, mit denen man die Ableitung einer neuen Funktion auf die Ableitung von bereits bekannten, einfacheren Funktionen reduzieren kann.

- Summenregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Konstanter Faktor

$$(af(x))' = af'(x)$$

- Produktregel

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Kettenregel (äußere Ableitung mal innere)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Nachfolgend werden diese Regeln anhand von Beispielen vorgestellt und bewiesen.

Theorem 13.9 (Summenregel)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Beispiel 13.10 Sei

$$h(x) = \sin(x) + x^2.$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \cos(x), & g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ h'(x) &= (f(x) + g(x))' \\ &= f'(x) + g'(x) \\ &= \cos(x) + 2x. \end{aligned}$$

Man hat somit die Ableitung der schwierigen Funktion $\sin(x) + x^2$ reduziert auf die Ableitung von den einfacheren Funktionen $\sin(x)$ und x^2 .

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst zwei Funktionen addiert und dann die Summe ableitet oder zuerst jeden Summand ableitet und diese dann addiert.

$$\begin{array}{ccc} f(x), g(x) & \xrightarrow{+} & f(x) + g(x) \\ \frac{d}{dx} \downarrow & & \downarrow \frac{d}{dx} \\ f'(x), g'(x) & \xrightarrow{+} & (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \end{array}$$

Beweis. Sei $h(x) = f(x) + g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x + dx) - h(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x + dx) + g(x + dx) - (f(x) + g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(x + dx) - f(x) + g(x + dx) - g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx} \\ &= f'(x) + g'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 13.11 (Konstanter Faktor)

$$(uf(x))' = uf'(x).$$

Beispiel 13.12 Sei

$$h(x) = 3 \sin(x).$$

Mit $u = 3$ und

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x)$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= uf(x) \\ h'(x) &= (uf(x))' \\ &= uf'(x) \\ &= 3 \cos(x). \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $3 \sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktion $\sin(x)$.

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert und dann ableitet, oder zuerst die Funktionen ableitet und dann mit der Konstanten multipliziert.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\times u} & uf(x) \\ \frac{d}{dx} \downarrow & & \downarrow \frac{d}{dx} \\ f'(x) & \xrightarrow{\times u} & (uf(x))' = uf'(x) \end{array}$$

Beweis. Sei $h(x) = uf(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x+dx) - h(x)}{dx} \\ &= \frac{uf(x+dx) - uf(x)}{dx} \\ &= u \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= uf'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 13.13 (Produktregel)

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beispiel 13.14 Sei

$$h(x) = x^2 \sin(x).$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & g(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= 2x, & g'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)g(x) \\ h'(x) &= (f(x)g(x))' \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2x \sin(x) + x^2 \cos(x). \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $x^2 \sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Sei $h(x) = f(x)g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{h(x+dx) - h(x)}{dx} \\ &= \frac{\overbrace{f(x+dx)g(x+dx)}^{h(x+dx)} - \overbrace{f(x)g(x)}^{h(x)}}{dx}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle hilft ein Trick weiter. Man subtrahiert den Term

$$f(x)g(x+dx)$$

und addiert ihn gleich wieder, was in Summe ja Null ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)g(x+dx) - \overbrace{f(x)g(x+dx)}^{=0} + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} \\ &= \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx)}{dx} + \frac{f(x)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} \\ &= g(x+dx) \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + f(x) \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x).$$

Da vorausgesetzt wurde, dass g differenzierbar ist, ist g natürlich auch stetig. Folglich ist

$$g(x + dx) = g(x). \quad \square$$

Im Spezialfall wenn $g(x) = u$ eine konstante Funktion ist und daher $g'(x) = 0$, gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= uf'(x). \end{aligned}$$

Die Regel vom konstanten Faktor ergibt sich somit als Spezialfall der Produktregel.

Theorem 13.15 (Kettenregel)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Beispiel 13.16 Sei

$$h(x) = \sin(x^2).$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \cos(x), & g'(x) &= 2x \\ f'(g(x)) &= \cos(x^2) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ h'(x) &= (f(g(x)))' \\ &= f'(g(x))g'(x) \\ &= \cos(x^2)2x. \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $\sin(x^2)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Sei $h(x) = f(g(x))$. Zunächst betrachtet man nur einen festen Wert \hat{x} . Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{g} &= g(\hat{x}) \\ dg &= g(\hat{x} + dx) - g(\hat{x}) \end{aligned}$$

gilt

$$g(\hat{x} + dx) = g(\hat{x}) + dg = \hat{g} + dg$$

$$\begin{aligned} h'(\hat{x}) &= \frac{h(\hat{x} + dx) - h(\hat{x})}{dx} \\ &= \frac{f(g(\hat{x} + dx)) - f(g(\hat{x}))}{dx} \\ &= \frac{f(\hat{g} + dg) - f(\hat{g})}{dx} \\ &= \frac{f(\hat{g} + dg) - f(\hat{g})}{dg} \frac{dg}{dx} \\ &= f'(\hat{g}) \frac{g(\hat{x} + dx) - g(\hat{x})}{dx} \\ &= f'(g(\hat{x}))g'(\hat{x}). \end{aligned}$$

Da diese Überlegung für jedes beliebige \hat{x} gilt, kann man \hat{x} durch x ersetzen und erhält

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad \square$$

Wenn man so will, kann man die Funktionen $g(x)$ und $f(g(x))$ als Variablen f und g betrachten, deren Wert von x abhängt. Ändert man x um dx , dann ändert sich g um

$$dg = g'(x)dx$$

und f um

$$df = f'(g(x))dg.$$

Die Kettenregel kann man dann sehr kompakt schreiben als

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

In dieser Form ist die Kettenregel offensichtlich, da lediglich dg gekürzt wird.

Beispiel 13.17 Unter Verwendung der Kettenregel kann man herleiten, dass $\ln'(x) = 1/x$ ist. Da die \ln -Funktion Umkehrfunktion der e -Funktion ist, gilt

$$e^{\ln(x)} = x.$$

Leitet man beide Seiten ab, erhält man mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} \ln'(x) &= 1 \\ x \ln'(x) &= 1 \\ \ln'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Allgemein kann man auf diese Weise die Ableitung von Umkehrfunktionen berechnen.

Beispiel 13.18 Gesucht ist die Ableitung von a^x für beliebiges $a > 0$. Da die Ableitung der e -Funktion bekannt ist, formt man unter Anwendung der Rechengesetze des Logarithmus wie folgt um:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}.$$

Dies lässt sich leicht mit der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} \left(e^{x \ln(a)} \right)' &= e^{x \ln(a)} \ln(a) \\ &= e^{\ln(a^x)} \ln(a) \\ &= a^x \ln(a). \end{aligned}$$

Theorem 13.19 (Quotientenregel)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Beispiel 13.20 Sei

$$h(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}.$$

Mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & g(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= 2x, & g'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ h'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{2x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{\sin(x)^2}. \end{aligned}$$

Man hat damit die Ableitung der schwierigen Funktion $x^2/\sin(x)$ reduziert auf die Ableitung der einfacheren Funktionen x^2 und $\sin(x)$.

Beweis. Die Quotientenregel kann man einfach unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel beweisen, indem man die Division durch $g(x)$ als Multiplikation mit $g(x)^{-1}$ darstellt.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= (f(x)g(x)^{-1})' \\ &= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)(g(x)^{-1})' \\ &= f'(x)g(x)^{-1} - f(x)g(x)^{-2}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

13.5 Höhere Ableitungen

Nachdem man die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion berechnet hat, kann man diese nochmal ableiten. Das Ergebnis $f''(x)$ heißt dann zweite Ableitung von $f(x)$. Auf gleiche Weise kann man dann weitere Ableitungen $f'''(x), f''''(x)$ usw. berechnen.

Leitet man allgemein n Mal ab, erhält man die n -te Ableitung von $f(x)$. Diese wird mit $f^{(n)}(x)$ bezeichnet. Die Klammern im Exponent bedeuten, dass nicht die n -te Potenz gemeint ist sondern die n -te Ableitung.

Für manche Situationen ist es nützlich, die nullte Ableitung zu definieren. Man legt fest, dass $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Beispiel 13.21 Sei $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \\ f''''(x) &= \sin(x) = f(x). \end{aligned}$$

Nach der vierten Ableitung landet man wieder am Anfang. Damit gilt

$$f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 13.22 Sei $f(x) = e^{ax}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{ax} \\ f''(x) &= a^2e^{ax} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \text{ für alle } n$$

Beispiel 13.23 Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine Parabel. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \\ f'''(x) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ für alle } n \geq 3.$$

Allgemein ist die n -te Ableitung eines Polynoms immer Null wenn n größer als der Grad des Polynoms ist.

13.6 Partielle Ableitungen

Der Begriff der Ableitung lässt sich leicht auf mehrstellige Funktionen verallgemeinern. Sei z.B.

$$f(x, y) = (3x + 1) \sin(y).$$

Man kann aus einer zweistelligen Funktion leicht eine einstellige Funktion machen, indem man eine Funktionsvariable als konstanten Parameter betrachtet. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten.

- Man betrachtet y als konstanten Parameter und leitet die so entstehende, einstellige Funktion von x ab. Das Ergebnis heißt partielle Ableitung nach x und wird mit dem Symbol $\partial/\partial x$ abgekürzt. In diesem Fall ist $\sin(y)$ ein *konstanter* Faktor und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3 \sin(y).$$

- Man betrachtet x als konstanten Parameter und leitet die so entstehende, einstellige Funktion von y ab. Das Ergebnis heißt partielle Ableitung nach y und wird mit dem Symbol $\partial/\partial y$ abgekürzt. In diesem Fall ist $3x + 1$ ein *konstanter* Faktor und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = (3x + 1) \cos(y).$$

Beispiel 13.24 Sei

$$f(x, y) = x^2 \sin(xy) + e^y.$$

Dann ist

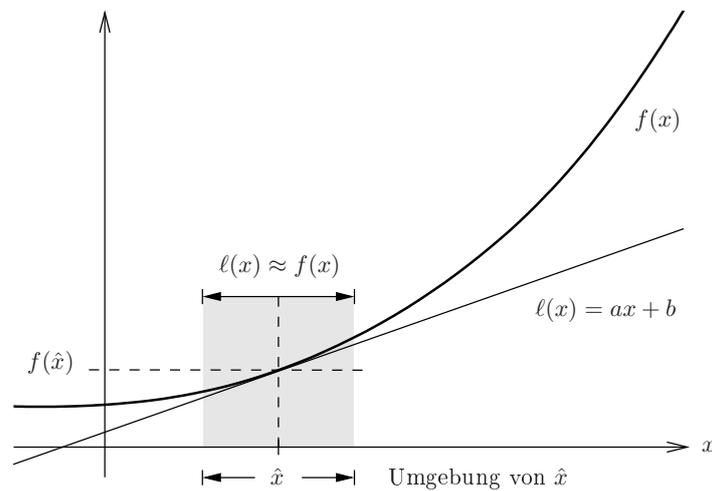
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= x^3 \cos(xy) + e^y. \end{aligned}$$

14 Linearisierung

In den Anwendungen ist von einer Funktion $f(x)$ oft nur die unmittelbare Umgebung um einen Arbeitspunkt \hat{x} relevant. Betrachtet man z.B. die Kennlinie eines Transistors, dann interessiert man sich nur für den Teil in der Nähe des Basisstroms von ca. 5mA. Sofern nur eine enge Umgebung des Arbeitspunkts relevant ist, kann man die Funktion dort recht genau durch ihre Tangente $\ell(x)$ approximieren, d.h. es gilt dort

$$f(x) \approx \ell(x).$$

Dies ist in der Praxis eine enorme Vereinfachung, da man mit Geraden $\ell(x)$ leichter rechnen kann als mit nichtlinearen Funktionen $f(x)$, die Fehler aber trotzdem i.a. klein genug sind.



Die Approximation einer Funktion durch ihre Tangente im Arbeitspunkt bezeichnet man als Linearisierung. Im Folgenden soll für eine gegebene Funktion $f(x)$ und Arbeitspunkt \hat{x} die Linearisierung $\ell(x)$ berechnet werden.

Die allgemeine Form einer Geraden $\ell(x)$ ist

$$\ell(x) = ax + b.$$

Für die Tangente werden zwei Bedingungen gefordert, aus denen man die unbekannt Parameter a, b berechnen kann:

Gleicher Funktionswert im Arbeitspunkt. Die Tangente berührt die Funktion im Arbeitspunkt und muss daher dort den selben Funktionswert haben, d.h.

$$\ell(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Gleiche Steigung im Arbeitspunkt. Die Tangente hat im Arbeitspunkt die gleiche Steigung wie die Funktion, d.h.

$$\ell'(\hat{x}) = f'(\hat{x}).$$

Mit dem Ansatz $\ell(x) = ax + b$ und $\ell'(x) = a$ folgt aus diesen beiden Forderungen

$$\begin{aligned} a\hat{x} + b &= f(\hat{x}) \\ a &= f'(\hat{x}). \end{aligned}$$

Löst man die erste Gleichung nach b auf und setzt a ein, erhält man

$$\begin{aligned} b &= f(\hat{x}) - a\hat{x} \\ &= f(\hat{x}) - f'(\hat{x})\hat{x}. \end{aligned}$$

Setzt man nun a und b in den Ansatz ein, erhält man

$$\begin{aligned} \ell(x) &= ax + b \\ &= \underbrace{f'(\hat{x})x}_a + \underbrace{f(\hat{x}) - f'(\hat{x})\hat{x}}_b \\ &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}). \end{aligned}$$

Definition 14.1 (Linearisierung)

Die Linearisierung $\ell(x)$ von $f(x)$ im Arbeitspunkt \hat{x} ist definiert durch

$$\ell(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

Beispiel 14.2 Sei $f(x) = \sin(x)$ und $\hat{x} = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \ell(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) \\ &= \sin(0) + \cos(0)(x - 0) \\ &= x. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sin(x) \approx x \quad \text{für } x \approx 0.$$

Folglich kann man für kleine Winkel x die Approximation $\sin(x) \approx x$ machen.

Man könnte natürlich für kleine x auch approximieren $\sin(x) \approx 0$, aber das wäre weniger genau.

Beispiel 14.3 Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ soll im Arbeitspunkt $\hat{x} = 1$ linearisiert werden. Mit

$$\begin{aligned}\ln(1) &= 0 \\ \ln'(x) &= 1/x \\ \ln'(1) &= 1\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\ell(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) \\ &= \ln(1) + \ln'(1)(x - 1) \\ &= x - 1.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\ln(x) \approx x - 1 \quad \text{für } x \approx 1.$$

15 Taylor Polynome

Mit der Linearisierung kann man eine Funktion in der Umgebung eines Arbeitspunkts durch eine Gerade approximieren und mit dieser Näherung viele Probleme enorm vereinfachen.

Falls die Approximation durch eine Gerade zu ungenau ist, muss man “biegsamere” Funktionen verwenden. Hierfür bieten sich Polynome an. Einerseits sind Polynome immer noch recht einfache Funktionen, andererseits bieten sie Flexibilität, da man den Grad nach Bedarf wählen kann. Polynome vom Grad 1 sind Geraden, so dass die Linearisierung ein Spezialfall der nachfolgend vorgestellten Taylor Polynome ist.

Definition 15.1 (Polynom.)

Eine Funktion $p \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, wenn es Konstanten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gibt so dass

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Konstanten a_0, \dots, a_n heißen Koeffizienten des Polynoms, a_n heißt führender Koeffizient.

Ergänzend zur o.g. Definition wird auch die konstante Nullfunktion $p(x) = 0$ als Polynom vom Grad Null definiert.

15.1 Herleitung des Taylor Polynoms

Für eine gegebene Funktion f und einen gegebenen Arbeitspunkt \hat{x} ist ein Polynom p vom Grad n gesucht, das f in der Umgebung von \hat{x} möglichst gut approximiert. Im Fall $n = 1$, d.h. bei der Linearisierung, wurde gefordert

- gleicher Funktionswert im Arbeitspunkt, d.h.

$$p(\hat{x}) = f(\hat{x})$$

- gleiche Steigung im Arbeitspunkt, d.h.

$$p'(\hat{x}) = f'(\hat{x}).$$

Mit diesen Gleichungen konnten die zwei Parameter einer Geraden eindeutig berechnet werden.

Da ein Polynom n -ten Grades $n + 1$ Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n hat, benötigt man $n + 1$ Forderungen um diese eindeutig zu bestimmen. Naheliegenderweise fordert man die Gleichheit aller Ableitungen im Arbeitspunkt bis zur n -ten.

Damit die Gleichungen überschaubar bleiben, wird dies am Fall $n = 4$ vorge-rechnet. Die Forderungen sind dann

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= f(\hat{x}) \\ p'(\hat{x}) &= f'(\hat{x}) \\ p''(\hat{x}) &= f''(\hat{x}) \\ p'''(\hat{x}) &= f'''(\hat{x}) \\ p''''(\hat{x}) &= f''''(\hat{x}). \end{aligned}$$

Ausgehend von der allgemeinen Form eines Polynoms werden zunächst die Ableitungen berechnet.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \\ p'''(x) &= 6a_3 + 24a_4x \\ p''''(x) &= 24a_4. \end{aligned}$$

Auswerten dieser Ableitungen bei \hat{x} und Einsetzen in o.g. Bedingungen liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\hat{x} + a_2\hat{x}^2 + a_3\hat{x}^3 + a_4\hat{x}^4 &= f(\hat{x}) \\ a_1 + 2a_2\hat{x} + 3a_3\hat{x}^2 + 4a_4\hat{x}^3 &= f'(\hat{x}) \\ 2a_2 + 6a_3\hat{x} + 12a_4\hat{x}^2 &= f''(\hat{x}) \\ 6a_3 + 24a_4\hat{x} &= f'''(\hat{x}) \\ 24a_4 &= f''''(\hat{x}). \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a_0, \dots, a_4 . Da es bereits Dreiecksform hat, kann es leicht durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden.

Es geht aber noch viel einfacher, wenn man mit dem Ansatz

$$p(x) = a_0 + a_1(x - \hat{x}) + a_2(x - \hat{x})^2 + a_3(x - \hat{x})^3 + a_4(x - \hat{x})^4$$

arbeitet. Im Unterschied zum zuerst gewählten, naheliegenden Ansatz wurde überall x durch $x - \hat{x}$ ersetzt. Das Ansatzpolynom wurde also um \hat{x} verschoben. Dies zieht sich auch bei den Ableitungen so durch:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2(x - \hat{x}) + 3a_3(x - \hat{x})^2 + 4a_4(x - \hat{x})^3 \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - \hat{x}) + 12a_4(x - \hat{x})^2 \\ p'''(x) &= 6a_3 + 24a_4(x - \hat{x}) \\ p''''(x) &= 24a_4. \end{aligned}$$

Wertet man nun bei \hat{x} aus, fällt fast alles weg — deshalb ist der verschobene Ansatz viel geschickter.

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= a_0 \\ p'(\hat{x}) &= a_1 \\ p''(\hat{x}) &= 2a_2 \\ p'''(\hat{x}) &= 6a_3 \\ p''''(\hat{x}) &= 24a_4. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bedingungen liefert nun viel einfachere Gleichungen.

$$\begin{aligned} a_0 &= f(\hat{x}) \\ a_1 &= f'(\hat{x}) \\ 2a_2 &= f''(\hat{x}) \\ 6a_3 &= f'''(\hat{x}) \\ 24a_4 &= f''''(\hat{x}), \end{aligned}$$

Hieraus kann man sofort die Koeffizienten a_0, \dots, a_4 berechnen. Setzt man diese in das Ansatzpolynom ein, erhält man

$$p(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})}{2}(x - \hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{6}(x - \hat{x})^3 + \frac{f''''(\hat{x})}{24}(x - \hat{x})^4.$$

Unter Verwendung der Fakultätsfunktion lässt sich die Struktur dieses Polynoms besser erkennen. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i \quad \text{und} \quad 0! = 1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(\hat{x})}{0!}(x - \hat{x})^0 + \frac{f'(\hat{x})}{1!}(x - \hat{x})^1 + \frac{f''(\hat{x})}{2!}(x - \hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{3!}(x - \hat{x})^3 \\ &\quad + \frac{f''''(\hat{x})}{4!}(x - \hat{x})^4. \end{aligned}$$

Für beliebigen Grad n erhält man nach diesem Schema die einfache Formel

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(\hat{x})}{0!}(x - \hat{x})^0 + \frac{f'(\hat{x})}{1!}(x - \hat{x})^1 + \frac{f''(\hat{x})}{2!}(x - \hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{3!}(x - \hat{x})^3 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(\hat{x})}{n!}(x - \hat{x})^n \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x - \hat{x})^i. \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat den selben Funktionswert und den selben Wert der ersten n Ableitungen wie f im Arbeitspunkt \hat{x} und ist somit eine gute Approximation an f in der Umgebung des Arbeitspunkts.

Definition 15.2 (Taylor Polynom)

Das Taylor Polynom vom Grad n an f im Arbeitspunkt \hat{x} ist definiert durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!} (x - \hat{x})^i.$$

Die Linearisierung ist ein Spezialfall des Taylorpolynoms für $n = 1$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f^{(0)}(\hat{x})}{0!} (x - \hat{x})^0 + \frac{f^{(1)}(\hat{x})}{1!} (x - \hat{x})^1 \\ &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}). \end{aligned}$$

Beispiel 15.3 Gesucht ist das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad $n = 4$ an $f(x) = \cos(x)$ zum Arbeitspunkt $\hat{x} = \pi$. Hierfür benötigt man die ersten 4 Ableitungen von $f(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin(x) \\f''(x) &= -\cos(x) \\f'''(x) &= \sin(x) \\f''''(x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Auswerten bei \hat{x} ergibt

$$\begin{aligned}f(\hat{x}) &= -1 \\f'(\hat{x}) &= 0 \\f''(\hat{x}) &= 1 \\f'''(\hat{x}) &= 0 \\f''''(\hat{x}) &= -1.\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom vom Grad 4

$$\begin{aligned}p(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})}{2}(x - \hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{6}(x - \hat{x})^3 \\&\quad + \frac{f''''(\hat{x})}{24}(x - \hat{x})^4 \\&= -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - \frac{1}{24}(x - \pi)^4.\end{aligned}$$

15.2 Fehlerabschätzung

Mit der Taylor Entwicklung möchte man eine “schwierige” Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines Arbeitspunkts \hat{x} durch ein “einfaches” Polynom $p(x)$ approximieren. Gefordert wurde die Übereinstimmung des Funktionswerts und der Ableitungen im Arbeitspunkt \hat{x} . Es stellt sich daher die Frage, wie groß die Abweichung zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Bereich um \hat{x} herum ist. Natürlich möchte man möglichst geringe Fehler, andererseits aber aus Aufwandsgründen auch niedrigen Polynomgrad. Ohne Herleitung wird in diesem Kapitel eine Formel vorgestellt, mit der sich dieser Fehler eingrenzen lässt.

Konkret sei der Arbeitsbereich das Intervall $[\hat{x}, x_{\max}]$ für ein x_{\max} . Der Abstand zwischen $p(x)$ und $f(x)$ im Arbeitsbereich ist dann begrenzt durch

$$\frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Diese Formel erinnert an den $n+1$ -ten Summand im Taylor Polynom und heißt Restglied nach Lagrange. Problematisch ist die Berechnung des Betragsmaximums der $n+1$ -ten Ableitung im Arbeitsbereich. Da es um eine Fehlerbegrenzung geht, kann man diese nach oben abschätzen falls die genaue Berechnung schwierig ist.

Beispiel 15.4 Das Taylor Polynom vom Grad $n=2$ an $f(x) = \cos(x)$ im Arbeitspunkt $\hat{x} = 0$ ist

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Der Arbeitsbereich sei nun das Intervall $[0, 2]$ und gesucht ist eine Obergrenze für die Abweichung zwischen Taylor Polynom $p(x)$ und Funktion $f(x)$. Da

$$f^{(n+1)}(\xi) = \sin(\xi)$$

und die Sinusfunktion zwischen -1 und 1 begrenzt ist, gilt

$$\max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1.$$

Der Fehler im Arbeitsbereich ist somit begrenzt durch

$$\begin{aligned} \frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)| &\leq \frac{|2-0|^3}{3!} \\ &= \frac{8}{6} \approx 1.33. \end{aligned}$$

Das ist natürlich sehr ungenau. Selbst die Approximation der Cosinusfunktion durch die Konstante Null wäre mit maximalem Fehlerbetrag 1 genauer. Erhöhen wir also den Grad auf $n=4$. Das Taylor Polynom ist dann

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Da $|f^{(n+1)}(\xi)| = |-\sin(\xi)|$ wieder durch 1 beschränkt ist, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)| &\leq \frac{2^5}{5!} \\ &= \frac{32}{120} \approx 0.267. \end{aligned}$$

15.3 Taylor Reihen

Die Erwartung ist, dass das Taylor Polynom $p_n(x)$ vom Grad n eine umso bessere Approximation an $f(x)$ liefert, je höher der Grad n ist. Hält man den Arbeitspunkt \hat{x} und den Arbeitsbereich $[\hat{x}, x_{\max}]$ fest, ist diese Erwartung durchaus berechtigt, da der Faktor

$$\frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!}$$

in der Fehlerabschätzung für große n gegen Null geht: Der Zähler wächst “nur” exponentiell mit n , der Nenner hingegen mit der Fakultätsfunktion.

Man würde daher erwarten, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

für alle x . Dies trifft tatsächlich auch für viele Funktionen zu, aber leider nicht für alle. Der Grund ist, dass der zweite Faktor

$$\max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

in der Fehlerabschätzung durchaus auch sehr schnell mit n wachsen kann.

Für $n \rightarrow \infty$ geht das Taylor Polynom $p_n(x)$ in die sog. Taylor Reihe über:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(\hat{x})(x - \hat{x})^i \\ &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2!} f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \frac{1}{3!} f'''(\hat{x})(x - \hat{x})^3 + \dots \end{aligned}$$

Diese Funktion ist *kein* Polynom, da der Grad nicht mehr endlich ist. Die Frage ist, für welche x dieser Grenzwert überhaupt existiert und ob er gleich $f(x)$ ist.

Unproblematisch sind alle Funktionen, für die

$$\max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

höchstens exponentiell mit n wächst. Dies ist z.B. für die Sinus, Cosinus und die e -Funktion der Fall. Für deren Taylor Reihen zu $\hat{x} = 0$ gilt daher

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots &= \sin(x) \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots &= \cos(x) \\ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots &= e^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Man kann diese Funktionen also in Taylor Reihen “entwickeln”. In dieser Darstellung kann man durch Ableiten der Summanden z.B. verifizieren, dass

$$\sin(x)' = \cos(x) \quad \text{oder} \quad (e^x)' = e^x.$$

Betrachten wir nun ein Gegenbeispiel, wo $p_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

Beispiel 15.5 Sei $f(x) = \ln(x)$ und $\hat{x} = 1$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Auswerten bei \hat{x} ergibt

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= 0 \\ f'(\hat{x}) &= 1 \\ f''(\hat{x}) &= -1 \\ f'''(\hat{x}) &= 2 \\ f^{(4)}(\hat{x}) &= -6 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(\hat{x}) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

und man erhält die Taylor Reihe

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \dots \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Für $x > 2$ werden die Summanden immer größer und man erkennt bereits daran, dass der Grenzwert dann nicht existieren kann. Für die Fehlergrenze erhält man

$$\begin{aligned} \frac{|x_{\max} - \hat{x}|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [\hat{x}, x_{\max}]} |f^{(n+1)}(\xi)| &= \frac{|x_{\max} - 1|^{n+1}}{(n+1)!} |(-1)^n n!| \\ &= \frac{|x_{\max} - 1|^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Ist $x_{\max} > 2$, geht dieser Wert für n gegen ∞ nicht wie erhofft gegen Null sondern wächst exponentiell mit n . Tatsächlich gilt für die Taylor Reihe

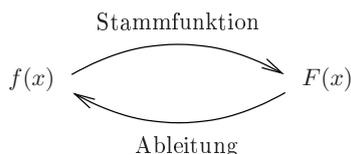
$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots = \ln(x)$$

nur für $0 < x \leq 2$. Für $x > 2$ hat die Folge $p_n(x)$ keinen Grenzwert.

16 Integralrechnung

16.1 Stammfunktion als Umkehrung der Ableitung

Bei der Berechnung einer Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ sucht man nach einer Funktion $F(x)$ deren Ableitung $f(x)$ ergibt.



Definition 16.1 (Stammfunktion)

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F \in D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn

$$F' = f.$$

Beispiel 16.2 Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

da

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x).$$

Eine andere Stammfunktion ist z.B.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5.$$

Da der konstante Summand 5 beim Ableiten wegfällt, gilt auch hier

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = x^2 = f(x).$$

Da es zu einer Funktion $f(x)$ i.a. viele Stammfunktionen $F(x)$ gibt, sollte man nicht von *der* Stammfunktion sprechen sondern von *einer* Stammfunktion. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann auch $F(x) + C$ für jede Konstante C . Es stellt sich die Frage, ob man auf diese Weise *alle* Stammfunktionen von $f(x)$ bekommt, oder ob es noch weitere gibt.

Theorem 16.3

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ und D ein Intervall. Sei $F \in D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann ist die Menge aller Stammfunktionen

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Sofern f auf einem Intervall definiert ist, unterscheiden sich die Stammfunktionen von f nur um eine Konstante C . Ist D kein zusammenhängendes Intervall, kann man in jedem Teilintervall eine andere Konstante wählen, d.h. man hat noch weitere Stammfunktionen.

Beispiel 16.4 Sei

$$f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Dann ist z.B. auch die Funktion

$$F \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} x^3/3 + 4 & \text{für } x > 0 \\ x^3/3 + 7 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f , da F auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und dort gilt $F'(x) = f(x)$.

16.2 Stammfunktionen elementarer Funktionen

Die folgende Liste von Stammfunktionen von Standardfunktionen sollte man im Kopf haben:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = k & F(x) = kx \\
 f(x) = x^n & F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \\
 f(x) = \frac{1}{x} & F(x) = \ln(|x|) \\
 f(x) = \sin(x) & F(x) = -\cos(x) \\
 f(x) = \cos(x) & F(x) = \sin(x) \\
 f(x) = e^x & F(x) = e^x
 \end{array}$$

Da $f(x) = 1/x$ auch für negative x definiert ist, die ln-Funktion jedoch nur für positive, sind die Betragsstriche bei der Stammfunktion erforderlich, d.h. $F(x) = \ln(|x|)$. Durch Fallunterscheidung verifiziert man, dass dann $F'(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

- Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und damit

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \ln(|x|)' \\
 &= \ln(x)' \\
 &= \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

- Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und damit

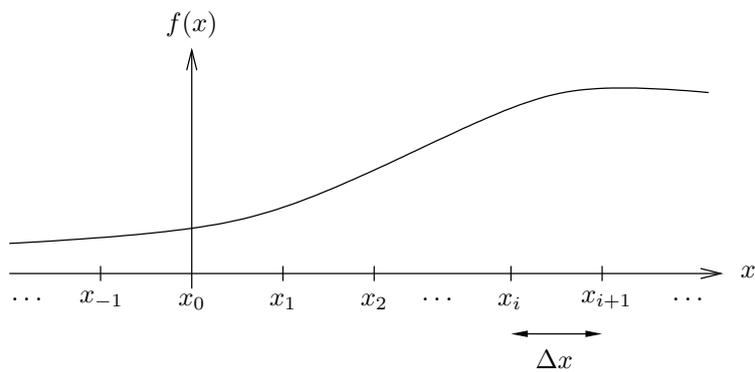
$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \ln(|x|)' \\
 &= \ln(-x)' \\
 &= -\frac{1}{-x} \\
 &= \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

16.3 Flächenberechnung durch Diskretisierung und Grenzwert

Gesucht ist die Fläche unter einer Funktion $f(x)$. Zunächst wird diese Fläche näherungsweise berechnet durch Diskretisierung der x -Achse. Damit ist gemeint, dass man die x -Achse in diskrete Punkte

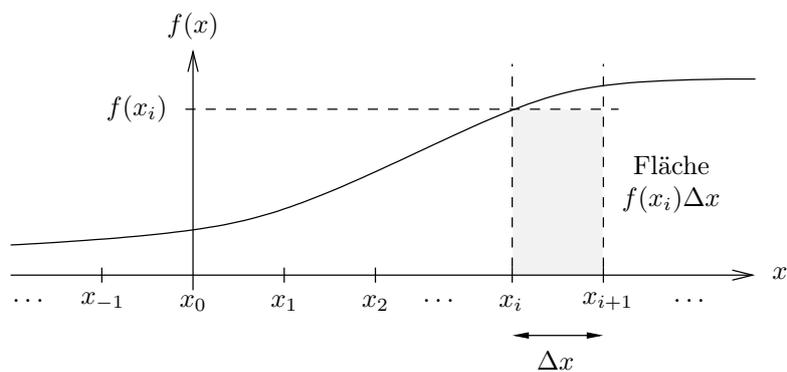
$$x_i = i\Delta x, \quad i \in \mathbb{Z}$$

zerlegt, wobei Δx die Schrittweite ist.



Wenn Δx klein ist, kann die Fläche unter $f(x)$ zwischen x_i und x_{i+1} durch ein Rechteck mit Breite Δx und Höhe $f(x_i)$ approximiert werden und ist damit näherungsweise

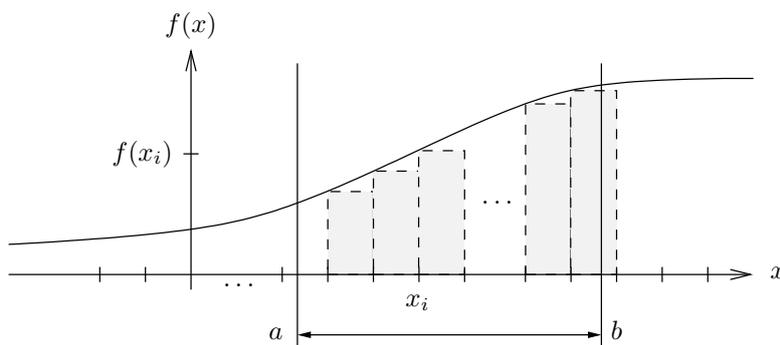
$$f(x_i)\Delta x.$$



Dies ist anschaulich dadurch begründet, dass sich für kleines Δx der Funktionswert von $f(x)$ zwischen x_i und x_{i+1} nur wenig ändert.

Um die Fläche unter $f(x)$ zwischen zwei beliebigen Stellen $x = a$ und $x = b$ näherungsweise zu berechnen, summiert man die Rechteckflächen in diesem Bereich auf und erhält

$$\sum_{x_i \in [a,b]} f(x_i)\Delta x.$$



Die Fehler, die bei diesem Verfahren entstehen, sind umso kleiner, je kleiner Δx ist, da die Annahme, dass sich der Funktionswert zwischen zwei Stützstellen x_i und x_{i+1} nur wenig ändert umso mehr zutrifft, je näher diese zusammenliegen. Bei kleinerem Δx ist andererseits der Rechenaufwand höher, da man mehr Rechteckflächen aufsummieren muss.

Der Vollständigkeit sollte hinzugefügt werden, dass dieses Verfahren nur funktioniert, wenn f wenigstens stückweise stetig ist. Dies ist in unseren Anwendungen eigentlich immer der Fall. Funktionen, die nicht stückweise stetig sind, kann man noch nicht einmal vernünftig zeichnen wie z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Die Fläche unter dieser Funktion ist tatsächlich Null, da \mathbb{Q} nur eine abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} ist. Wenn man aber für Δx eine rationale Zahl nimmt, sind alle x_i rational und damit alle $f(x_i) = 1$. Daher würde man mit o.g. Verfahren die gleiche Fläche wie unter der konstanten Funktion $f(x) = 1$ erhalten.

Im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ verschwinden die Fehler ganz und man erhält die *exakte* Fläche. Um sich das Limesymbol zu sparen, verwendet man wie bei der Differentialrechnung das Symbol dx statt Δx . Da die Summanden nach dem Grenzübergang infinitesimal schmale Rechtecke der Breite dx sind, verwendet man statt dem Σ -Symbol das \int -Symbol. Dies ist jedoch reine Notation und hat keine weitere Bedeutung. Statt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i \in [a, b]} f(x_i) \Delta x$$

Schreibt man kürzer

$$\int_a^b f(x) dx.$$

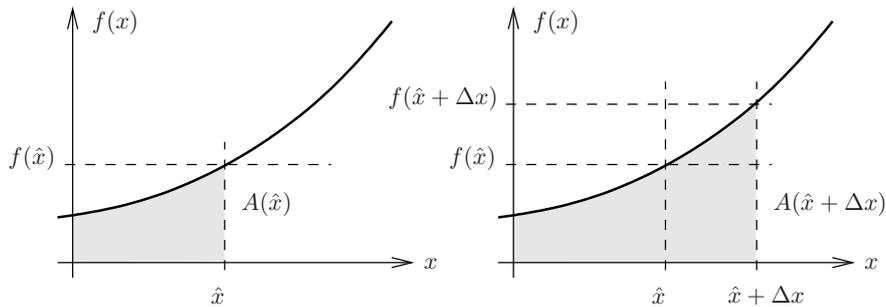
Dies bedeutet nichts anderes als die Summe der infinitesimal schmalen Rechteckflächen $f(x)dx$ für alle x zwischen a und b . Wichtig ist hingegen, dass man sich darüber klar ist, dass der Grenzübergang nicht *zuerst* auf jeden Summanden $f(x_i)\Delta x$ angewandt wird (sonst wären alle Summanden Null), sondern erst *nachdem* die Flächen aufsummiert wurden.

Das \int -Symbol heißt Integral. Der Zusammenhang zwischen der Fläche unter einer Funktion und ihrer Stammfunktion wird im nächsten Kapitel hergestellt und heißt Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

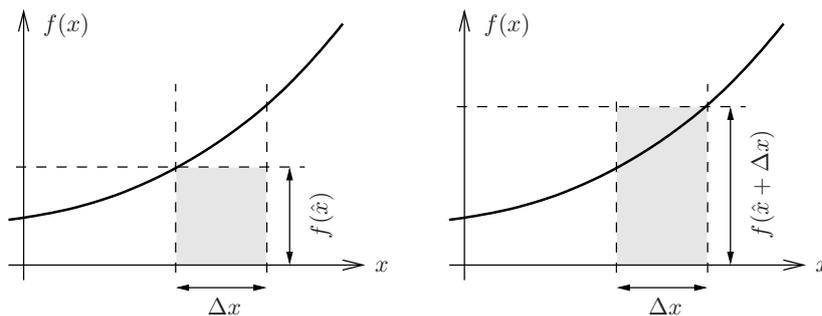
16.4 Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Fläche

Sei

$$\begin{aligned} A(\hat{x}) &= \text{Fläche unter } f(x) \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = \hat{x} \\ A(\hat{x} + \Delta x) &= \text{Fläche unter } f(x) \text{ zwischen } x = 0 \text{ und } x = \hat{x} + \Delta x. \end{aligned}$$



Die Differenz dieser beiden Flächen lässt sich durch zwei Rechtecke abschätzen.



Damit gilt

$$\begin{aligned} A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x}) &\geq f(\hat{x})\Delta x \\ A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x}) &\leq f(\hat{x} + \Delta x)\Delta x. \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten durch Δx erhält man

$$\begin{aligned} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\geq f(\hat{x}) \\ \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\leq f(\hat{x} + \Delta x). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ durchgeführt. Falls f stetig an der Stelle \hat{x} ist, gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} = f(\hat{x}).$$

Aus den beiden Ungleichungen wird nach dem Grenzübergang

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\geq f(\hat{x}) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} &\leq f(\hat{x})\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} = f(\hat{x}).$$

Da die Existenz des Grenzwerts auf der linken Seite somit gezeigt wurde, gilt mit der Definition der Ableitung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(\hat{x} + \Delta x) - A(\hat{x})}{\Delta x} = A'(\hat{x}).$$

Somit ist

$$A'(\hat{x}) = f(\hat{x}).$$

Da diese Überlegung für beliebige Werte von \hat{x} gilt, kann man die Konstante \hat{x} durch eine Variable x ersetzen und erhält

$$A'(x) = f(x).$$

Die Funktion A ist somit eine Stammfunktion von f . Hat man also eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ berechnet, gilt

$$A(x) = F(x) + C$$

für eine Konstante C . Die Berechnung von C folgt aus der Zusatzbedingung $A(0) = 0$. Für $x = 0$ gilt damit

$$\begin{aligned}0 &= F(0) + C \\ C &= -F(0).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$A(x) = F(x) - F(0).$$

Diese Formel liefert den Zusammenhang zwischen der Fläche unter einer Funktion und ihrer Stammfunktion. Da in der Herleitung keine Annahme über die gewählte Stammfunktion gemacht wurde, ist das Ergebnis unabhängig davon, welche Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ man nimmt.

Die o.g. Überlegungen hätte man statt mit $x = 0$ auch mit einem beliebigen $x = a$ durchführen können. Damit hat man Folgendes gezeigt:

Theorem 16.5

Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ gleich

$$F(b) - F(a).$$

Außerdem wurde gezeigt, dass jede stetige Funktion $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F hat. Man wählt einen beliebigen Punkt $a \in D$ und definiert $F(x)$ als Fläche unter f zwischen a und x . Mit obiger Konstruktion gilt dann $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und damit ist F eine Stammfunktion von f .

Theorem 16.6

Jede stetige Funktion $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion $F \in D \rightarrow \mathbb{R}$.

Im Gegensatz zur Ableitung reicht somit für die Existenz einer Stammfunktion Stetigkeit aus. Eine Funktion mit einem Knick hat keine Ableitung, kann aber durchaus eine Stammfunktion haben.

Beispiel 16.7 Sei $f(x) = \sin(x)$. Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist $F(x) = -\cos(x)$. Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ ist somit

$$\begin{aligned} F(\pi) - F(0) &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = \pi$ und $x = 2\pi$ ist

$$\begin{aligned} F(2\pi) - F(\pi) &= -\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) \\ &= -\cos(2\pi) + \cos(\pi) \\ &= -1 + (-1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion zwischen π und 2π negativ ist, sind auch die Flächenbeiträge $f(\hat{x})\Delta x$ negativ. Flächen unter der x -Achse zählen somit negativ.

Beispiel 16.8 Eine andere Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist $F(x) = -\cos(x) + 5$. Man erhält damit die gleiche Fläche zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ wie im vorigen Beispiel.

$$\begin{aligned} F(\pi) - F(0) &= -\cos(\pi) + 5 - (-\cos(0) + 5) \\ &= -\cos(\pi) + 5 + \cos(0) - 5 \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante subtrahiert sich somit weg und es spielt daher keine Rolle, welche Stammfunktion man wählt.

Beispiel 16.9 Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Es existiert aber eine Stammfunktion $F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2/2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dass $F(x)$ tatsächlich Stammfunktion von $f(x)$ ist, zeigt man durch Fallunterscheidung.

- Für $x > 0$ gilt

$$F'(x) = (x^2/2)' = x = |x|.$$

- Für $x < 0$ gilt

$$F'(x) = (-x^2/2)' = -x = |x|.$$

- Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \\ &= \frac{F(dx)}{dx} \\ &= \begin{cases} dx^2/2dx & \text{falls } dx > 0 \\ -dx^2/2dx & \text{falls } dx < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} dx/2 & \text{falls } dx > 0 \\ -dx/2 & \text{falls } dx < 0 \end{cases} \\ &= 0 \\ &= |x|. \end{aligned}$$

16.5 Bestimmtes Integral

In Kapitel 16.3 wurde die Notation

$$\int_a^b f(x)dx$$

für die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeführt. Dieser Wert heißt auch bestimmtes Integral von f zwischen a und b .

Damit lässt sich Theorem 16.5 und 16.6 wie folgt umformulieren. Diese beiden Theoreme heißen Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und stellen den Zusammenhang zwischen Flächenberechnung und Stammfunktion her.

Theorem 16.10

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in D$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Theorem 16.11

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für jedes $a \in D$ die Funktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)du$$

eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)du = [F(u)]_a^x = F(x) - F(a)$$

und damit

$$F'_a(x) = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

Auch für nicht stetige Funktionen $f(x)$ lassen sich in bestimmten Fällen Flächen berechnen. So sind z.B. Sprünge und Ausreißer unkritisch, Pole hingegen problematisch. Dies führt zum Begriff der Integrierbarkeit, den wir an dieser Stelle jedoch übergehen.

Definition 16.12 (Integralfunktion.)

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $a \in D$ heißt die Funktion $F_a \in D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_a(x) = \int_a^x f(u) du$$

Integralfunktion von f . Die Integralfunktion beschreibt die Fläche unter f zwischen a und x , wobei vorausgesetzt werden muss, dass der mit dem Integral beschriebene Grenzwert von Flächensummen existiert und endlich ist.

Die Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

hat keine Stammfunktion, da sie nicht stetig ist bei $x = 0$. Eine Stammfunktion F müsste die Eigenschaft haben, dass $F(x) = x + C$ für $x > 0$ und $F(x) = C$ für $x < 0$. Damit hätte $F(x)$ aber einen Knick bei $x = 0$ und wäre dort nicht differenzierbar. Es kann somit keine Funktion $F(x)$ geben mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Andererseits erhält man aber z.B. für $a = 0$ die Integralfunktion $F_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_0(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion hat einen Knick bei $x = 0$ und ist somit nicht differenzierbar und folglich keine Stammfunktion von f .

Wenn hingegen f eine Stammfunktion F hat, dann hat f auch eine Integralfunktion, die ihrerseits wieder eine Stammfunktion ist. Wie oben gezeigt, gilt dann

$$F_a(x) = \int_a^x f(u) du = F(x) - F(a).$$

Der Begriff Integralfunktion ist daher allgemeiner als der Begriff Stammfunktion.

Allerdings ist nicht jede Stammfunktion F von f auch eine Integralfunktion. So ist z.B. für $f(x) = \cos(x)$ die Funktion

$$F(x) = \sin(x) + 2$$

eine Stammfunktion von f , für die Integralfunktionen F_a gilt aber

$$F_a(x) = \int_a^x \cos(u) du = \sin(x) - \sin(a)$$

und folglich $F \neq F_a$ für alle a , da $\sin(a) \neq -2$.

Abschließend noch zwei einfache Theoreme über bestimmte Integrale.

Man kann die Fläche unter $f(x)$ zwischen a und b zerlegen in die Summe der Fläche zwischen a und c und der Fläche zwischen c und b für beliebiges c .

Theorem 16.13

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b, c \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0.\end{aligned}$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= F(a) - F(a) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vertauscht man die Integrationsgrenzen, negiert sich das Integral.

Theorem 16.14

Sei $f \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in D$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= - \int_b^a f(x)dx.\end{aligned}$$

16.6 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird unter Verwendung des Integralzeichens mit

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet und heißt *unbestimmtes* Integral. Ist F eine Stammfunktion von f und ist f auf einem zusammenhängenden Intervall definiert, gilt

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Bei unbestimmten Integralen sollte man sich darüber klar sein, dass man immer mit Mengen von Funktionen rechnet. Die Rechenoperationen sind dabei elementweise definiert.

Beispiel 16.15 In dem Term

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

bedeutet + die Addition von Mengen von Funktionen. Diese ist definiert durch

$$\begin{aligned} \int f(x)dx + \int g(x)dx &= \{F(x) + C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G(x) + C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Beispiel 16.16 In dem Term

$$u \int f(x)dx$$

wird eine Konstante u und die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ multipliziert. Dies ist definiert durch

$$\begin{aligned} u \int f(x)dx &= u\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(F(x) + C) \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{uF(x) + uC \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{uF(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \quad \text{falls } u \neq 0. \end{aligned}$$

Beispiel 16.17 In dem Term

$$g(x) + \int f(x)dx$$

wird eine Funktion $g(x)$ und die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ addiert. Dies ist definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) + \int f(x)dx &= g(x) + \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{g(x) + F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Um dies etwas übersichtlicher zu schreiben, verwendet man für das unbestimmte Integral die Notation

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Man drückt damit aus, dass die Stammfunktion von $f(x)$ nur bis auf eine additive Konstante C eindeutig ist, meint damit aber genau genommen die Menge *aller* Stammfunktionen von $f(x)$.

In den obigen Beispielen kann man damit kurz schreiben:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx + \int g(x)dx &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \\ &= F(x) + G(x) + C \\ u \int f(x)dx &= u(F(x) + C) \\ &= uF(x) + uC \\ &= uF(x) + C \quad \text{falls } u \neq 0 \\ g(x) + \int f(x)dx &= g(x) + F(x) + C. \end{aligned}$$

16.7 Beispiele für bestimmte Integrale

Beispiel 16.18 Gesucht ist die Fläche unter $f(x) = x^2$ zwischen $x = -1$ und $x = 4$. Zuerst wird eine Stammfunktion berechnet, anschließend werden die Integrationsgrenzen eingesetzt. Man drückt dies in einem Zwischenschritt dadurch aus, dass man die Stammfunktion in eckige Klammern setzt und die Integrationsgrenzen an die rechte Klammer schreibt:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^4 \\ &= \frac{1}{3} 4^3 - \frac{1}{3} (-1)^3 \\ &= \frac{1}{3} (4^3 - (-1)^3) \\ &= \frac{1}{3} (64 + 1) \\ &= \frac{65}{3}.\end{aligned}$$

Offensichtlich kann man einen konstanten Faktor aus den eckigen Klammern herausziehen, was es manchmal übersichtlicher macht. Im Beispiel ist

$$\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^4 = \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^4.$$

Beispiel 16.19 Sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Die Fläche unter $f(x)$ zwischen $x = -1$ und $x = 1$ ist somit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 \\ &= -\left[\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 \\ &= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) \\ &= -(1 + 1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Das kann aber nicht sein, da $f(x)$ immer positiv ist!

Der Grund ist, dass $f(x)$ bei $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle hat und in der Herleitung der Formel zur Flächenberechnung auf Seite 113 vorausgesetzt wurde, dass f stetig ist. Da dieser Fehler schnell passiert und zu völlig falschen Ergebnissen führt, sollte man sich gut einprägen, dass f im Integrationsbereich, stetig sein muss. Die Regel in Kurzform lautet

“nie über Unstetigkeitsstellen wegintegrieren”.

Man berechnet daher zunächst die Fläche zwischen ε und 1 für ein $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\left[\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Um nun die Fläche zwischen 0 und 1 zu erhalten, führt man den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ von rechts durch.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \infty.$$

Da f eine gerade Funktion ist, ist die Fläche zwischen -1 und 0 ebenfalls ∞ und die korrekte Gesamtfläche zwischen -1 und 1 somit unendlich.

Beispiel 16.20 Sei wieder $f(x) = 1/x^2$. Diesmal möchte man die Fläche unter $f(x)$ ab $x = 1$ bis unendlich berechnen, d.h.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Integrale, bei denen eine Grenze im Unendlichen liegt, nennt man *uneigentliche* Integrale. Der Trick ist, dass man zuerst bis zu einer Grenze b integriert und anschließend den Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ durchführt:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{b} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Obwohl die Fläche “unendlich breit” ist, ist sie trotzdem endlich, da die Funktion $f(x)$ schnell gegen Null geht für $x \rightarrow \infty$.

16.8 Integrationsregeln

Zu jeder der in Kapitel 13.4 vorgestellten Ableitungsregeln gibt es eine entsprechende Integrationsregel. Zweck dieser Regeln ist, die Berechnung einer "schwierigen" Stammfunktion auf die Berechnung von einfacheren, bzw. bekannten Stammfunktionen zu reduzieren. Die Regeln gelten gleichermaßen für bestimmte und unbestimmte Integrale.

Die schlechte Nachricht ist, dass im Gegensatz zur Ableitung bei der Integration nicht immer sofort klar ist, welche Regel angewandt werden muss. Daher ist Integrieren viel schwieriger als Ableiten.

Es ist sogar so, dass viele Funktionen Stammfunktionen haben, die man gar nicht durch elementare Terme (d.h. Terme mit den handelsüblichen Funktionsymbolen) beschreiben kann. Ein Beispiel ist

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Diese Funktion ist stetig und hat daher Stammfunktionen. Es gibt für diese jedoch keine elementaren Terme und keine der nachfolgend vorgestellten Integrationsregeln ist anwendbar.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass $f, g \in D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind und D ein zusammenhängendes Intervall.

Summenregel

Theorem 16.21 (Summenregel für unbestimmte Integrale)

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst zwei Funktionen addiert und davon die Stammfunktionen berechnet oder zuerst von jedem Summand die Stammfunktionen berechnet und diese dann addiert.

$$\begin{array}{ccc} f(x), g(x) & \xrightarrow{+} & f(x) + g(x) \\ \int \dots dx \downarrow & & \downarrow \int \dots dx \\ \int f(x)dx, \int g(x)dx & \xrightarrow{+} & \int (f(x) + g(x))dx = \\ & & \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{array}$$

Beispiel 16.22 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von $\sin(x) + x^2$.

$$\begin{aligned} \int (\sin(x) + x^2)dx &= \int \sin(x)dx + \int x^2dx \\ &= -\cos(x) + C_1 + x^3/3 + C_2 \\ &= -\cos(x) + x^3/3 + C. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$. Dann ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$ da aufgrund der Summenregel der Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} (F(x) + G(x))' &= F'(x) + G'(x) \\ &= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) + g(x)$ ist somit

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))dx &= \{F(x) + G(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{F(x) + C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G(x) + C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \int f(x)dx + \int g(x)dx. \end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale gilt die Summenregel analog.

Theorem 16.23 (Summenregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wie oben gezeigt, ist $F(x)+G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)+g(x)$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Konstante Faktor Regel**Theorem 16.24 (Konst. Faktor Regel für unbestimmte Integrale)**Für $u \neq 0$ gilt

$$\int u f(x) dx = u \int f(x) dx.$$

Die Regel besagt, dass es egal ist, ob man zuerst eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert und davon die Stammfunktionen berechnet oder zuerst die Stammfunktionen berechnet und diese dann mit der Konstanten multipliziert.

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) & \xrightarrow{\times u} & u f(x) \\
 \int \dots dx \downarrow & & \downarrow \int \dots dx \\
 \int f(x) dx & \xrightarrow{\times u} & \int u f(x) dx = u \int f(x) dx
 \end{array}$$

Beispiel 16.25 Gesucht ist die Menge aller Stammfunktionen von $3 \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
 \int 3 \cos(x) dx &= 3 \int \cos(x) dx \\
 &= 3 \sin(x) + C.
 \end{aligned}$$

Beweis. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann ist $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$, da aufgrund der konstanten Faktor Regel der Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
 (uF(x))' &= uF'(x) \\
 &= u f(x).
 \end{aligned}$$

Für $u \neq 0$ gilt damit

$$\begin{aligned}
 \int u f(x) dx &= \{uF(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{u(F(x) + C/u) \mid C \in \mathbb{R}\} \\
 &= u\{F(x) + C/u \mid C \in \mathbb{R}\} \\
 &= u\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\
 &= u \int f(x) dx.
 \end{aligned}$$

Sie fragen sich vermutlich, ob die Bedingung $u \neq 0$ wirklich nötig ist. Es ist zwar richtig, dass $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$ ist für jedes $u \in \mathbb{R}$. Für $u = 0$ ist jedoch

$$\int 0f(x)dx = \int 0dx$$

die Menge aller Stammfunktionen der konstanten Nullfunktion und dies sind alle konstanten Funktionen, während

$$0 \int f(x)dx = 0$$

lediglich die konstante Nullfunktion ist.

Für bestimmte Integrale gilt die konstante Faktor Regel analog.

Theorem 16.26 (Konstante Faktor Regel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b uf(x)dx = u \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Wie oben gezeigt, ist $uF(x)$ eine Stammfunktion von $uf(x)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b uf(x)dx &= [uF(x)]_a^b \\ &= uF(b) - uF(a) \\ &= u(F(b) - F(a)) \\ &= u[F(x)]_a^b \\ &= u \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Produktregel bzw. Partielle Integration**Theorem 16.27 (Produktregel für unbestimmte Integrale)**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Zunächst ist gar nicht klar, was diese Regel bringen soll, da das Integral auf der rechten Seite nicht einfacher aussieht als das auf der linken. Wenn man aber die Faktoren f, g' so wählt, dass f' "einfacher" ist als f und g möglichst nicht schwieriger als g' , kann die Regel durchaus gewinnbringend sein.

Beispiel 16.28 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von

$$x \cos(x).$$

Man hat nun die Wahl, welchen der beiden Faktoren x und $\cos(x)$ man mit $f(x)$ bzw. $g'(x)$ bezeichnen möchte. Da der Faktor x beim Ableiten einfacher wird und der Faktor $\cos(x)$ beim Integrieren nicht schwieriger, wählt man

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x).$$

Damit ist

$$f'(x) = 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sin(x).$$

Mit der o.g. Regel gilt

$$\begin{aligned} \int x \cos(x)dx &= x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Durch Ableiten kann man das Ergebnis verifizieren. Mit der Produkt- und Summenregel der Ableitung gilt

$$\begin{aligned} (x \sin(x) + \cos(x))' &= \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) \\ &= x \cos(x). \end{aligned}$$

Beweis. Ausgehend von der Produktregel der Ableitung

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

erhält man

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x).$$

Eine Stammfunktion von $(f(x)g(x))'$ ist $f(x)g(x)$. Sei $H(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)g'(x)$. Nimmt man auf beiden Seiten das unbestimmte Integral, erhält man mit der Summenregel

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x)dx &= \int ((f(x)g(x))' - f(x)g'(x))dx \\ &= \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= \{f(x)g(x) + C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R}\} - \{H(x) + C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f(x)g(x) + C_1 - H(x) + C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f(x)g(x) - H(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= f(x)g(x) - \{H(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Beispiel 16.29 Mit der Produktregel lässt sich auch

$$\int \ln(x)dx$$

berechnen. Mit

$$f(x) = \ln(x), \quad g'(x) = 1$$

ist

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int \ln(x)dx &= \int \ln(x) \cdot 1dx \\ &= x \ln(x) - \int \frac{1}{x}xdx \\ &= x \ln(x) - \int 1dx \\ &= x \ln(x) - x + C. \end{aligned}$$

Für bestimmte Integrale gilt die Produktregel analog.

Theorem 16.30 (Produktregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Man beginnt wieder mit der Produktregel der Ableitung und bringt den Summand $f'(x)g(x)$ auf eine Seite.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ f'(x)g(x) &= (f(x)g(x))' - f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Integriert man beide Seiten von a bis b , erhält man

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)dx &= \int_a^b ((f(x)g(x))' - f(x)g'(x))dx \\ &= \int_a^b (f(x)g(x))'dx - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Substitutionsregel**Theorem 16.31 (Substitutionsregel für unbestimmte Integrale)**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Beweis. Mit der Kettenregel der Ableitung gilt

$$\begin{aligned}(F(g(x)) + C)' &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Beispiel 16.32 Gesucht ist die Menge der Stammfunktionen von

$$\cos(x^2) 2x.$$

Mit

$$f(x) = \cos(x), \quad g(x) = x^2$$

und

$$F(x) = \sin(x), \quad g'(x) = 2x$$

gilt

$$\cos(x^2) 2x = f(g(x))g'(x)$$

und damit

$$\int \cos(x^2) 2x dx = \sin(x^2) + C.$$

Besteht also der Integrand aus einer Komposition $f(g(x))$ mal der Ableitung der inneren Funktion $g'(x)$, dann genügt es, eine Stammfunktion der äußeren Funktion zu finden und diese auf die innere anzuwenden.

Manchmal muss man das Integral etwas umformen, bevor man die Substitutionsregel anwenden kann. Hierzu ein paar Beispiele.

Beispiel 16.33 Die Funktion $x \cos(x^2)$ hat nicht die Form $f(g(x))g'(x)$, man kann die Substitutionsregel aber trotzdem anwenden, wenn man den fehlenden Faktor 2 durch einen Faktor $1/2$ vor dem Integral ausgleicht:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \cos(x^2) 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \sin(x^2) + C.\end{aligned}$$

Beispiel 16.34 Bei der Funktion $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ erkennt man zunächst gar nicht, wo eine verkettete Funktion sein soll. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \cos(x)^{-1} \sin(x).\end{aligned}$$

Mit

$$f(x) = x^{-1}, \quad g(x) = \cos(x)$$

und

$$F(x) = \ln|x|, \quad g'(x) = -\sin(x)$$

gilt

$$f(g(x))g'(x) = -\tan(x)$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \tan(x) dx &= -\int \cos(x)^{-1} (-\sin(x)) dx \\ &= -\ln|\cos(x)| + C.\end{aligned}$$

Rezept. Da es manchmal nicht ganz einfach ist, zu erkennen, ob und wie man den Integrand auf die Form $f(g(x))g'(x)$ bringen kann, gibt es für die Anwendung der Substitutionsregel ein Rezept, an dem man sich festhalten kann. Berechnet werden soll

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

- Wähle einen Teilterm $g(x)$ des Integranden und substituiere diesen durch eine neue Variable u .
- Berechne $g'(x)$ unter Verwendung der Differentialnotation.

$$\frac{du}{dx} = g'(x).$$

- Löse nach dx auf.

$$dx = \frac{1}{g'(x)}du.$$

- Ersetze jedes Auftreten von x im Integranden durch u und dx durch du . Falls dies nicht möglich ist, ist die Substitutionsregel entweder nicht anwendbar oder man muss eine andere Substitution wählen. Wichtig ist, dass danach *kein* x im Integrand auftritt. Das Integral ist dann

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)g'(x) \underbrace{\frac{1}{g'(x)}du}_{dx} = f(u)du$$

- Integriere nach u . Man erhält dann $F(u) + C$.
- Ersetze u wieder durch $g(x)$. Man erhält dann $F(g(x)) + C$.

Beispiel 16.35 Mit diesem Rezept wird nun nochmal eine Stammfunktion von

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

berechnet. Im Gegensatz zum vorigen Beispiel muss man nun gar nicht erkennen, wie man den Term auf die Form $f(g(x))g'(x)$ bringen kann, sondern lediglich mit etwas Glück den richtigen Teilterm zum Substituieren wählen.

- Substitution

$$u = \cos(x).$$

- Ableiten.

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x).$$

- Nach dx auflösen.

$$dx = -\frac{1}{\sin(x)} du.$$

- Im Integrand alle x durch u und dx durch du ersetzen.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx &= \int \frac{\sin(x)}{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{\sin(x)} du\right)}_{dx} \\ &= -\int \frac{1}{u} du \\ &= -\ln|u| + C. \end{aligned}$$

- Rücksubstitution

$$-\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C.$$

Beispiel 16.36 Angenommen man würde bei der Berechnung einer Stammfunktion von

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

“falsch” substituieren, d.h.

$$u = \sin(x).$$

Der weitere Rechenweg wäre dann

$$\frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} du.$$

Damit ist

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{u}{\cos(x)} \frac{1}{\cos(x)} du = \int \frac{u}{\cos^2(x)} du.$$

Hier ist das Problem, dass nicht alle x im Integrand direkt durch u ersetzt werden können.

Man kann jedoch auch hier zum Ziel kommen, indem man

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

ausnutzt. Damit ist

$$\int \frac{u}{\cos^2(x)} du = \int \frac{u}{1 - \sin^2(x)} du = \int \frac{u}{1 - u^2} du.$$

Jetzt sind wie erforderlich alle x im Integrand durch u ersetzt. Um dieses Integral zu lösen, muss man aber nochmal substituieren.

$$w = 1 - u^2, \quad \frac{dw}{du} = -2u, \quad du = -\frac{1}{2u} dw.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{1 - u^2} du &= \int \frac{u}{w} \left(-\frac{1}{2u} dw \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw \\ &= -\frac{1}{2} \ln |w| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln |1 - u^2| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2(x)| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\cos^2(x)| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln (|\cos(x)|^2) + C \\ &= -\ln |\cos(x)| + C. \end{aligned}$$

Der Rechenweg war hier deutlich länger. Die “beste” Substitution zu finden, erfordert also etwas Übung. Wenn man erkennt, was die innere Funktion $g(x)$ sein könnte, ist $u = g(x)$ die richtige Wahl.

Theorem 16.37 (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Beweis. Da $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$ ist, muss man nur noch die Grenzen a und b einsetzen.

Das eigentlich interessante an der Substitution bei bestimmten Integralen ist, dass man sich die Rücksubstitution sparen kann wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= [F(g(x))]_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man ein Integral in ein anderes umformen ohne es wirklich zu lösen. Solche Umformungen sind u.a. wichtig für Integraltransformationen wie Fourier- und Laplace Transformation.

Beispiel 16.38 Für jede Funktion f gilt

$$\int_a^b f(x-1)dx = \int_{a-1}^{b-1} f(u)du.$$

Erforderlich ist hierzu lediglich die Substitution $u = x - 1$. Da man bei bestimmten Integralen die Integrationsvariable beliebig umbenennen darf, gilt

$$\int_a^b f(x-1)dx = \int_{a-1}^{b-1} f(x)dx.$$

In gleicher Weise erhält man mit der Substitution $u = 2x$

$$\int_a^b f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{2b} f(x)dx.$$

Beispiel 16.39 Gesucht ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)e^{\sin(x)} dx$$

Substitution

$$u = \sin(x), \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} du.$$

Beim konventionellen Rechenweg muss man zuerst eine Stammfunktion berechnen.

$$\begin{aligned} \int \cos(x)e^{\sin(x)} dx &= \int \cos(x)e^u \frac{1}{\cos(x)} du \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C \\ &= e^{\sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Danach werden die Integrationsgrenzen eingesetzt.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)e^{\sin(x)} dx &= \left[e^{\sin(x)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= e^{\sin(\pi/2)} - e^{\sin(-\pi/2)} \\ &= e^1 - e^{-1} \\ &= e - 1/e. \end{aligned}$$

Schneller und in einem Stück wäre es gegangen, wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)e^{\sin(x)} dx &= \int_{\sin(-\pi/2)}^{\sin(\pi/2)} \cos(x)e^u \frac{1}{\cos(x)} du \\ &= \int_{-1}^1 e^u du \\ &= [e^u]_{-1}^1 \\ &= e - 1/e. \end{aligned}$$

Man kann sich das so merken: Wenn x von a bis b läuft und $u = \sin(x)$ ist, dann läuft u von $\sin(a)$ bis $\sin(b)$.

17 Komplexe Zahlen

Der Nutzen von komplexen Zahlen besteht darin, dass man damit \sin und \cos durch die viel einfachere e -Funktion ersetzen kann. Für die e -Funktion gelten Rechengesetze wie z.B. $e^{x+y} = e^x e^y$, die viel einfacher sind als die Additionstheoreme für \sin und \cos . Weiter ist z.B. $1/e^x = e^{-x}$, ein Gesetz das für \sin und \cos natürlich nicht gilt. Insbesondere bei dem wichtigen Thema Schwingungen ist man sehr froh, wenn man diese einfachen Gesetze anwenden darf. Auch wenn der Name “komplexe” Zahlen nicht unbedingt darauf hindeutet — es geht ausschließlich darum, Dinge zu vereinfachen.

17.1 Motivation

Angenommen man würde nur die natürlichen Zahlen \mathbb{N} kennen und die Funktionen Addition und Multiplikation. Dann hätte z.B. die Gleichung

$$x + 1 = 1$$

keine Lösung. Man “erfindet” daher eine neue Zahl, die man 0 nennt und die definiert ist als Lösung dieser Gleichung. Damit hat man die Menge \mathbb{N}_0 .

Als nächstes betrachtet man die Gleichung

$$x + 1 = 0.$$

Auch diese hat keine Lösung. Man erfindet daher eine neue Zahl namens -1 , die wiederum definiert ist als Lösung dieser Gleichung. Somit kommt man zu den ganzen Zahlen \mathbb{Z} .

Die nächste Gleichung ist

$$2x = 1.$$

Die Lösung dieser Gleichung existiert nicht in \mathbb{Z} , so dass man wieder eine neue Zahl $1/2$ braucht, was zu der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} führt.

Selbst mit rationalen Zahlen kann man die Gleichung

$$x^2 = 2$$

nicht lösen. Wieder muss man die Zahlenmenge erweitern, diesmal um die irrationale Zahl $\sqrt{2}$. Kann man damit nun endlich Lösungen für alle Gleichungen mit Addition und Multiplikation finden?

Einen Schritt braucht’s noch. Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

hat immer noch keine Lösung. Wir machen nichts anderes als in allen Fällen vorher. Die neue Superzahl nennt man j . Diese Zahl hat die Eigenschaft

$$j^2 = -1.$$

Das ist übrigens alles, was es über j zu wissen gibt.

Natürlich möchte man mit j rechnen. Dafür muss man die Addition und Multiplikation für neue Zahlen entsprechend definieren. Alles was wir verlangen ist, dass das Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz weiterhin gilt. Außerdem soll Null das neutrale Element der Addition und Eins das neutrale Element der Multiplikation bleiben. Damit ist festgelegt, dass z.B.

$$1 + j = j + 1$$

oder

$$\begin{aligned} j + j &= 1j + 1j \\ &= (1 + 1)j \\ &= 2j. \end{aligned}$$

Wie üblich verwendet man das einstellige Minus als Abkürzung für die Multiplikation mit -1 , d.h.

$$-j = (-1)j.$$

Man kann also mit j genau so rechnen wie bisher mit x und Terme umformen. So ist z.B.

$$\begin{aligned} j(1 + j) &= j + j^2 \\ &= j - 1. \end{aligned}$$

17.2 Menge der komplexen Zahlen

Potenzen von j können immer auf ± 1 oder $\pm j$ reduziert werden. So ist z.B.

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ j^3 &= j^2 j = -j \\ j^4 &= j^2 j^2 = (-1)(-1) = 1 \\ j^5 &= j^4 j = j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man kann damit jeden Term auf die Form $a + jb$ bringen, wobei a, b reelle Zahlen sind, z.B.

$$\begin{aligned} j(2 + 3j) + 4 &= 2j + 3j^2 + 4 \\ &= -3 + 4 + 2j \\ &= 1 + 2j. \end{aligned}$$

Definition 17.1 (Menge der komplexen Zahlen)

Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{C} = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Vergleichbar ist dies mit der Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ existieren folglich $a, b \in \mathbb{R}$ so dass

$$z = a + jb.$$

Hierbei heißt a Realteil und b Imaginärteil von z , kurz

$$a = \operatorname{re}(z), \quad b = \operatorname{im}(z).$$

Beachten Sie, dass der Imaginärteil von z eine reelle Zahl ist, d.h. b und nicht jb .

Damit ist z.B.

$$\operatorname{re}(3 + 5j) = 3, \quad \operatorname{im}(3 + 5j) = 5.$$

Im Gegensatz zu rationalen Zahlen ist die Darstellung einer komplexen Zahl durch Real- und Imaginärteil eindeutig, d.h. wenn

$$a_1 + jb_1 = a_2 + jb_2$$

dann ist $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Man kann sich eine komplexe Zahl $z = a + jb$ daher auch als Paar (a, b) von zwei reellen Zahlen vorstellen und bezeichnet Real- und Imaginärteil als kartesische Koordinaten von z .

Jede reelle Zahl a ist eine spezielle komplexe Zahl mit Imaginärteil 0, d.h.

$$a = a + 0j.$$

Damit ist \mathbb{R} eine Teilmenge von \mathbb{C} .

Addition und Multiplikation. Real- und Imaginärteil der Summe zweier komplexer Zahlen kann man wie folgt berechnen.

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\text{Realteil}} + j \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Damit gilt für komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + jb_1$ und $z_2 = a_2 + jb_2$

$$\operatorname{re}(z_1 + z_2) = \operatorname{re}(z_1) + \operatorname{re}(z_2), \quad \operatorname{im}(z_1 + z_2) = \operatorname{im}(z_1) + \operatorname{im}(z_2).$$

Für die Multiplikation ergeben sich schwierigere Formeln:

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) &= a_1a_2 + a_1jb_2 + jb_1a_2 + jb_1jb_2 \\ &= a_1a_2 + j^2b_1b_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 \\ &= \underbrace{a_1a_2 - b_1b_2}_{\text{Realteil}} + j \underbrace{(a_1b_2 + b_1a_2)}_{\text{Imaginärteil}}. \end{aligned}$$

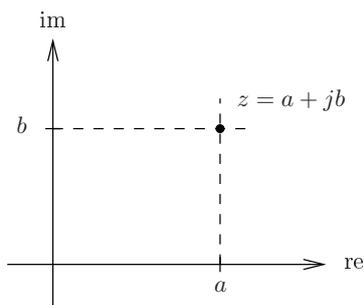
Damit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(z_1z_2) &= \operatorname{re}(z_1)\operatorname{re}(z_2) - \operatorname{im}(z_1)\operatorname{im}(z_2) \\ \operatorname{im}(z_1z_2) &= \operatorname{re}(z_1)\operatorname{im}(z_2) + \operatorname{im}(z_1)\operatorname{re}(z_2). \end{aligned}$$

Für den Realteil merkt man sich das kurz als “re re - im im”, für den Imaginärteil “re im + im re”.

17.3 Komplexe Ebene

Ähnlich wie man eine reelle Zahl als Punkte auf einer Geraden darstellen kann, kann man sich eine komplexe Zahl $z = a + jb$ als Punkt mit kartesischen Koordinaten (a, b) in einer Ebene vorstellen. Da man den Realteil nach rechts und den Imaginärteil nach oben abträgt, heißen die beiden Achsen reelle und imaginäre Achse.



Im Unterschied zu reellen Zahlen gibt es auf komplexen Zahlen daher keine Ordnungsrelationen $<, >, \leq, \geq$.

Betrag. Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als ihr Abstand zum Koordinatenursprung. Dies ist bei reellen Zahlen genauso. Mit dem Satz des Pythagoras gilt somit

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

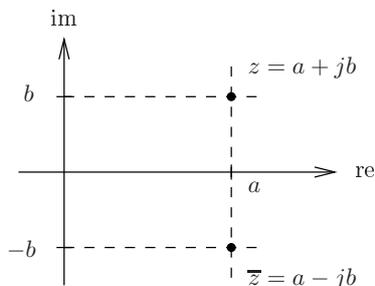
So ist z.B.

$$\begin{aligned} |-2 + 3j| &= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \\ |-4| &= \sqrt{16} = 4 \\ |5j| &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Konjugiert komplexe Zahl. Eine nützliche Hilfsgröße ist die konjugiert komplexe Zahl zu z . Ist $z = a + jb$, dann ist

$$\bar{z} = a - jb.$$

Bei der konjugiert komplexen Zahl wird also lediglich der Imaginärteil negiert. In der komplexen Ebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse.



Im Spezialfall wenn z eine reelle Zahl ist, d.h. $b = 0$ ist, gilt $\bar{z} = z$. Auf reelle Zahlen hat Konjugieren folglich keine Auswirkung.

Offensichtlich gilt $\bar{\bar{z}} = z$. Weitere Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl sind wie folgt:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\operatorname{re}(z) \\z - \bar{z} &= (a + jb) - (a - jb) = 2jb = 2j\operatorname{im}(z).\end{aligned}$$

Damit erhält man Formeln zur Berechnung des Real- und Imaginärteils von z :

$$\operatorname{re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{im}(z) = \frac{1}{2j}(z - \bar{z}).$$

Weiterhin gilt

$$z\bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Inbesondere ist $z\bar{z}$ also immer reell und es gilt

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

17.4 Division von komplexen Zahlen

Bisher hatten wir lediglich die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen betrachtet. Die Division kann man immer auf Multiplikation mit dem Kehrwert reduzieren, d.h.

$$\frac{x}{y} = x \frac{1}{y}.$$

Es genügt daher, den Kehrwert einer komplexen Zahl zu berechnen. Wie im Reellen ist der Kehrwert einer komplexen Zahl $a + jb$ definiert als die Zahl z mit

$$(a + jb)z = 1.$$

Zunächst ist gar nicht klar, ob diese Gleichung für alle $a + jb \neq 0$ eine Lösung hat, d.h. ob jede komplexe Zahl $\neq 0$ einen Kehrwert hat. Der Trick ist, beide Seiten mit der konjugiert komplexen Zahl $a - jb$ zu multiplizieren:

$$\begin{aligned} (a + jb)(a - jb)z &= a - jb \\ (a^2 + b^2)z &= a - jb \\ z &= \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 + b^2}}_{\text{Realteil}} + j \underbrace{\frac{-b}{a^2 + b^2}}_{\text{Imaginärteil}}. \end{aligned}$$

Funktioniert hat das deshalb, weil man nur noch durch eine *reelle* Zahl $a^2 + b^2$ dividieren musste. Damit hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ einen Kehrwert, auch wenn die Formel etwas kompliziert aussieht. Verwendet man die übliche Bruchstrich-Notation, muss man sich aber nur merken, dass man mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + jb} &= \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} \\ &= \frac{a - jb}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} + j \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Beispiel 17.2

$$\begin{aligned} \frac{3 - 2j}{2 + j} &= \frac{(3 - 2j)(2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} && \text{(Erweitern mit } 2 - j\text{)} \\ &= \frac{6 - 3j - 4j + 2j^2}{4 - 2j + 2j - j^2} \\ &= \frac{6 - 7j - 2}{4 + 1} \\ &= \frac{4 - 7j}{5} \\ &= \frac{4}{5} + j \left(-\frac{7}{5} \right). \end{aligned}$$

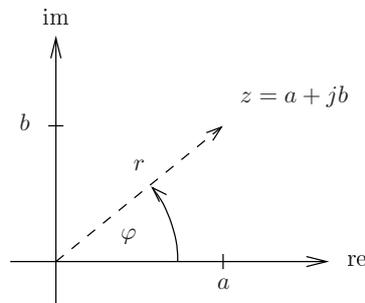
Beispiel 17.3 Merken sollte man sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{j} &= \frac{j}{j^2} && \text{(Erweitern mit } j\text{)} \\ &= \frac{j}{-1} \\ &= -j.\end{aligned}$$

Der Kehrwert von j ist somit $-j$.

17.5 Polarkoordinaten

Man kann einen Punkt in einem Koordinatensystem entweder wie bisher durch seine kartesischen Koordinaten a, b angeben oder durch Polarkoordinaten r, φ .



Den Winkel φ einer komplexen Zahl z bezeichnet man auch als Argument von z oder mit $\angle z$.

Kartesische und Polarkoordinaten kann man ineinander umrechnen.

- Sind die Polarkoordinaten r, φ gegeben, kann man die kartesischen Koordinaten a, b berechnen durch

$$a = r \cos(\varphi), \quad b = r \sin(\varphi).$$

- Sind die kartesischen Koordinaten a, b gegeben, erhält man mit Pythagoras

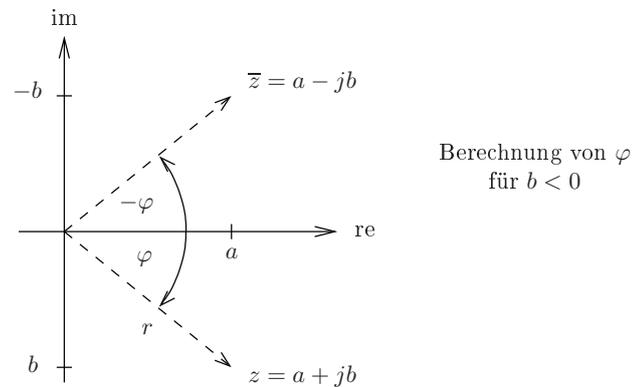
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

Man wäre versucht, daraus $\varphi = \arctan(b/a)$ abzuleiten, aber das ist nicht richtig! Die \tan -Funktion ist nur eingeschränkt auf $]-\pi/2, \pi/2[$ bijektiv und nur dort ist \arctan ihre Umkehrfunktion. Damit liefert $\arctan(b/a)$ nur dann den korrekten Winkel, wenn dieser im Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ liegt, d.h. für $a > 0$.

Folglich ist eine Fallunterscheidung erforderlich, in welchem Quadranten z liegt. Da das etwas hässlich wird, gibt es eine zweistellige Standardfunktion $\arctan2$, die das erledigt. Damit ist

$$\varphi = \arctan2(b, a).$$

Die $\arctan2$ -Funktion wird wie folgt berechnet. Um eine Ausnahmebehandlung für den Spezialfall $a = 0$ bei der Division b/a zu vermeiden, arbeitet man besser mit der \arccos -Funktion. Die auf $[0, \pi]$ eingeschränkte \cos -Funktion ist bijektiv. Für $b > 0$ liefert daher $\varphi = \arccos(a/r)$ den korrekten Winkel. Für $b < 0$ berechnet man zunächst den Winkel von \bar{z} mit der \arccos -Funktion. Um den Winkel von z zu erhalten, muss man diesen nur noch negieren.



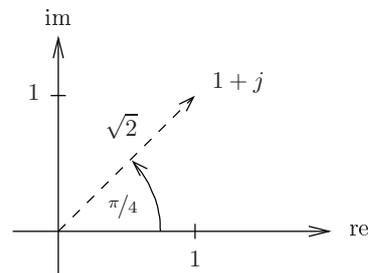
Im Sonderfall $r = 0$ ist der Winkel undefiniert. Man kann ihn dann willkürlich auf Null setzen. Damit ist

$$\arctan2(b, a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = 0 \\ \arccos(a/r) & \text{falls } b \geq 0 \text{ und } r \neq 0 \\ -\arccos(a/r) & \text{falls } b < 0 \text{ und } r \neq 0 \end{cases}$$

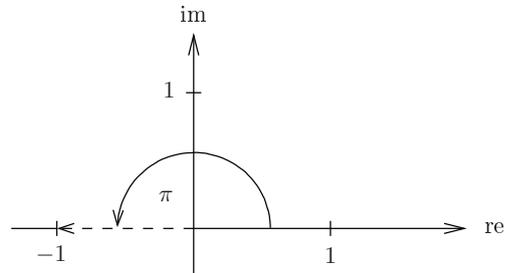
wobei $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Während die kartesischen Koordinaten a, b und der Betrag r einer komplexen Zahl z eindeutig sind, gilt dies für den Winkel φ nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Um Eindeutigkeit zu erhalten, fordert man daher oft, dass der Winkel z.B. auf $-\pi < \varphi \leq \pi$ normiert ist.

Beispiel 17.4 Sei $z = 1 + j$, d.h. die kartesischen Koordinaten sind $a = 1$, $b = 1$. Statt mit o.g. Formeln zu rechnen, ist es einfacher, die Zahl in der komplexen Ebene einzuzichnen. Man sieht dann, dass sie auf der Winkelhalbierenden liegt und der Winkel somit $\varphi = \pi/4$ ist. Mit dem Satz von Pythagoras sieht man auch schnell, dass $r = \sqrt{2}$ ist.



Beispiel 17.5 Die Polarkoordinaten von z seien $r = 1$ und $\varphi = \pi$. In der komplexen Ebene sieht man, dass dann die kartesischen Koordinaten $a = -1$ und $b = 0$ sind. Damit ist $z = -1$.



Für $r = 2$ und $\varphi = \pi/2$ erhält man entsprechend $z = 2j$.

17.6 Komplexe e -Funktion

Mit $a = r \cos(\varphi)$ und $b = r \sin(\varphi)$ kann man eine komplexe Zahl z unter Verwendung ihrer in Polarkoordinaten darstellen.

$$\begin{aligned} z &= a + jb \\ &= r \cos(\varphi) + jr \sin(\varphi) \\ &= r \underbrace{(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))}_{e^{j\varphi}} \\ &= r e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die komplexe e -Funktion für imaginäre Argumente $j\varphi$ verwendet. Diese ist definiert durch

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).$$

Man bezeichnet diese Gleichung als Euler Gleichung. Warum wird die komplexe e -Funktion auf diese Weise definiert? Der Wunsch ist natürlich, dass sich die e -Funktion für komplexe Argumente möglichst gleich verhält wie für reelle. Im Reellen kann man die e -Funktion durch ihre Taylor Reihe definieren. Der Vorteil hierbei ist, dass man nur die Addition und Multiplikation braucht, die man für komplexe Zahlen ja bereits definiert hat. Mit den bekannten Taylor Reihen

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \end{aligned}$$

erhält man für $x = j\varphi$

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi + \frac{1}{2!}(j\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(j\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(j\varphi)^4 + \dots + \frac{1}{5!}(j\varphi)^5 + \dots \\ &= 1 + j\varphi + \frac{1}{2!}j^2\varphi^2 + \frac{1}{3!}j^3\varphi^3 + \frac{1}{4!}j^4\varphi^4 + \frac{1}{5!}j^5\varphi^5 + \dots \\ &= 1 + j\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - j\frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + j\frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots \\ &= \underbrace{1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots}_{\cos(\varphi)} + j \underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots\right)}_{\sin(\varphi)} \\ &= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Damit ist

$$|re^{j\varphi}| = r, \quad \angle(re^{j\varphi}) = \varphi.$$

Da die komplexe e -Funktion genau wie die reelle e -Funktion durch eine Taylor Reihe definiert ist, gelten im Komplexen auch die gleichen Rechengesetze, insbesondere

$$\begin{aligned} e^{a+jb} &= e^a e^{jb} \\ &= e^a (\cos(b) + j \sin(b)) \end{aligned}$$

Damit ist die komplexe e -Funktion wie folgt definiert.

Definition 17.6 (Komplexe e -Funktion)

Die komplexe e -Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$e^{a+jb} = e^a (\cos(b) + j \sin(b)).$$

Eine komplexe Zahl kann damit mit kartesischen Koordinaten a, b oder Polarkoordinaten r, φ ausgedrückt werden durch

$$z = a + jb = r e^{j\varphi}.$$

Dies ist vergleichbar mit rationalen Zahlen, die man durch ganzzahligen Zähler und Nenner oder durch Dezimalbrüche ausdrücken kann, z.B.

$$x = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Beispiel 17.7 Die Polarkoordinaten von $1 + j$ sind $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \pi/4$.
Damit ist

$$1 + j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{2} e^{j\pi/4} &= \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4)) \\ &= \sqrt{2} (\sqrt{1/2} + j \sqrt{1/2}) \\ &= 1 + j. \end{aligned}$$

Beispiel 17.8 Die Polarkoordinaten von -2 sind $r = 2$ und $\varphi = \pi$. Damit ist

$$-2 = 2 e^{j\pi}.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} 2 e^{j\pi} &= 2 (\cos(\pi) + j \sin(\pi)) \\ &= 2 (-1 + 0) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Beispiel 17.9 Die Polarkoordinaten von j sind $r = 1$ und $\varphi = \pi/2$. Damit ist

$$j = e^{j\pi/2}.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} e^{j\pi/2} &= \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) \\ &= 0 + j \\ &= j. \end{aligned}$$

Beispiel 17.10 Da die sin- und cos-Funktion 2π -periodisch sind, ist auch die komplexe e -Funktion im Imaginärteil 2π periodisch.

$$\begin{aligned} e^{a+j(b+2\pi)} &= e^a e^{j(b+2\pi)} \\ &= e^a (\cos(b+2\pi) + j \sin(b+2\pi)) \\ &= e^a (\cos(b) + j \sin(b)) \\ &= e^a e^{jb} \\ &= e^{a+jb}. \end{aligned}$$

Beispiel 17.11 Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann man die Additionstheoreme herleiten.

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \operatorname{re}(e^{j(x+y)}) \\ &= \operatorname{re}(e^{jx} e^{jy}) \\ &= \operatorname{re}((\cos(x) + j \sin(x))(\cos(y) + j \sin(y))) \\ &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y). \end{aligned}$$

17.7 Rechnen in Polarkoordinaten

Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist in Polarkoordinaten viel einfacher als in kartesischen. Sei $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$, dann ist

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{j\varphi_1 + j\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| |z_2| \\ \sphericalangle(z_1 z_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \sphericalangle(z_1) + \sphericalangle(z_2). \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen multipliziert man also dadurch, dass man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert. Die komplexe Multiplikation kostet somit nur eine reelle Multiplikation und eine Addition in Polarkoordinaten, während in kartesischen Koordinaten 4 Multiplikationen und 2 Additionen erforderlich sind.

Auch die Division ist in Polarkoordinaten viel einfacher.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j\varphi_1} e^{-j\varphi_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \sphericalangle\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \varphi_1 - \varphi_2 = \sphericalangle z_1 - \sphericalangle z_2. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den Kehrwert

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \sphericalangle\left(\frac{1}{z}\right) = -\sphericalangle z.$$

Andererseits ist die Addition in Polarkoordinaten umständlich. Um

$$r_1 e^{j\varphi_1} + r_2 e^{j\varphi_2}$$

zu berechnen, muss man den Umweg über kartesische Koordinaten gehen, was die sehr teure Auswertung von sin- und cos-Funktionen erfordert. Im Rechner werden daher für komplexe Zahlen meistens kartesische Koordinaten verwendet.

Beispiel 17.12 Der Term

$$(1+j)je^{j\pi/4}$$

soll vereinfacht werden.

- Eine Möglichkeit ist, alle Faktoren in kartesische Koordinaten umzurechnen. Mit

$$\begin{aligned} e^{j\pi/4} &= (\sqrt{1/2} + j\sqrt{1/2}) \\ &= \sqrt{1/2}(1+j) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} (1+j)je^{j\pi/4} &= (1+j)j\sqrt{1/2}(1+j) \\ &= \sqrt{1/2}(j-1)(1+j) \\ &= \sqrt{1/2}(j+j^2-1-j) \\ &= \sqrt{1/2}(-2) \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit ist, zuerst alle Faktoren in Polarkoordinaten umzurechnen. Mit

$$1+j = \sqrt{2}e^{j\pi/4}, \quad j = e^{j\pi/2}$$

gilt

$$\begin{aligned} (1+j)je^{j\pi/4} &= \sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{j\pi/2}e^{j\pi/4} \\ &= \sqrt{2}e^{j(\pi/4+\pi/2+\pi/4)} \\ &= \sqrt{2}e^{j\pi} \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

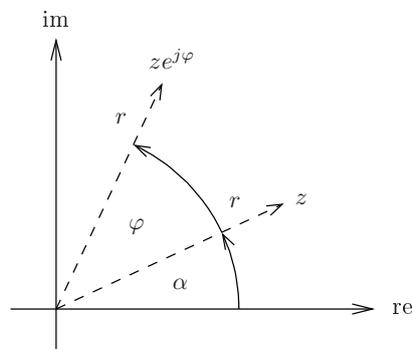
Die Multiplikation mit $e^{j\varphi}$ hat eine geometrische Interpretation in der komplexen Ebene. Sei

$$z = re^{j\alpha}$$

dann ist

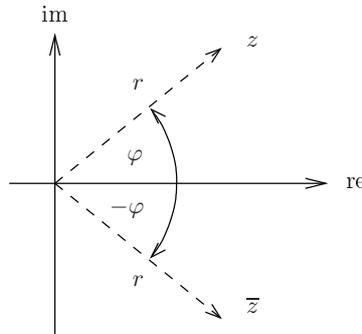
$$ze^{j\varphi} = re^{j(\alpha+\varphi)}.$$

Die Multiplikation mit $e^{j\varphi}$ bewirkt somit eine Drehung von z um Winkel φ .



Die konjugiert komplex Operation bewirkt eine Spiegelung an der reellen Achse. Dies entspricht einer Negation des Winkels. Damit gilt

$$\overline{re^{j\varphi}} = re^{-j\varphi}.$$



Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2}} \\ &= \overline{r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}} \\ &= r_1 r_2 e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 e^{-j\varphi_1} e^{-j\varphi_2} \\ &= r_1 e^{-j\varphi_1} r_2 e^{-j\varphi_2} \\ &= \overline{z_1} \overline{z_2} \end{aligned}$$

Entsprechend zeigt man für die Division

$$\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$$

Da Multiplizieren in Polarkoordinaten sehr effizient ist, gilt dies umso mehr für Potenzen.

Beispiel 17.13 Es wäre sehr mühsam, z.B. $(j-1)^{10}$ in kartesischen Koordinaten zu berechnen. Viel besser ist hier der Weg über Polarkoordinaten. Zeichnet man $j-1$ in die Komplexe Ebene ein, kann man die Polarkoordinaten $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = 3\pi/4$ ablesen. Damit ist

$$\begin{aligned} j-1 &= \sqrt{2}e^{j3\pi/4} \\ (j-1)^{10} &= \left(\sqrt{2}e^{j3\pi/4}\right)^{10} \\ &= \left(2^{1/2}\right)^{10} e^{j30\pi/4} \\ &= 2^5 e^{j(7+1/2)\pi} \\ &= 32e^{j7\pi} e^{j\pi/2} \\ &= 32(-1)j \\ &= -32j. \end{aligned}$$

17.8 Komplexe Wurzel

Lösung der Gleichung $z^n = 1$.

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

für $n \in \mathbb{N}$, die auch als n -te Wurzeln aus 1 bezeichnet werden.

- Für $n = 1$ existiert nur eine Lösung $z = 1$.
- Für $n = 2$ existieren zwei Lösungen $z = 1$ und $z = -1$.

Entsprechend wäre zu erwarten, dass es für $n = 3$ drei Lösungen gibt. Da $z = 1$ die einzige reelle Lösung ist, müssen die anderen beiden komplex sein. Tatsächlich gilt für $z = e^{2\pi j/3}$

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(e^{2\pi j/3} \right)^3 \\ &= e^{2\pi j} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die andere Lösung ist $z = e^{4\pi j/3}$. Auch hier gilt

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(e^{4\pi j/3} \right)^3 \\ &= e^{4\pi j} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Um die Lösungen der o.g. Gleichung systematisch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen, stellt man z in Polarkoordinaten dar, d.h.

$$z = r e^{j\varphi} \quad \text{mit } r \geq 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} z^n &= \left(r e^{j\varphi} \right)^n \\ &= r^n e^{jn\varphi} \end{aligned}$$

Zu Lösen ist damit die Gleichung

$$r^n e^{jn\varphi} = 1.$$

Damit zwei komplexe Zahlen gleich sind, müssen ihre Beträge gleich sein, d.h.

$$r^n = 1$$

und da $r \geq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ folgt $r = 1$.

Außerdem müssen die Winkel gleich sein – allerdings aufgrund der 2π -Periodizität der komplexen e -Funktion nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Folglich ist

$$\begin{aligned} n\varphi &= 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= 2\pi k/n. \end{aligned}$$

Damit scheint es zunächst als habe man unendlich viele Lösungen

$$z = e^{j\varphi} = e^{2\pi j k/n} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tatsächlich sind es aber nur n verschiedene Lösungen für $k = 0, 1, \dots, n-1$, die sich für $k \geq n$ wiederholen. Die komplexe Zahl z , die man für ein k bekommt, ist nämlich die gleiche wie für $k+n$. Der Winkel für $k+n$ ist

$$\frac{2\pi(k+n)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi.$$

Er unterscheidet sich nur um 2π von dem Winkel für k und führt somit zur selben komplexen Zahl z . Damit erhält man für $k=n$ die selbe Zahl wie für $k=0$. Für $k=n+1$ erhält man die selbe wie für $k=1$ usw.

Damit hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen

$$e^{2\pi j k/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Für $k=0$ erhält man die reelle Lösung

$$e^{2\pi j 0/n} = 1.$$

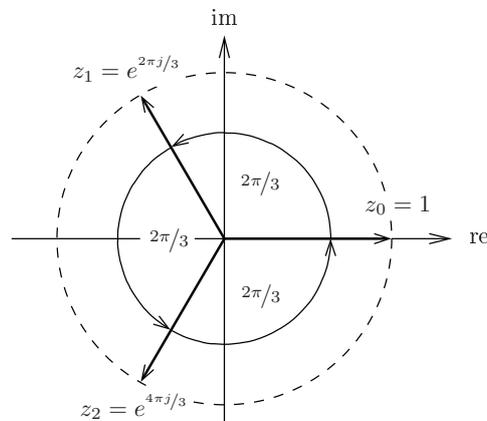
Ist n gerade, erhält man eine weitere reelle Lösung für $k=n/2$

$$e^{2\pi j (n/2)/n} = e^{2\pi j/2} = e^{\pi j} = -1.$$

Im Spezialfall $n=3$ erhält man die Lösungen

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{2\pi j 0/3} = 1 \\ z_1 &= e^{2\pi j 1/3} = e^{2\pi j/3} \\ z_2 &= e^{2\pi j 2/3} = e^{4\pi j/3}. \end{aligned}$$

Da alle den selben Betrag 1 haben, liegen sie auf dem Einheitskreis im Winkelabstand $2\pi/3$.



Mit der gleichen Vorgehensweise kann man nun schwierigere Gleichungen lösen, z.B.

$$z^5 = 1 + j.$$

Der Trick ist, dass man die rechte Seite ebenfalls in Polarkoordinate darstellen muss. Mit

$$\begin{aligned} z &= re^{j\varphi} \\ 1 + j &= \sqrt{2}e^{j\pi/4} \end{aligned}$$

gilt

$$r^5 e^{j5\varphi} = \sqrt{2}e^{j\pi/4}.$$

Aus der Gleichheit der Beträge folgt

$$\begin{aligned} r^5 &= \sqrt{2} \\ r &= \left(\sqrt{2}\right)^{1/5} = \sqrt[10]{2}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der Winkel bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π folgt

$$\begin{aligned} 5\varphi &= \pi/4 + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \pi/20 + 2\pi k/5. \end{aligned}$$

Der Winkel für k und $k+5$ unterscheidet sich wieder nur um 2π und führt somit zur selben Lösung. Damit sind die Lösungen

$$z_k = \sqrt[10]{2}e^{\pi j/20 + 2\pi j k/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Alle Lösungen liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[10]{2}$ und haben Winkelabstand $2\pi/5$.

Komplexe Wurzelfunktion

Im Reellen ist \sqrt{a} für $a \geq 0$ definiert als Lösung der Gleichung

$$x^2 = a.$$

Da der Funktionswert eindeutig sein muss, fordert man zusätzlich $x \geq 0$. Somit ist $\sqrt{4} = 2$ und nicht -2 obwohl 2 und -2 Lösungen von $x^2 = 4$ sind.

Im Komplexen ist die Wurzelfunktion analog definiert. Für $a \in \mathbb{C}$ ist \sqrt{a} eine Lösung der Gleichung

$$z^2 = a.$$

Da diese Gleichung i.a. zwei komplexe Lösungen hat, muss man festlegen, welche man will. Seien r, α die Polarkoordinaten von a mit $-\pi < \alpha \leq \pi$. Dann sind die Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r}e^{j\alpha/2} \\ z_2 &= \sqrt{r}e^{j(\alpha+2\pi)/2}. \end{aligned}$$

Als Funktionswert wählt man die erste, d.h.

$$\sqrt{a} = \sqrt{r}e^{j\alpha/2}.$$

Dieser Wert wird auch als ‘‘Hauptwert’’ der Wurzel bezeichnet.

Wenn man die komplexe Wurzel aus einer Zahl a ziehen möchte, stellt man $a = re^{j\alpha}$ in Polarkoordinaten dar mit $-\pi < \alpha \leq \pi$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= a^{1/2} \\ &= (re^{j\alpha})^{1/2} \\ &= r^{1/2}(e^{j\alpha})^{1/2} \\ &= \sqrt{r}e^{j\alpha/2}. \end{aligned}$$

Da

$$-\pi/2 < \alpha/2 \leq \pi/2$$

ist der Realteil einer komplexen Wurzel nie negativ.

Definition 17.14 (Komplexe Wurzelfunktion)

Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{j\varphi/2}$$

wobei r, φ die Polarkoordinaten von z sind mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Insbesondere kann man mit der komplexen Wurzelfunktion auch Wurzeln aus negativen, reellen Zahlen ziehen. So ist z.B.

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4e^{j\pi}} \\ &= 2e^{j\pi/2} \\ &= 2j. \end{aligned}$$

Generell gilt für $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned}\sqrt{-x} &= \sqrt{x e^{j\pi}} \\ &= \sqrt{x} e^{j\pi/2} \\ &= j\sqrt{x}.\end{aligned}$$

17.9 Potenzrechnen

Bei den bekannten Potenzrechengesetzen ist Vorsicht geboten. Diese gelten *nicht*, wenn die Basis negativ ist und der Exponent keine ganze Zahl ist.

Beispiel 17.15 Bekannt ist das Potenzrechengesetz

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

Im Fall $a = b = -1$ und $n = 1/2$ ist dieses Gesetz jedoch nicht gültig. Es gilt

$$\begin{aligned}(-1)^{1/2} \cdot (-1)^{1/2} &= j \cdot j = -1 \\ ((-1) \cdot (-1))^{1/2} &= 1^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

Beispiel 17.16 Auch das Gesetz vom doppelten Exponent

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

ist im Fall $a = -1$, $n = 2$, $m = 1/2$ nicht anwendbar — selbst wenn hierbei keine komplexen Zwischenergebnisse auftreten:

$$\begin{aligned}(-1^2)^{1/2} &= 1^{1/2} = 1 \\ (-1)^{2 \cdot 1/2} &= (-1)^1 = -1.\end{aligned}$$

17.10 Komplexer Logarithmus

Auch die Logarithmusfunktion kann für komplexe Zahlen erweitert werden. Im Reellen ist $\ln(x)$ definiert als Umkehrfunktion der e -Funktion, d.h.

$$\ln(x) = y \quad \text{genau dann wenn} \quad e^y = x, \quad x > 0.$$

Die komplexe e -Funktion ist aber im Gegensatz zur reellen e -Funktion nicht injektiv. So ist z.B.

$$w \neq w + 2\pi j \quad \text{aber} \quad e^{w+2\pi j} = e^w e^{2\pi j} = e^w.$$

Die komplexe e -Funktion hat folglich keine Umkehrfunktion.

Um zu einer bijektiven Funktion zu kommen, muss man die komplexe e -Funktion einschränken. Sei

$$D = \{w \mid -\pi < \operatorname{im}(w) \leq \pi\}.$$

Dann ist

$$f \in D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(w) = e^w$$

bijektiv. Für die Umkehrfunktion $f^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow D$ gilt

$$f^{-1}(z) = w \quad \text{genau dann wenn} \quad f(w) = z.$$

Die Gleichung $f(w) = z$ löst man wie folgt nach w auf.

$$\begin{aligned} f(w) &= z \\ e^w &= z \\ e^{\operatorname{re}(w)+j\operatorname{im}(w)} &= z \\ e^{\operatorname{re}(w)} e^{j\operatorname{im}(w)} &= z. \end{aligned}$$

- Aus der Gleichheit der Beträge auf beiden Seiten folgt

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{re}(w)} &= |z| \\ \operatorname{re}(w) &= \ln(|z|). \end{aligned}$$

Da $|z| \in \mathbb{R}$, ist hier mit \ln die bekannte, reelle \ln -Funktion gemeint.

- Die Winkel auf beiden Seiten müssen ebenfalls gleich sein bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Damit gilt

$$\operatorname{im}(w) = \angle z + 2k\pi.$$

Da $w \in D$ und somit $-\pi < \operatorname{im}(w) \leq \pi$, ist $\operatorname{im}(w)$ der auf das Intervall $]-\pi, \pi]$ normierte Winkel von z .

Somit ist

$$w = |z| + j\angle z, \quad -\pi < \angle z \leq \pi.$$

Definition 17.17 (Komplexer Logarithmus)

Die komplexe Logarithmusfunktion ist definiert durch

$$\ln \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \ln(z) = \ln(r) + j\varphi,$$

wobei r, φ die Polarkoordinaten von z sind mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Sei $\ln(z) = w$. Dann ist w wie oben gezeigt eine Lösung der Gleichung $e^w = z$. Die Gleichung hat aber noch weitere Lösungen

$$w + 2\pi jk, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Lösungen werden als Nebenwerte des Logarithmus bezeichnet.

18 Polynome und rationale Funktionen

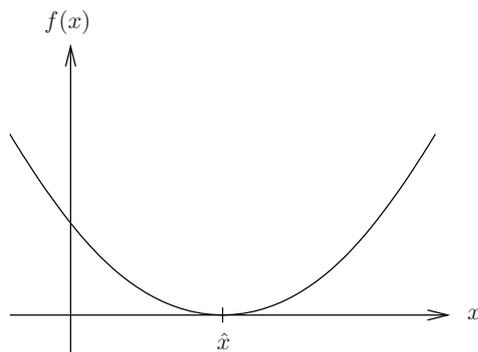
18.1 Komplexe Nullstellen von Polynomen

Beispiel 18.1 Das Polynom

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

hat genau eine Nullstelle bei $\hat{x} = 1$. Diese Nullstelle ist doppelt, da

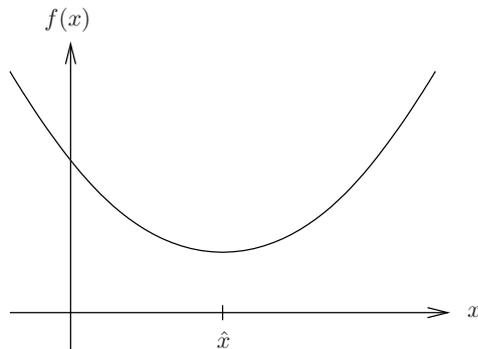
$$f(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = 0 \quad \text{und} \quad f''(\hat{x}) \neq 0.$$



Beispiel 18.2 Wird das o.g. Polynom um eins nach oben verschoben, d.h.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2,$$

hat es keine reelle Nullstelle mehr.



Da man mit komplexen Zahlen aber Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen kann, erhält man mit der Mitternachtsformel

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2j}{2} \\ &= 1 \pm j. \end{aligned}$$

Man hat somit zwei konjugiert komplexe Nullstellen. Tatsächlich hat ein Polynom vom Grad zwei immer genau zwei komplexe Nullstellen, sofern man eine doppelte Nullstelle als zwei Nullstellen zählt.

Definition 18.3 (Mehrfache Nullstelle)

Eine Zahl \hat{x} heißt k -fache Nullstelle einer Funktion f wenn

$$f(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = \dots = f^{(k-1)}(\hat{x}) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(\hat{x}) \neq 0.$$

Vermutlich ist Ihnen bekannt, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen hat. Im Komplexen ist der Zusammenhang zwischen Polynomgrad und Anzahl Nullstellen viel einfacher.

Theorem 18.4 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom vom Grad n (außer dem Nullpolynom) hat genau n komplexe Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit mehrfach gezählt werden.

Beispiel 18.5 Für das einfache Polynom vom Grad n

$$f(z) = z^n - 1$$

haben wir dies bereits verifiziert, da die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen hat.

Das Polynom in Beispiel 18.2 hatte zwei Nullstellen, die konjugiert komplex zueinander sind. Allgemein treten die komplexen Nullstellen von Polynomen mit *reellen* Koeffizienten immer in konjugiert komplexen Paaren auf. Dies folgt direkt aus der Eigenschaft solcher Polynome, dass ein konjugiert komplexes Argument zu einem konjugiert komplexen Funktionswert führt.

Theorem 18.6

Sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten, d.h. $a_i \in \mathbb{R}$ für alle i . Dann gilt

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Beweis. Da $a_i \in \mathbb{R}$ gilt $\overline{a_i} = a_i$. Aus

$$\overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2} = \overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2}$$

folgt

$$\bar{z}^n = \bar{z} \bar{z} \dots \bar{z} = \overline{z z \dots z} = \overline{z^n}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 f(\bar{z}) &= a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \dots a_n\bar{z}^n \\
 &= a_0 + a_1\bar{z} + a_2\overline{z^2} + \dots a_n\overline{z^n} \\
 &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_2} z^2 + \dots \overline{a_n} z^n \\
 &= \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots a_1z^n} \\
 &= \overline{a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \dots a_n\bar{z}^n} \\
 &= \overline{f(z)}.
 \end{aligned}$$

Theorem 18.7

Sei f ein Polynom mit reellen Koeffizienten und z eine Nullstelle von f .
Dann ist auch \bar{z} eine Nullstelle von f .

Beweis. Sei f ein Polynom mit reellen Koeffizienten und z eine Nullstelle von f . Dann ist

$$f(z) = 0.$$

Mit dem vorigen Theorem gilt dann

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0.$$

Folglich ist auch \bar{z} Nullstelle von f .

Die Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten treten somit immer in konjugiert komplexen Paaren auf. Da die Anzahl nicht-reeller Nullstellen somit immer gerade ist, muss ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle haben.

18.2 Horner Schema

Beispiel 18.8 Angenommen man möchte das Polynom

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$$

an einer Stelle \hat{x} mit möglichst wenigen Multiplikationen auswerten. Die naheliegende Vorgehensweise wäre

$$2 \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} + 5 \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} + 7 \cdot \hat{x} + 4,$$

was 6 Multiplikationen kostet. Etwas geschickter wäre es, \hat{x} auszuklammern, d.h.

$$(2 \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} + 5 \cdot \hat{x} + 7) \cdot \hat{x} + 4$$

zu rechnen. Auf diese Weise benötigt man nur noch 4 Multiplikationen. Klammert man \hat{x} nochmal aus, erhält man

$$((2 \cdot \hat{x} + 5) \cdot \hat{x} + 7) \cdot \hat{x} + 4.$$

In dieser Form sind nur noch 3 Multiplikationen erforderlich. Diese Form der Polynomauswertung heißt Horner Schema.

Mit den ‘‘Zwischenergebnissen’’, die bei der Polynomauswertung nach dem Horner Schema anfallen, kann man sehr einfach einen Linearfaktor abspalten. Die folgenden Überlegungen gelten für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Um die Darstellung zu vereinfachen werden sie exemplarisch mit $n = 4$ gezeigt.

Sei

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Auswerten bei \hat{x} nach dem Horner Schema ergibt

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{((\underbrace{a_4}_{b_3} \hat{x} + a_3) \hat{x} + a_2) \hat{x} + a_1)}_{b_2} \hat{x} + a_0}_{b_1}}_{b_0}.$$

Die Zwischenergebnisse sind

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= b_3 \hat{x} + a_3 \\ b_1 &= b_2 \hat{x} + a_2 \\ b_0 &= b_1 \hat{x} + a_1 \\ f(\hat{x}) &= b_0 \hat{x} + a_0. \end{aligned}$$

Mit diesen Zwischenergebnissen kann man das Polynom $f(x)$ umformen in

$$f(x) = (x - \hat{x})(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + f(\hat{x}).$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen. Zunächst löst man die o.g. Gleichungen nach a_i auf:

$$\begin{aligned} a_4 &= b_3 \\ a_3 &= b_2 - b_3\hat{x} \\ a_2 &= b_1 - b_2\hat{x} \\ a_1 &= b_0 - b_1\hat{x} \\ a_0 &= f(\hat{x}) - b_0\hat{x}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= b_3x^4 + \underbrace{(b_2 - b_3\hat{x})}_{a_3}x^3 + \underbrace{(b_1 - b_2\hat{x})}_{a_2}x^2 + \underbrace{(b_0 - b_1\hat{x})}_{a_1}x + \underbrace{f(\hat{x}) - b_0\hat{x}}_{a_0} \\ &= b_3x^4 + b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x \\ &\quad - b_3\hat{x}x^3 - b_2\hat{x}x^2 - b_1\hat{x}x - b_0\hat{x} + f(\hat{x}) \\ &= x(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &\quad - \hat{x}(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + f(\hat{x}) \\ &= (x - \hat{x})(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + f(\hat{x}). \end{aligned}$$

Ist nun \hat{x} eine Nullstelle von f , d.h. $f(\hat{x}) = 0$, gilt

$$f(x) = (x - \hat{x})(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0).$$

Man hat das Polynom vom Grad 4 somit zerlegt in ein Produkt aus einem Linearfaktor $(x - \hat{x})$ und ein Polynom vom Grad 3. Der führende Koeffizient b_3 des Restpolynoms ist gleich dem führenden Koeffizienten a_4 des Ausgangspolynoms.

Beispiel 18.9 Sei

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Eine Nullstelle von f ist $\hat{x} = 3$. Wertet man $f(\hat{x})$ mit dem Horner Schema aus, erhält man

$$\begin{aligned} b_3 &= 2 \\ b_2 &= b_3\hat{x} + a_3 = 1 \\ b_1 &= b_2\hat{x} + a_2 = -1 \\ b_0 &= b_1\hat{x} + a_1 = -2 \\ f(\hat{x}) &= b_0\hat{x} + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = (x - 3)(2x^3 + x^2 - x - 2).$$

Alternativ hätte man diese Zerlegung auch mit Taylor Polynomen bewerkstelligen können. Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad n und $p(x)$ das Taylor Polynom von $f(x)$ zum Entwicklungspunkt \hat{x} vom Grad n , dann ist $f(x) = p(x)$ für alle x . Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2!}f''(\hat{x})(x - \hat{x})^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})(x - \hat{x})^n \\ &= (x - \hat{x}) \left(f'(\hat{x}) + \frac{1}{2!}f''(\hat{x})(x - \hat{x}) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})(x - \hat{x})^{n-1} \right) + f(\hat{x}). \end{aligned}$$

Ist nun \hat{x} eine Nullstelle von $f(x)$, gilt

$$f(x) = (x - \hat{x}) \left(f'(\hat{x}) + \frac{1}{2!}f''(\hat{x})(x - \hat{x}) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})(x - \hat{x})^{n-1} \right).$$

Wenn \hat{x} eine k -fache Nullstelle ist, fallen die ersten k Summanden des Taylor Polynoms weg und man kann sogar den Faktor $(x - \hat{x})^k$ abspalten.

18.3 Faktorisierung

Sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom n -ten Grades mit Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_n . Spaltet man mit dem Hornerchema den Linearfaktor $(x - z_1)$ ab, erhält man

$$f(x) = (x - z_1) \underbrace{(a_n x^{n-1} + \dots)}_{\text{Restpolynom}}$$

wobei das Restpolynom Grad $n - 1$ und führenden Koeffizienten a_n hat. Da z_2 Nullstelle von $f(x)$ ist, muss z_2 auch Nullstelle des Restpolynoms sein. Folglich kann man den Linearfaktor $(x - z_2)$ vom Restpolynom abspalten und erhält

$$f(x) = (x - z_1)(x - z_2) \underbrace{(a_n x^{n-2} + \dots)}_{\text{Restpolynom}}$$

wobei das Restpolynom jetzt Grad $n - 2$ und führenden Koeffizienten a_n hat. Spaltet man auf diese Weise alle Linearfaktoren ab, hat das Restpolynom Grad 0 und führenden Koeffizienten a_n . Folglich muss es die Konstante a_n sein. Damit erhält man

$$f(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n).$$

Dieser Term heißt Faktorisierung von $f(x)$.

Ein Spezialfall tritt auf wenn das Polynom mehrfache Nullstellen hat. Ist z_i eine k -fache Nullstelle, dann hat man in der Faktorisierung k Linearfaktoren $(x - z_i)$ bzw. den Faktor $(x - z_i)^k$.

Theorem 18.10 (Faktorisierung)

Sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

ein Polynom vom Grad n mit Nullstellen z_i mit Vielfachheit k_i . Dann lässt sich $f(x)$ faktorisieren in

$$f(x) = a_n \prod_i (x - z_i)^{k_i}.$$

18.4 Polynomdivision

Definition 18.11 (Rationale Funktion)

Eine Funktion f heißt rationale Funktion, wenn es Polynome p und q gibt so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Eine rationale Funktion $f(x)$ ist also ein Bruch zweier Polynome $p(x)$ und $q(x)$. An den Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x)$ ist $f(x)$ undefiniert.

Falls der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad ist, kann man einen ganzrationalen Teil abspalten. Dies ist vergleichbar mit rationalen Zahlen, bei denen man einen ganzzahligen Summanden abspalten kann, wenn der Zähler größer oder gleich dem Nenner ist, z.B.

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Theorem 18.12

Seien p, q Polynome wobei der Grad von p größer gleich dem Grad von q ist. Dann gibt es Polynome g, r so dass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

wobei der Grad von r kleiner ist als der Grad von q .

Man kann somit von einer rationalen Funktion ein Polynom als Summand abspalten. Die verbleibende rationale Funktion $r(x)/q(x)$ ist in dem Sinne einfacher, dass der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners.

Das Verfahren zur Berechnung von g und r ist ähnlich wie das bekannte Verfahren zur Division von rationalen Zahlen.

Beispiel 18.13 Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 - x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 4x^3 - x^2 - x + 2 : x^2 + x + 1 = 2x^2 - 6x + 3 \text{ Rest } 2x - 1 \\ \underline{2x^4 + 2x^3 + 2x^2} \\ -6x^3 - 3x^2 - x + 2 \\ \underline{-6x^3 - 6x^2 - 6x} \\ 3x^2 + 5x + 2 \\ \underline{3x^2 + 3x + 3} \\ 2x - 1 \end{array}$$

Folglich gilt

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3 + \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Das Verfahren beruht auf einer einfachen Gleichung. Sei

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

mit $n \geq m$. Dann ist

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x) + p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x)$$

und daher

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m} + \frac{p(x) - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m} q(x)}{q(x)}.$$

Man kann somit den Summanden $\left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m}$ abspalten. Der neue Zähler

$$p(x) - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m} q(x)$$

hat dann nur noch Grad $n - 1$, da der Koeffizient vor x^n

$$a_n - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) b_m = 0$$

ist. Dieses Abspalten eines Summanden wird so lang fortgeführt bis der Zählergrad im Rest kleiner als der Nennergrad ist.

18.5 Partialbruchzerlegung

Um rationale Funktionen integrieren zu können, müssen diese noch weiter umgeformt werden. Dank der Polynomdivision können wir uns nun auf den Spezialfall

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

konzentrieren, wobei das Zählerpolynom $p(x)$ einen kleineren Grad hat als das Nennerpolynom $q(x)$. Weiterhin kann man immer erreichen, dass der führende Koeffizient von $q(x)$ gleich eins ist, indem man Zähler- und Nennerpolynom durch den führenden Koeffizienten des Nennerpolynoms dividiert.

Mit der Methode der Partialbruchzerlegung kann man eine rationale Funktion als Summe von sehr einfachen Brüchen darstellen. Für jede Nullstelle z von $q(x)$ erhält man folgende Summanden:

- Hat z die Vielfachheit 1, dann führt dies zum Summanden

$$\frac{c}{x - z}$$

wobei c eine Konstante ist.

- Hat z die Vielfachheit k , dann führt dies zu den Summanden

$$\frac{c_1}{x - z} + \frac{c_2}{(x - z)^2} + \dots + \frac{c_k}{(x - z)^k}$$

wobei c_1, \dots, c_k Konstanten sind.

Nachdem alle Summanden aufgestellt sind, können die Konstanten im Zähler durch Koeffizientenvergleich berechnet werden. Am einfachsten wird dies anhand einiger Beispiele klar.

Beispiel 18.14 Sei

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x}$$

Zunächst wird das Nennerpolynom faktorisiert:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x(x + 2)}$$

Damit gilt

$$\frac{2x + 3}{x(x + 2)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x + 2}$$

Um die Konstanten c_1 und c_2 zu berechnen, multipliziert man beide Seiten mit dem Nennerpolynom.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= c_1(x + 2) + c_2x \\ &= x(c_1 + c_2) + 2c_1. \end{aligned}$$

Da beide Polynome gleich sind, müssen ihre Koeffizienten gleich sein. Folglich gilt

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 2 \\ 2c_1 &= 3.\end{aligned}$$

Die Lösung ist $c_1 = 3/2$ und $c_2 = 1/2$. Damit ist

$$\frac{x+3}{x^2+2x} = \frac{3/2}{x} + \frac{1/2}{x+2}.$$

Beispiel 18.15 Sei

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2+4}$$

Zunächst wird das Nennerpolynom $q(x)$ faktorisiert:

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+2j)(x-2j)}$$

Damit gilt

$$\frac{x-4}{x^2+4} = \frac{c_1}{x+2j} + \frac{c_2}{x-2j}.$$

Um die Konstanten c_1, c_2 zu berechnen, multipliziert man beide Seiten mit $q(x)$ und erhält

$$\begin{aligned}x-4 &= c_1(x-2j) + c_2(x+2j) \\ &= x(c_1+c_2) + 2j(c_2-c_1).\end{aligned}$$

Da beide Polynome gleich sind, müssen sie die gleichen Koeffizienten haben. Koeffizientenvergleich ergibt also

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 1 \\ 2j(c_2 - c_1) &= -4.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $c_1 = 1 - c_2$. Einsetzen in die zweite ergibt $c_2 = 1/2 + j$ und damit $c_1 = 1/2 - j$. Damit gilt

$$\frac{x-4}{x^2+4} = \frac{1/2-j}{x+2j} + \frac{1/2+j}{x-2j}.$$

Beispiel 18.16 Sei

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^3}$$

Da $z = -2$ eine dreifache Nullstelle ist, gilt der Ansatz

$$\frac{3x+1}{(x+2)^3} = \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{(x+2)^2} + \frac{c_3}{(x+2)^3}$$

Um die Konstanten c_1, c_2, c_3 zu berechnen, multipliziert man beide Seiten mit $q(x)$ und erhält

$$\begin{aligned} 3x+1 &= c_1(x+2)^2 + c_2(x+2) + c_3 \\ &= c_1x^2 + (2c_1+c_2)x + 4c_1 + 2c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 &= 3 \\ 4c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ und $c_3 = -5$. Folglich ist

$$\frac{3x+1}{(x+2)^3} = \frac{3}{(x+2)^2} - \frac{5}{(x+2)^3}.$$

Schnelleres Verfahren für Partialbruchzerlegung

Die Berechnung der Konstanten in der Partialbruchzerlegung führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung aufwändig sein kann. Es gibt einen Trick, wie man dies umgehen kann:

Beispiel 18.17 Sei

$$f(x) = \frac{5x^2 - x - 9}{(x+4)(x-1)^2}$$

Da das Nennerpolynom bereits faktorisiert ist, erhält man den Ansatz

$$\frac{5x^2 - x - 9}{(x+4)(x-1)^2} = \frac{c_1}{x+4} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2}$$

und nach Multiplikation mit dem Nenner auf beiden Seiten die Gleichung

$$5x^2 - x - 9 = c_1(x-1)^2 + c_2(x-1)(x+4) + c_3(x+4).$$

Da es sich hier um eine Gleichung von Polynomen handelt, muss die Gleichheit für alle x gelten. Somit kann man geschickte Werte für x wählen, mit denen man c_1, c_2, c_3 einfach berechnen kann. Idealerweise wählt man x so, dass in der Gleichung alle Konstanten wegfallen bis auf eine.

- Für den Spezialfall $x = -4$ erhält man die Gleichung

$$75 = 25c_1$$

und damit sofort $c_1 = 3$.

- Für den Spezialfall $x = 1$ erhält man die Gleichung

$$-5 = 5c_3$$

und damit sofort $c_3 = -1$.

- Um auch noch c_2 zu bekommen, kann man c_1 und c_3 einsetzen und z.B. $x = 0$ wählen. Man erhält dann die Gleichung

$$-9 = 3 - 4c_2 - 4$$

$$-8 = -4c_2$$

und somit $c_2 = 2$.

Damit ist

$$\frac{5x^2 - x - 9}{(x+4)(x-1)^2} = \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}.$$

Integration von rationalen Funktionen

Nachdem man eine rationale Funktion $f(x)$ durch Polynomdivision und Partialbruchzerlegung in eine Summe von einfachen Funktionen zerlegt hat, kann diese leicht mit Hilfe der Summenregel integriert werden.

Beispiel 18.18 Mit der Partialbruchzerlegung aus Beispiel 18.14 erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+2x} dx &= \int \left(\frac{3/2}{x} + \frac{1/2}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

Beispiel 18.19 Mit der Partialbruchzerlegung aus Beispiel 18.16 erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - x - 9}{(x+4)(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= 3 \ln|x+4| + 2 \ln|x-1| + \frac{5}{x-1} + C.\end{aligned}$$

Beispiel 18.20 Mit der Partialbruchzerlegung aus Beispiel 18.17 erhält man

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{(x+2)^3} dx &= \int \left(\frac{3}{(x+2)^2} - \frac{5}{(x+2)^3} \right) dx \\ &= -\frac{3}{x+2} + \frac{5/2}{(x+2)^2} + C\end{aligned}$$

Beispiel 18.21 Beispiel 18.15 ist etwas komplizierter, da die Summanden in der Partialbruchzerlegung komplex sind und bei der Integration somit der komplexe Logarithmus auftaucht.

Da die beiden Summanden in der Partialbruchzerlegung konjugiert komplex sind, gilt

$$\frac{1/2 - j}{x + 2j} + \frac{1/2 + j}{x - 2j} = 2\operatorname{re}\left(\frac{1/2 - j}{x + 2j}\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 4}{x^2 + 4} dx &= \int \left(\frac{1/2 - j}{x + 2j} + \frac{1/2 + j}{x - 2j} \right) dx \\ &= \int 2\operatorname{re}\left(\frac{1/2 - j}{x + 2j}\right) dx \\ &= 2\operatorname{re}\left(\int \frac{1/2 - j}{x + 2j} dx\right) \\ &= 2\operatorname{re}((1/2 - j) \ln(x + 2j)) + C. \end{aligned}$$

Mit $x + 2j = re^{j\varphi}$ ist

$$\begin{aligned} 2\operatorname{re}\left((1/2 - j) \ln(re^{j\varphi})\right) + C &= 2\operatorname{re}((1/2 - j)(\ln(r) + j\varphi)) + C \\ &= 2(1/2 \ln(r) + \varphi + C) \\ &= \ln(r) + 2\varphi + C. \end{aligned}$$

Um einen einfachen Term für φ zu bekommen, formt man zunächst um:

$$x + 2j = j(2 - jx)$$

Der Winkel von j ist $\pi/2$. Da die Zahl $2 - jx$ einen positiven Realteil hat, liegt ihr Winkel zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ und kann mit \arctan berechnet werden. Folglich ist

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi/2 + \arctan(-x/2) \\ &= \pi/2 - \arctan(x/2) \\ r &= |x + 2j| = \sqrt{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \ln(r) + 2\varphi + C &= \ln(\sqrt{x^2 + 4}) + \pi - 2\arctan(x/2) + C \\ &= 1/2 \ln(x^2 + 4) - 2\arctan(x/2) + C \end{aligned}$$

wobei der konstante Summand π der Integrationskonstante C zugeschlagen wurde.

19 Vektoren

Ein n -stelliger reeller Vektor ist ein n -Tupel von reellen Zahlen. Die Menge aller n -stelliger Vektoren ist somit \mathbb{R}^n . Die Elemente von \mathbb{R} werden auch als Skalare bezeichnet.

Später wird der Vektorbegriff noch verallgemeinert und ist dann etwas abstrakter.

Notation. Variablen für Vektoren werden von Variablen für Skalare mit einem Pfeil gekennzeichnet. Da wir mit Vektoren rechnen werden und dann der Platz in der Breite knapp wird, schreiben wir die Komponenten eines Vektors nicht so wie bei Tupeln üblich nebeneinander sondern übereinander. Somit ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

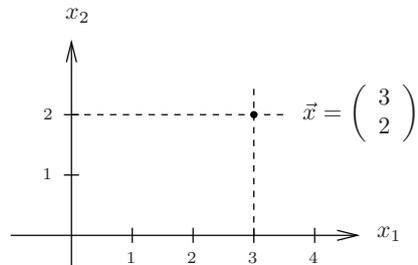
ein n -stelliger Vektor, wobei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ seine Komponenten sind.

19.1 Darstellung von Vektoren

Eine Veranschaulichung durch Bilder ist für das Verständnis immer hilfreich. Bei Vektoren sind zwei Darstellungsarten besonders nützlich: Entweder als Punkt oder als Pfeil in einem Koordinatensystem.

Wenn wir Dinge veranschaulichen, verlassen wir die formale Mathematik und stützen uns auf die Intuition. Hier ist es natürlich erlaubt, Begriffe zu verwenden, die nicht exakt definiert sind, von denen man dafür aber eine gute Vorstellung hat. So wurden die Begriffe “Punkt” und “Pfeil” genauso wenig wie “Koordinatensystem” definiert. Trotzdem ist anschaulich klar, was damit gemeint ist.

Darstellung eines Vektors als Punkt. Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, kann man \vec{x} durch einen Punkt mit Koordinaten x_1 und x_2 in einem zweidimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen.



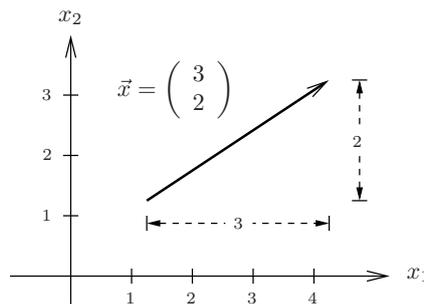
Diese Darstellung verwendet man z.B. um Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} zu zeichnen. Man zeichnet dazu alle Punkte des Graphs der Funktion

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x) \right\}$$

in eine Koordinatensystem ein.

In vielen Anwendungen werden Vektoren benutzt um Punkte bzw. Orte in einem Koordinatensystem zu beschreiben. Bei CAD Systemen wird die Position eines Objekts im 3-dimensionalen Raum durch einen 3-stelligen Vektor angegeben. Bei der Verwendung von Vektoren zur Beschreibung von Orten spricht man daher von "Ortsvektoren".

Darstellung eines Vektors als Pfeil. Alternativ kann man einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ durch einen Pfeil in einem zweidimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen. Der Pfeil geht dabei x_1 Einheiten in Richtung der ersten Achse und x_2 Einheiten in Richtung der zweiten Achse. Mit den Komponenten x_1, x_2 des Vektors \vec{x} ist somit Richtung und Länge des Pfeils bestimmt, nicht aber seine Position. Verschiebt man den Pfeil, ist es immer noch der gleiche Pfeil, da sich bei der Verschiebung seine Richtung und Länge nicht ändert. An welcher Stelle man den Pfeil daher in das Koordinatensystem zeichnet, ist egal.



Viele physikalische Größen wie Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke usw. haben einen Betrag und eine Richtung und lassen sich daher gut durch Pfeile darstellen und mathematisch durch Vektoren beschreiben.

Wichtig ist, dass Vektoren weder Punkte noch Pfeile *sind*, sondern n -Tupel von reellen Zahlen. Sie lassen sich durch Punkte und Pfeile aber gut veranschaulichen. Man sollte daher die folgenden Ebenen gut auseinanderhalten:

Mathematik. Hier verwendet man nur exakt definierte Begriffe wie z.B. n -Tupel. Funktionen von Vektoren werden hier formal definiert und Rechengesetze bewiesen.

Veranschaulichung. Die Veranschaulichung hat den einzigen Zweck, dem Verständnis zu helfen. Man arbeitet hier mit Punkten und Pfeilen – Begriffe die nicht formal definiert, aber intuitiv gut vorstellbar sind. Auch Begriffe aus der Geometrie wie “Winkel” und “senkrecht” gehören auf diese Ebene. Viele abstrakte Theoreme lassen sich leichter verstehen, wenn man sie in einem Bild darstellen kann.

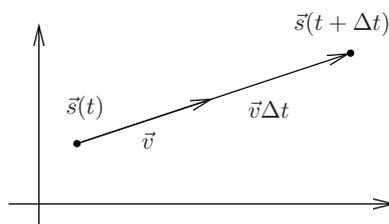
Anwendung. Vektoren sind in vielen Anwendungen nützlich, z.B. aus der Physik. Hier werden Vektoren verwendet um physikalische Größen, die einen Betrag und eine Richtung haben, durch Vektoren zu beschreiben. Interessanterweise decken sich physikalische Beobachtungen wie z.B. die Additivität von Kräften genau mit den Gesetzen der Vektorrechnung.

In vielen Diagrammen wird die Punkt- und Pfeildarstellung von Vektoren gleichzeitig verwendet. Hierzu ein Beispiel aus der Physik.

Beispiel 19.1 Sei $\vec{s}(t)$ die Position eines Objekts zum Zeitpunkt t . Das Objekt bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} . Dann gilt

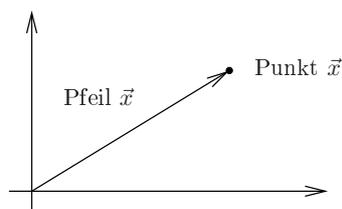
$$\vec{s}(t + \Delta t) = \vec{s}(t) + \vec{v}\Delta t.$$

Diesen Sachverhalt kann man in einem Diagramm veranschaulichen, indem man $\vec{s}(t)$ und $\vec{s}(t + \Delta t)$ als Punkte und \vec{v} und $\vec{v}\Delta t$ als Pfeile darstellt. Wo man die Pfeile hinmalt, ist egal — es bietet sich aber an, sie mit Startpunkt $\vec{s}(t)$ einzuzichnen.



Die Punkt- und Pfeildarstellung eines Vektors ist leicht austauschbar.

- Hat man einen Vektor als Punkt in einem Koordinatensystem eingezeichnet, erhält man die Pfeildarstellung des selben Vektors, wenn man einen Pfeil vom Koordinatenursprung zu dem Punkt zeichnet.
- Hat man einen Vektor als Pfeil in einem Koordinatensystem eingezeichnet und verschiebt den Startpunkt des Pfeils in den Koordinatenursprung, erhält man die Punktdarstellung des selben Vektors als Endpunkt des Pfeils.



Beispiel 19.2 Komplexe Zahlen können durch zweistellige Vektoren beschrieben werden. Der Realteil ist die erste Komponente, der Imaginärteil die zweite, d.h.

$$a + jb \simeq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Addition von komplexen Zahlen entspricht dann der Vektor Addition:

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Darstellung von komplexen Zahlen in der Ebene entspricht der Punktdarstellung von Vektoren.

Beispiel 19.3 Polynome vom Grad $\leq n$ können durch $n + 1$ -stellige Vektoren beschrieben werden.

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \simeq \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Die Addition von Polynomen entspricht dann der Vektor Addition:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Hier sieht man bereits, dass es durchaus vorteilhaft ist, die Komponenten eines Vektors übereinander und nicht nebeneinander zu schreiben.

19.2 Rechenoperationen auf Vektoren

Im Folgenden betrachten wir n -stellige Vektoren für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist auch $n = 1$ möglich. Einstellige Vektoren sind identisch zu Skalaren.

Definition 19.4 (Vektor Addition)

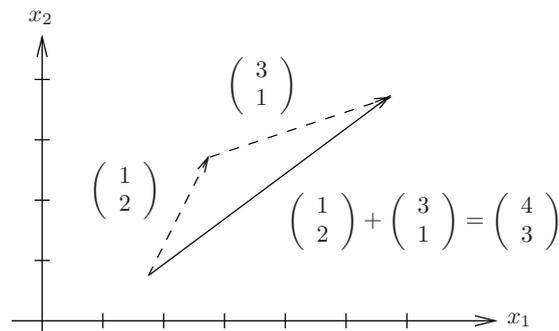
Die Vektor Addition $+$ $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

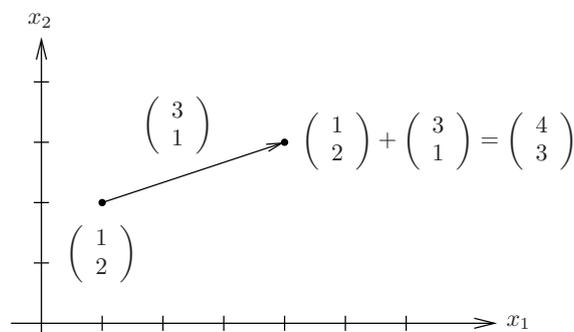
So ist z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

In der Pfeildarstellung entspricht die Vektor Addition dem Hintereinandersetzen von Pfeilen.



Man kann die Vektor Addition auch dadurch veranschaulichen, dass man einen Summand als Punkt und den anderen als Pfeil darstellt, der in diesem Punkt startet. Der Endpunkt des Pfeils ist dann die Punktdarstellung der Summe. Die Vektor Addition entspricht dann der Verschiebung eines Punktes entlang eines Pfeils.



Für die Vektor Addition gelten die gleichen Gesetze wie für die Addition von Skalaren.

Theorem 19.5 (Rechengesetze der Vektor Addition)

$$\begin{array}{ll} \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} & \text{Kommutativgesetz} \\ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} & \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} & \text{Neutrales Element} \end{array}$$

Hierbei ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Nullvektor.

Als Beispiel wird das Kommutativgesetz bewiesen. Es ist zwar recht offensichtlich, wichtig ist aber die Technik zu lernen, um solche Gesetze zu beweisen. Die Idee ist immer, Vektor Operationen auf skalare Operationen zu reduzieren, die bereits bekannten Gesetze für Skalare anzuwenden und dann wieder Vektor Operationen anzuwenden. Die selbe Technik wird später benutzt, um die etwas schwierigeren Rechengesetze für Matrizen zu zeigen. Hier werden Matrix Operationen auf Vektor Operationen reduziert und die bekannten Gesetze für Vektoren angewandt.

Beweis.

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} && \text{Def. Vektor} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} && \text{Def. Vektor Addition} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} && \text{Kommutativgesetz für Skalare} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && \text{Def. Vektor Addition} \\ &= \vec{y} + \vec{x}. \end{aligned}$$

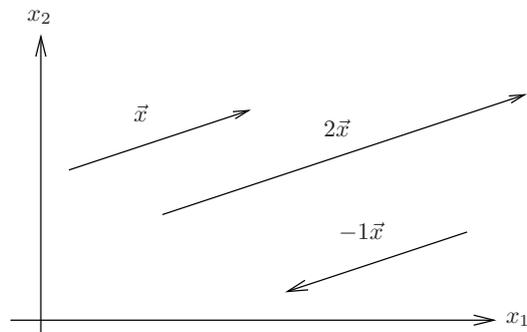
Definition 19.6 (Skalare Multiplikation)

Die skalare Multiplikation $\cdot \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

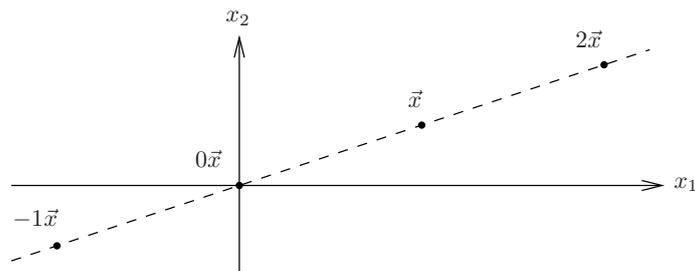
$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

Das Funktionssymbol wird wie bei Multiplikationen üblich weggelassen. Beachten Sie aber, dass die neue skalare Multiplikation auf der linken Seite (Skalar mal Vektor) eine andere Funktion ist als die bekannten Multiplikationen auf der rechten (Skalar mal Skalar).

In der Pfeildarstellung entspricht die skalare Multiplikation $a\vec{x}$ einer Streckung des Pfeils \vec{x} um Faktor a . Ist a negativ, kehrt sich die Richtung des Pfeils um.



In der Punktdarstellung liegen alle skalaren Vielfachen von \vec{x} auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden.



Theorem 19.7 (Rechengesetze der skalaren Multiplikation)

$$\begin{array}{ll}
 a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y} & \text{Distributivgesetz} \\
 (a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x} & \text{Distributivgesetz} \\
 (ab)\vec{x} = a(b\vec{x}) & \text{Assoziativgesetz} \\
 1\vec{x} = \vec{x} & \text{Neutrales Element}
 \end{array}$$

Beachten Sie, dass die Operationen auf beiden Seiten unterschiedlich sind.

- In dem Term $(ab)\vec{x}$ tritt eine Multiplikation von Skalaren und eine skalare Multiplikation auf. In $a(b\vec{x})$ jedoch zwei skalare Multiplikationen.
- In dem Term $(a + b)\vec{x}$ bedeutet $+$ die Addition von Skalaren, in $a\vec{x} + b\vec{x}$ jedoch die Addition von Vektoren. Aus diesem Grund gibt es auch zwei Distributivgesetze.

Beweis. Exemplarisch wird das dritte Gesetz bewiesen.

$$\begin{aligned}
 (ab)\vec{x} &= (ab) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && \text{Def. Vektor} \\
 &= \begin{pmatrix} (ab)x_1 \\ \vdots \\ (ab)x_n \end{pmatrix} && \text{Def. skalare Multiplikation} \\
 &= \begin{pmatrix} a(bx_1) \\ \vdots \\ a(bx_n) \end{pmatrix} && \text{Assoziativgesetz für Skalare} \\
 &= a \begin{pmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_n \end{pmatrix} && \text{Def. skalare Multiplikation} \\
 &= a \left(b \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) && \text{Def. skalare Multiplikation} \\
 &= a(b\vec{x}).
 \end{aligned}$$

Definition 19.8 (Kollineare Vektoren)

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen kollinear, wenn einer skalares Vielfaches des anderen ist.

Insbesondere ist damit der Nullvektor kollinear zu jedem anderen Vektor.

- In der Pfeildarstellung sind zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ kollinear genau dann wenn sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben
- In der Punktdarstellung sind zwei Vektoren kollinear genau dann wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden durch den Koordinatenursprung liegen.

Definition 19.9 (Vektor Negation)

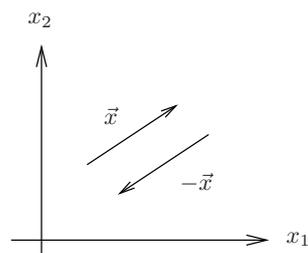
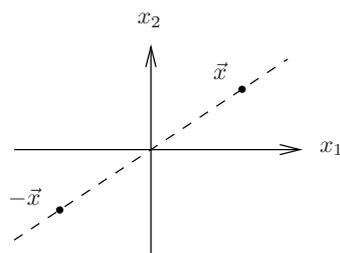
Die Vektor Negation $- \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x}.$$

Auch bei Skalaren $a \in \mathbb{R}$ ist das einstellige Minus nur eine Abkürzung für die Multiplikation mit -1 . Damit gilt

$$-\vec{x} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)x_1 \\ \vdots \\ (-1)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

- In der Punktdarstellung entspricht die Vektor Negation der Punktspiegelung am Koordinatenursprung.
- In der Pfeildarstellung entspricht die Vektor Negation der Richtungsumkehr eines Pfeils.



Die Subtraktion ist wie bei Skalaren durch eine Negation und eine Addition definiert.

$$a - b = a + (-b).$$

Definition 19.10 (Vektor Subtraktion)

Die Vektor Subtraktion $- \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

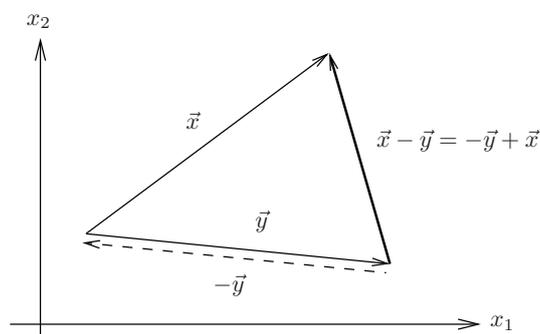
$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}).$$

Man kann eine Subtraktion daher immer durch eine Addition und eine skalare Multiplikation ersetzen und die dafür geltenden Gesetze anwenden.

Ähnlich wie die Addition kann man auch die Subtraktion durch ein Pfeildia-gramm veranschaulichen. Hierzu stellt man \vec{x} und \vec{y} als Pfeile mit gemeinsamem Startpunkt dar. Dann ist $\vec{x} - \vec{y}$ der Pfeil vom Endpunkt von \vec{y} zum Endpunkt von \vec{x} . Man sieht das einfach, indem man den Hilfspfeil $-\vec{y}$ einzeichnet, indem man \vec{y} einfach umkehrt. Dann hängen $-\vec{y}$ und \vec{x} hintereinander und da

$$-\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} + (-\vec{y}) = \vec{x} - \vec{y}$$

folgt die Aussage mit Hilfe der Pfeilkonstruktion für die Addition.



Eine Vektor Division \vec{x}/\vec{y} ist nicht definiert. Erstaunlicherweise gibt es keine Anwendung, wo diese gebraucht wird. Was aber durchaus definiert ist, ist die Division eines Vektors durch ein Skalar. Wie immer ist die Division durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert definiert, d.h.

$$\frac{\vec{x}}{a} = \frac{1}{a} \vec{x}.$$

Da a ein Skalar ist, ist der Kehrwert $1/a$ definiert und die Multiplikation des Skalars $1/a$ mit dem Vektor \vec{x} ist eine skalare Multiplikation.

Sie kennen sicher das physikalische Gesetz “Arbeit gleich Kraft mal Weg”

$$W = Fs.$$

Im mehrdimensionalen Fall sind die Kraft \vec{F} und der Weg \vec{s} Vektoren, da es Größen mit einem Betrag und einer Richtung sind. Dabei kann die Kraft, die auf einen Körper wirkt, durchaus in eine andere Richtung zeigen als die Richtung der Strecke, in der er sich bewegt. Die Arbeit hingegen ist ein Skalar. Es handelt sich somit um eine neue Multiplikation, bei der zwei Vektoren multipliziert werden und das Ergebnis ein Skalar ist.

Wenn man z.B. einen Koffer mit konstanter, horizontaler Geschwindigkeit trägt, zeigt \vec{F} nach unten und \vec{s} nach vorn. Die Vektoren stehen dann senkrecht zueinander und die verrichtete Arbeit ist Null — schließlich hätte man ja auch einen reibungsfrei gelagerten Gepäckwagen verwenden können.

Diese neue Multiplikation heißt Skalarprodukt und darf nicht mit der skalaren Multiplikation verwechselt werden. Um dies deutlich zu machen, verwendet man als Funktionssymbol \circ und lässt es auch nicht wie sonst bei Multiplikationen üblich weg.

Definition 19.11 (Skalarprodukt)

Das Skalarprodukt $\circ \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Beispiel 19.12

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Theorem 19.13 (Rechengesetze für das Skalarprodukt)

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{y} &= \vec{y} \circ \vec{x} && \text{Kommutativgesetz} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{z} &= (\vec{x} \circ \vec{z}) + (\vec{y} \circ \vec{z}) \\ a(\vec{x} \circ \vec{y}) &= (a\vec{x}) \circ \vec{y} && \text{Homogenität} \\ \vec{x} \circ \vec{x} &\geq 0 \\ \vec{x} \circ \vec{x} &= 0 \text{ gdw. } \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gesetze zusammen heißen positive Definitheit des Skalarprodukts.

Beweis. Exemplarisch wird die Homogenität bewiesen. In diesem Gesetz treten alle drei Arten der Multiplikation auf: Multiplikation von Skalaren, skalare Multiplikation und Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} a(\vec{x} \circ \vec{y}) &= a\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \circ \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= a(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) && \text{Def. Skalarprodukt} \\ &= a(x_1y_1) + a(x_2y_2) + \dots + a(x_ny_n) && \text{Distributivgesetz für Skalare} \\ &= (ax_1)y_1 + (ax_2)y_2 + \dots + (ax_n)y_n && \text{Assoziativgesetz für Skalare} \\ &= \left(\begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}\right) \circ \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) && \text{Def. Skalarprodukt} \\ &= \left(a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)\right) \circ \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) && \text{Def. skalare Multiplikation} \\ &= (a\vec{x}) \circ \vec{y}. \end{aligned}$$

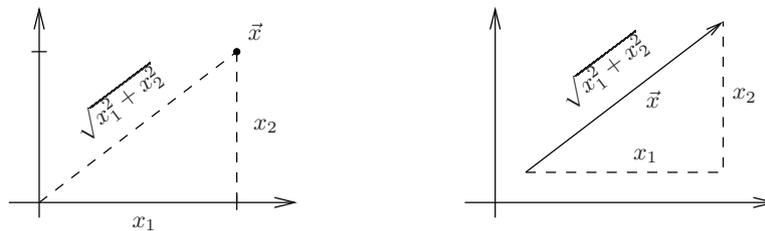
Definition 19.14 (Euklidische Norm bzw. Betrag)

Die Euklidische Norm $\|\cdot\| \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

- In der Punktdarstellung ist $\|\vec{x}\|$ der Abstand des Punktes \vec{x} vom Koordinatenursprung.
- In der Pfeildarstellung ist $\|\vec{x}\|$ die Länge des Pfeils \vec{x} .

Beides folgt direkt aus dem Satz des Pythagoras.



Die Euklidische Norm lässt sich mit dem Skalarprodukt berechnen:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}}.$$

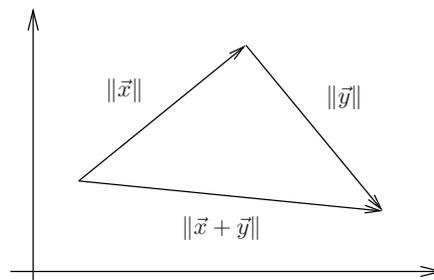
Damit gilt

$$\vec{x} \circ \vec{x} = \|\vec{x}\|^2.$$

Theorem 19.15 (Dreiecksungleichung)

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Statt eines Beweises veranschaulichen wir dieses Theorem durch ein Pfeildia-gramm. Da die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Gerade ist, ist die Aussage leicht zu sehen.



Theorem 19.16

$$\|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|.$$

Man macht leicht den Fehler, dass man einen skalaren Faktor a aus einer Euklidischen Norm herauszieht. Das darf man aber nur machen, wenn $a \geq 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\|a\vec{x}\| &= \left\| a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(ax_1)^2 + (ax_2)^2 + \dots + (ax_n)^2} \\ &= \sqrt{a^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |a|\|\vec{x}\|.\end{aligned}$$

19.3 Winkel zwischen Vektoren

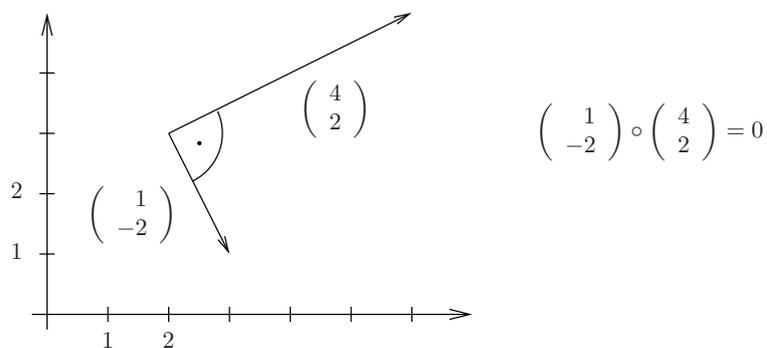
Definition 19.17 (Orthogonale Vektoren)

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal*, wenn

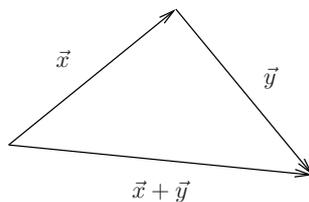
$$\vec{x} \circ \vec{y} = 0.$$

Damit ist orthogonal genau wie kollinear eine Relation auf \mathbb{R}^n . Beachten Sie, dass nach dieser Definition der Nullvektor orthogonal zu jedem anderen Vektor ist.

In der Pfeildarstellung sind zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ orthogonal genau dann wenn ihre Pfeile senkrecht zueinander stehen.

Beispiel 19.18


Dies lässt sich wie folgt zeigen: Nach dem Satz des Pythagoras ist ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c mit $a, b \leq c$ genau dann rechtwinklig wenn $a^2 + b^2 = c^2$. Setzt man die Vektoren \vec{x}, \vec{y} und $\vec{x} + \vec{y}$ zu einem Dreieck zusammen, gilt mit der Dreiecksungleichung $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|$.



Nach Pythagoras stehen die Pfeile \vec{x}, \vec{y} senkrecht zueinander genau dann wenn

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2.$$

Diese Gleichung wird wie folgt äquivalent umgeformt.

$$\begin{aligned}x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 &= (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \\x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 &= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2 \\0 &= 2x_1y_1 + \dots + 2x_ny_n \\0 &= x_1y_1 + \dots + x_ny_n \\ \vec{x} \circ \vec{y} &= 0.\end{aligned}$$

Folglich stehen die Pfeile \vec{x}, \vec{y} senkrecht zueinander genau dann wenn $\vec{x} \circ \vec{y} = 0$.

Oft interessiert bei einem Vektor nur seine Richtung, nicht aber seine Länge. In diesem Fall ist es sinnvoll, den Vektor durch eine Streckung mit positivem Streckfaktor auf Länge eins zu normieren.

Definition 19.19 (Normierter Richtungsvektor)

Der normierte Richtungsvektor eines Vektors $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist definiert durch

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}.$$

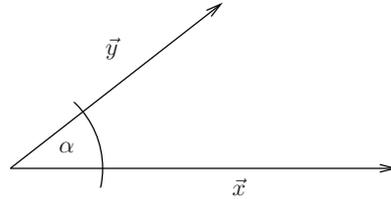
Da der Streckfaktor $1/\|\vec{x}\|$ positiv ist, haben \vec{e}_x und \vec{x} die selbe Richtung. Außerdem hat \vec{e}_x Länge eins:

$$\begin{aligned}\|\vec{e}_x\| &= \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \right\| \\ &= \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right| \|\vec{x}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x}\| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Beispiel 19.20

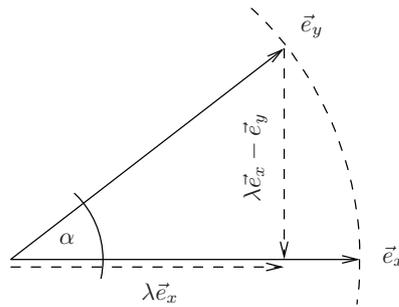
$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, & \vec{e}_x &= \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nachfolgend soll der innere Winkel α zwischen zwei Vektoren (genauer gesagt ihrer Pfeildarstellung) $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ berechnet werden.



Da die Länge der Vektoren \vec{x}, \vec{y} für den Winkel α keine Rolle spielt, werden diese zunächst normiert, d.h.

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}, \quad \vec{e}_y = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \vec{y}.$$



Zunächst wird das Lot von \vec{e}_y auf \vec{e}_x gefällt. Der Pfeil vom Startpunkt von \vec{x} zum Auftreffpunkt hat gleiche oder entgegengesetzte Richtung wie \vec{e}_x je nachdem ob $\alpha < \pi/2$ oder $\alpha > \pi/2$. Folglich ist dieser Pfeil gleich $\lambda \vec{e}_x$ für ein λ . Der Lotvektor selbst ist $\lambda \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Da der Lotvektor senkrecht zu \vec{e}_x steht, gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \circ (\lambda \vec{e}_x - \vec{e}_y) &= 0 \\ \vec{e}_x \circ \lambda \vec{e}_x - \vec{e}_x \circ \vec{e}_y &= 0 \\ \lambda (\vec{e}_x \circ \vec{e}_x) &= \vec{e}_x \circ \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Da $\|\vec{e}_x\| = 1$ gilt

$$\vec{e}_x \circ \vec{e}_x = \|\vec{e}_x\|^2 = 1$$

und damit

$$\lambda = \vec{e}_x \circ \vec{e}_y.$$

Da $\|\vec{e}_y\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\lambda}{1} \\ &= \lambda \\ &= \vec{e}_x \circ \vec{e}_y \\ &= \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} \circ \frac{1}{\|\vec{y}\|} \vec{y} \\ &= \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.\end{aligned}$$

Damit wurde das folgende Theorem gezeigt.

Theorem 19.21

Für den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Damit ist α aber nicht eindeutig bestimmt! Tatsächlich wurde auch nicht festgelegt, ob man mit α den Winkel meint, mit dem \vec{x} gedreht werden muss um auf \vec{y} zu liegen oder anders herum. Für den inneren, nicht orientierten Winkel gilt zusätzlich

$$0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Eingeschränkt auf diesen Bereich ist die Cosinusfunktion bijektiv und es gilt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}\right).$$

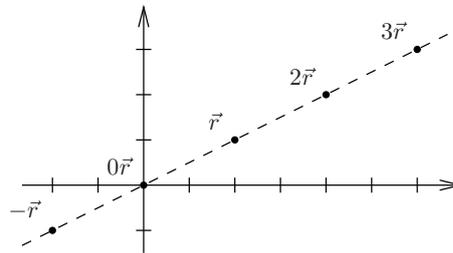
19.4 Geraden

In der Punktdarstellung bildet die Menge alle skalarer Vielfacher eines Vektors \vec{r} eine Geraden durch den Koordinatenursprung.

Beispiel 19.22 Sei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{r}, 2\vec{r}, 3\vec{r}, -1\vec{r}$ und $0\vec{r}$ liegen alle auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden. Zeichnet man alle skalaren Vielfachen $a\vec{r}$, $a \in \mathbb{R}$ von \vec{r} ein, erhält man die Gerade selbst.



Damit kann man geometrische Objekte wie Geraden als Mengen von Vektoren beschreiben. Dies hat den Vorteil, dass man alles, was man über Mengen und Vektoren weiß, zur Lösung von geometrischen Probleme anwenden kann.

Die Ursprungsgerade mit Richtungsvektor $\vec{r} \neq \vec{0}$ ist somit

$$G = \{a\vec{r} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Definition 19.23 (Ursprungsgerade)

Eine Menge G heißt Ursprungsgerade wenn es einen Vektor $\vec{r} \neq \vec{0}$ gibt so dass

$$G = \{a\vec{r} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Für $a = 0$ ist $a\vec{r} = \vec{0}$ und somit gilt für jede Ursprungsgerade G

$$\vec{0} \in G.$$

Beispiel 19.24 Sei

$$G_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \quad G_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann ist

$$G_1 = G_2.$$

Hierbei bedeutet $=$ die Mengengleichheit.

Allgemein gilt für kollineare Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \neq \vec{0}$, dass die von ihnen aufgespannten Ursprungsgeraden gleich sind, d.h.

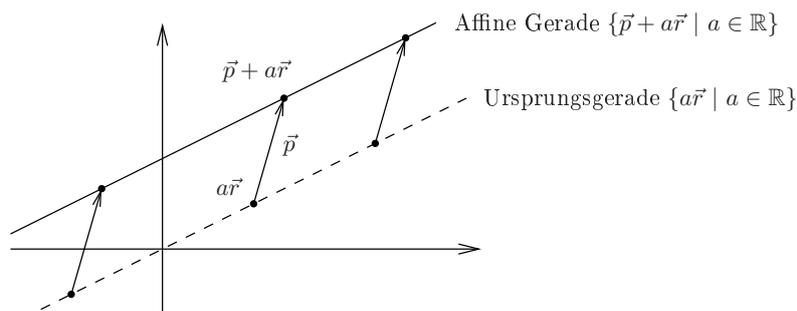
$$\{a\vec{r} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a\vec{s} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Für eine gegebene Ursprungsgerade ist der Richtungsvektor somit nur bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig.

Die bisher betrachteten Geraden gehen alle durch den Koordinatenursprung. Man kann nun jeden Punkt einer Ursprungsgeraden um den selben Vektor \vec{p} verschieben. Dies entspricht einer Vektor Addition, siehe Seite 185. Auf diese Weise erhält man die Menge

$$G = \{\vec{p} + a\vec{r} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

In der Punktdarstellung ist dies eine um \vec{p} verschobene Ursprungsgerade, d.h. eine Gerade, die nun aber i.a. nicht mehr durch den Koordinatenursprung geht. Solche Geraden nennt man affine Geraden, wobei man den Zusatz *affin* oft weglässt.



Definition 19.25 (Affine Gerade)

Eine Menge G heißt affine Gerade wenn es $\vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$ gibt so dass

$$G = \{\vec{p} + a\vec{r} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Der Schnittpunkt zweier Geraden G_1, G_2 ist somit die Schnittmenge $G_1 \cap G_2$. Aus der Punktdarstellung ist anschaulich klar, dass es nur drei Möglichkeiten gibt.

- $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ falls die Geraden parallel oder windschief sind.
- $G_1 \cap G_2$ enthält genau ein Element falls sich die Geraden schneiden.
- $G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$ falls die Geraden gleich sind.

Rechnerisch führt die Berechnung der Schnittmenge auf ein lineares Gleichungssystem. Auch für lineare Gleichungssysteme gibt es nur die drei Möglichkeiten: keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Beispiel 19.26 Sei

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Für die Schnittmenge gilt $\vec{x} \in G_1 \cap G_2$ genau dann wenn $\vec{x} \in G_1$ und $\vec{x} \in G_2$, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{für ein (anderes) } a \in \mathbb{R}.$$

In beiden Aussagen wird das Variablensymbol a verwendet, obwohl es jeweils unterschiedliche Werte annehmen darf. Man sollte daher a in der zweiten Aussage in b umbenennen. Dies führt zu der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a - 5b \\ 2a - 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Gleichung von Paaren. Laut Theorem 5.2 auf Seite 28 sind zwei Paare gleich genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind. Man erhält somit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten a, b :

$$3a - 5b = 1$$

$$2a - 3b = 1.$$

Da die Unbekannten a, b lediglich mit Konstanten multipliziert und aufsummiert werden, handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung

$$a = 2, \quad b = 1.$$

Die beiden Geraden haben somit genau einen Schnittpunkt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

19.5 Ebenen im Anschauungsraum und Kreuzprodukt

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf den Fall $n = 3$, d.h. Teilmengen von \mathbb{R}^3 .

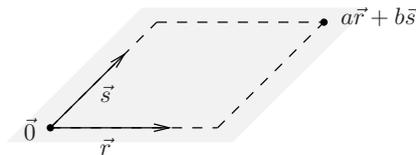
Seien \vec{r}, \vec{s} zwei nicht kollineare Vektoren und

$$E = \{a\vec{r} + b\vec{s} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Stellt man die Elemente von E als Punkte in einem Koordinatensystem dar, ergibt sich eine Ebene, in der auch der Koordinatenursprung liegt. Solche Mengen werden als Ursprungsebenen bezeichnet.

Im Unterschied zu Ursprungsgeraden hat man also nicht mehr nur einen Richtungsvektor \vec{r} sondern zwei. Die Ebene wird durch die beiden Richtungsvektoren \vec{r}, \vec{s} aufgespannt. Die Struktur der Menge ist ansonsten aber gleich. Diese Struktur wird später zu Spannräumen verallgemeinert, indem man eine beliebige Anzahl Richtungsvektoren zulässt.

Terme der Form $a\vec{r} + b\vec{s}$ nennt man auch Linearkombination der Vektoren \vec{r}, \vec{s} mit Gewichten a, b . Die Ursprungsebene ist somit die Menge aller Linearkombinationen der Richtungsvektoren \vec{r}, \vec{s} .



Wären die Richtungsvektoren \vec{r}, \vec{s} kollinear, d.h. würden sie in gleiche oder entgegengesetzte Richtung zeigen, dann würde die Ursprungsebene zu einer Ursprungsgeraden kollabieren.

Definition 19.27 (Ursprungsebene)

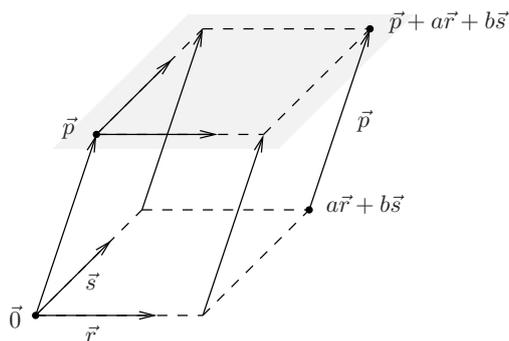
Eine Menge E heißt Ursprungsebene wenn es zwei nicht-kollineare Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ gibt so dass

$$E = \{a\vec{r} + b\vec{s} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wie bei Geraden kann man auch Ursprungsebenen durch eine Vektor \vec{p} verschieben und erhält damit Ebenen, die nicht mehr notwendigerweise durch den Koordinatenursprung gehen. Diese haben die Form

$$E = \{\vec{p} + a\vec{r} + b\vec{s} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Solche Ebenen nennt man affine Ebenen, wobei man den Zusatz *affin* oft weglässt.



Definition 19.28 (Affine Ebene)

Eine Menge E heißt affine Ebene wenn es Vektoren $\vec{p}, \vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ mit \vec{r}, \vec{s} nicht kollinear gibt so dass

$$E = \{\vec{p} + a\vec{r} + b\vec{s} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Beispiel 19.29 Da auch Ebenen als Mengen von Vektoren definiert wurden, läuft die Berechnung des Schnittpunkts einer Ebene und einer Geraden auf die Berechnung der Schnittmenge hinaus.

Sei

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Punkt \vec{x} liegt sowohl auf der Ebene E als auch auf der Geraden G genau dann wenn $\vec{x} \in G \cap E$, d.h..

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für bestimmte } a, b$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein bestimmtes } c.$$

Das Ziel ist die Berechnung von a, b bzw. c . Gleichsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix} a - 2c \\ b - c \\ a + 2b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da zwei Tripel gleich sind genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind, folgt hieraus das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a - 2c &= 0 \\ b - c &= 0 \\ a + 2b - 2c &= 0. \end{aligned}$$

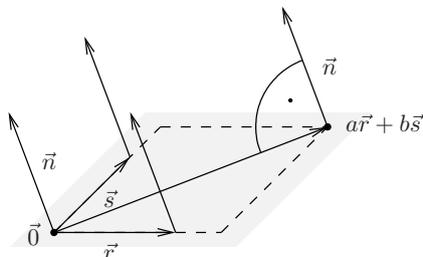
Dieses hat genau eine Lösung

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Setzt man c in die Gerade ein, erhält man den Schnittpunkt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bisher wurde die Ausbreitungsrichtung einer Ursprungsebene durch zwei Richtungsvektoren \vec{r}, \vec{s} beschrieben. Äquivalent kann diese auch durch einen Vektor \vec{n} beschrieben werden der senkrecht zu der Ebene steht. Einen solchen Vektor nennt man Normalenvektor der Ebene.



Definition 19.30 (Normalenvektor)

Sei E eine Ursprungsebene. Ein Vektor \vec{n} heißt Normalenvektor von E wenn \vec{n} orthogonal zu jedem $\vec{x} \in E$ ist.

Ist \vec{n} ein Normalenvektor von E , dann ist auch $c\vec{n}$ Normalenvektor von E . Der Normalen einer Ursprungsebene ist somit nur bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig.

Theorem 19.31

Sei

$$E = \{a\vec{r} + b\vec{s} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

eine Ursprungsebene. Dann ist \vec{n} Normalenvektor genau dann wenn \vec{n} orthogonal zu \vec{r} und \vec{s} ist.

Beweis. Da es sich um eine genau-dann-wenn Aussage handelt, müssen zwei Richtungen gezeigt werden.

- Sei \vec{n} Normalenvektor von E . Laut Definition ist dann \vec{n} orthogonal zu jedem $\vec{x} \in E$. Da $\vec{r}, \vec{s} \in E$ folgt somit, dass \vec{n} orthogonal zu \vec{r} und zu \vec{s} ist.
- Sei \vec{n} orthogonal zu \vec{r} zu \vec{s} . Zu zeigen ist, dass \vec{n} dann orthogonal zu jedem $\vec{x} \in E$ ist. Sei

$$\vec{x} = a\vec{r} + b\vec{s}$$

ein beliebiges Element von E . Mit den Rechengesetzen des Skalarprodukts gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{x} &= \vec{n} \circ (a\vec{r} + b\vec{s}) \\ &= a(\vec{n} \circ \vec{r}) + b(\vec{n} \circ \vec{s}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit ist \vec{n} orthogonal zu \vec{x} .

Um nun einen Normalenvektor einer gegebenen E zu berechnen, müssen daher nur die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned}\vec{n} \circ \vec{r} &= 0 \\ \vec{n} \circ \vec{s} &= 0\end{aligned}$$

erfüllt sein. Dies sind zwei Gleichungen mit drei Unbekannten n_1, n_2, n_3 . Es wird somit unendlich viele Lösungen für \vec{n} geben, die jedoch alle gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Es genügt somit, *eine* Lösung zu finden. Setzt man die Definition des Skalarprodukts in die o.g. Gleichungen ein, erhält man

$$\begin{aligned}n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 &= 0 \\ n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3 &= 0.\end{aligned}$$

Man kann aus diesen Gleichungen n_1 eliminieren indem man die erste Gleichung mit s_1 multipliziert und die zweite mit r_1 und die Gleichungen dann voneinander subtrahiert. Damit erhält man eine Gleichung mit nur zwei Unbekannten n_2, n_3 .

$$\begin{aligned}n_2(r_1 s_2 - s_1 r_2) + n_3(r_1 s_3 - r_3 s_1) &= 0 \\ n_2 \underbrace{(r_1 s_2 - r_2 s_1)}_{\rightarrow n_3} &= n_3 \underbrace{(r_3 s_1 - r_1 s_3)}_{\rightarrow n_2}.\end{aligned}$$

Eine triviale Lösung erhält man mit der Wahl

$$\begin{aligned}n_2 &= r_3 s_1 - r_1 s_3 \\ n_3 &= r_1 s_2 - r_2 s_1.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte für n_2, n_3 in die erste oder zweite Gleichung ein und löst diese nach n_1 auf, erhält man

$$n_1 = r_2 s_3 - r_3 s_2.$$

Ein Normalenvektor ist somit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 s_3 - r_3 s_2 \\ r_3 s_1 - r_1 s_3 \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 \end{pmatrix}.$$

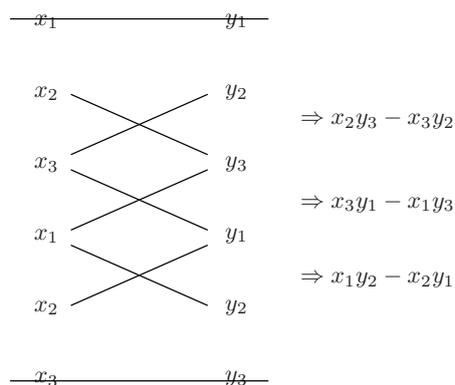
Die anderen Normalenvektoren sind skalare Vielfache hiervon. Der so berechnete Normalenvektor \vec{n} ist das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren \vec{r}, \vec{s} .

Definition 19.32 (Kreuzprodukt)

Das Kreuzprodukt $\times \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Man kann sich die Definition durch folgendes Bild merken:



Für das Kreuzprodukt von Vektoren verwendet man das gleiche Funktionssymbol wie für das kartesische Produkt von Mengen. Man muss daher aus dem Kontext schließen, welches Produkt gemeint ist.

Theorem 19.33 (Eigenschaften des Kreuzprodukts)

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Dann gelten folgende Aussagen:

- \vec{z} ist orthogonal zu \vec{x} und zu \vec{y} .
- Sei α der innere Winkel zwischen \vec{x} und \vec{y} , d.h. $0 \leq \alpha < \pi$. Dann gilt

$$\|\vec{z}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin(\alpha).$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Herleitung des Kreuzprodukts. Für den Beweis der zweiten Aussage geht man wie folgt vor. Da beide Seiten nicht negativ sind, kann man sie quadrieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2(\alpha).$$

Dann ersetzt man $\sin^2(\alpha)$ durch

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

und setzt wie in Kapitel 19.3 gezeigt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

ein. Man erhält dann die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} \|\vec{z}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \left(1 - \frac{(\vec{x} \circ \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2}\right) \\ \|\vec{z}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \circ \vec{y})^2. \end{aligned}$$

Setzt man die Definition der Euklidischen Norm ein, erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} &(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2. \end{aligned}$$

Dass diese gilt, zeigt man einfach dadurch, dass man die Produkte auf beiden Seiten ausmultipliziert und voneinander subtrahiert. Das Ergebnis ist Null. Da das eine ziemliche Rechnerei ist, nimmt man dazu besser einen Computer.

20 Lineare Gleichungssysteme

Eine Gleichung mit einer Unbekannten x heißt linear, wenn sie die Form

$$ax = b$$

hat, wobei a und b Konstanten sind. Für die Lösung muss man drei Fälle unterscheiden.

- Genau eine Lösung $x = b/a$ wenn $a \neq 0$.
- Keine Lösung wenn $a = 0$ und $b \neq 0$.
- Unendlich viele Lösungen wenn $a = 0$ und $b = 0$.

Eine Gleichung mit n Unbekannten x_1, \dots, x_n heißt linear wenn sie die Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

hat, wobei a_1, \dots, a_n und b Konstanten sind.

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus m linearen Gleichungen mit den gemeinsamen Unbekannten x_1, \dots, x_n .

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Koeffizienten a_{ij} sind doppelt indiziert: Der ersten Index i steht für die Gleichung, in der der Koeffizient auftritt. Der zweite Index j steht für die Variable x_j , mit der der Koeffizient multipliziert wird.

Um Schreibaufwand zu sparen, lässt man bei linearen Gleichungssystemen oft die Additionssymbole, die Unbekannten und die Gleichheitssymbole weg.

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \quad \text{bzw.} \quad (A | \vec{b})$$

Hierbei heißt A Koeffizientenmatrix und \vec{b} rechte Seite des LGS. In der Koeffizientenmatrix tritt a_{ij} somit in der i -ten Zeile (i -te Gleichung) und j -ten Spalte (j -te Variable) auf. Der Begriff Matrix wird erst in Kapitel 21 definiert. Vorerst ist eine Matrix einfach ein rechteckiger Block von Zahlen.

Beispiel 20.1 Ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten ist z.B.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_3 &= 7 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Kompakt dargestellt wird dies wie folgt:

$$\begin{array}{ccc|c}x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & -5 & 1 & 2\end{array}$$

Zur “Erinnerung” wurden die zur jeweiligen Spalte gehörigen Variablen in der ersten Zeile dazugeschrieben.

Die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite sind entsprechend

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

20.1 Vektorielle Darstellung

Durch die Anwendung von Vektor Operationen kann man den Schreibaufwand für lineare Gleichungssysteme reduzieren.

Fasst man die linke und die rechte Seite eines LGS zu einem m -Tupel zusammen, erhält man statt m linearen Gleichungen nur noch eine Gleichung von m -Tupeln.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten des Vektors auf der linken Seite sind Summen. Hier kann man Schreibaufwand sparen, indem man Vektor Additionen verwendet.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Aus dem j -ten Summand lässt sich nun der skalare Faktor x_j unter Verwendung einer skalaren Multiplikation herausziehen.

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Kürzt man die Spalten der Koeffizientenmatrix mit $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ab, erhält man das LGS in der kompakten Form

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}.$$

Auf der linken Seite hat man eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ mit Gewichten x_1, \dots, x_n . In dieser Form sieht ein LGS bis auf die Vektorpfeile gleich aus wie eine lineare Einzelgleichung.

Ein LGS zu lösen kann man daher auch so interpretieren, dass man die Spalten der Koeffizientenmatrix $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so gewichtet, dass deren Summe die rechte Seite \vec{b} ergibt.

20.2 Zeilenstufenform

Ein LGS in Zeilenstufenform ist besonders einfach zu lösen. Was damit gemeint ist, soll an ein paar Beispielen erklärt werden. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie jedes beliebige LGS auf Zeilenstufenform transformiert werden kann.

Beispiel 20.2 Gegeben sei das folgende LGS mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 5 \\ & & 1 & 4 \end{array}$$

Die fehlenden Koeffizienten in der zweiten Zeile sind Null. Jede Zeile beginnt mit einer führenden Eins **1**. Die zweite Gleichung ergibt sofort x_3 . Die erste Gleichung wird nach x_1 aufgelöst. Aufgrund der führenden Eins sind hierbei keine Divisionen erforderlich.

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 \\ x_1 &= 5 - 2x_2 - x_3 \\ &= 5 - 2x_2 - 4 \\ &= 1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Für jeden beliebigen Wert von x_2 erhält man somit eine Lösung des LGS. Fasst man diese zu einem Vektor zusammen, erhält man die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 \\ x_2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist somit eine affine Gerade.

Beispiel 20.3 Das vorige Beispiel wird um eine dritte Gleichung erweitert.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 5 \\ & & \mathbf{1} & 4 \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

Dieses LGS hat keine Lösung. Die letzte Gleichung $0 = 1$ ist unlösbar. Damit ist

$$\mathbb{L} = \emptyset.$$

Beispiel 20.4

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & 5 \\ & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ & & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

Die Gleichungen werden “von unten nach oben” durch “Rückwärtseinsetzen” gelöst. Aufgrund der führenden Eins sind keine Divisionen erforderlich.

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= 4 \\ x_1 &= 5 - 2x_2 - x_3 \\ &= 5 - 8 - 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Man erhält somit genau einen Lösung.

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -4 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Beispiel 20.5

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & 5 \\ & & \mathbf{1} & 3 & 4 \\ & & & 0 & 0 \end{array}$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist trivial und kann weggelassen werden. Die zweite Gleichung wird nach x_3 aufgelöst.

$$x_3 = 4 - 3x_4.$$

Die erste Gleichung wird nach x_1 aufgelöst und x_3 eingesetzt.

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\ &= 5 - 2x_2 - 4 + 3x_4 + x_4 \\ &= 1 - 2x_2 + 4x_4. \end{aligned}$$

Damit hat man für jeden beliebigen Wert von x_2 und x_4 eine Lösung.

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 + 4x_4 \\ x_2 \\ 4 - 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Die Struktur der Lösungsmenge erinnert an eine affine Ebene. Die Lösungen lassen sich darstellen als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von zwei Richtungsvektoren.

Diese Struktur findet man bei allen linearen Gleichungssystemen. Die Anzahl Richtungsvektoren ist dabei die Differenz aus der Anzahl Unbekannter und der Anzahl nichttrivialer Gleichungen.

Allgemein sieht ein LGS in Zeilenstufenform wie folgt aus:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1					
	1				
			1		

A

\vec{b}

Koeffizient Null

1

Koeffizient Eins

Koeffizient beliebig

Die Lösung eines LGS in Zeilenstufenform erhält man durch Rückwärtseinsetzen:

- Hat A eine Zeile mit lauter Nullen und ist die zugehörige rechte Seite ungleich Null, dann hat das LGS keine Lösung.
- Andernfalls können Variablen, in deren Spalte *keine* führende Eins steht, beliebig gewählt werden. Im Bild sind diese freien Variablen x_3 und x_5 . Falls es solche Variablen gibt, hat das LGS unendlich viele Lösungen.
- Die Werte der anderen Variablen erhält man, indem man die Gleichungen von unten nach oben jeweils nach der Variablen auflöst, in deren Spalte die führende Eins steht und die bereits berechneten Variablen einsetzt. Aufgrund der führenden Eins ist hierbei keine Division erforderlich.

20.3 Gauß Algorithmus

Mit dem Gauß Algorithmus kann jedes LGS auf Zeilenstufenform transformiert werden ohne dass sich seine Lösungsmenge ändert. Hierfür sind lediglich 3 Umformungsschritte erforderlich:

- Eine Zeile mit einem beliebigen Faktor ungleich Null multiplizieren.
- Zwei Zeilen vertauschen.
- Zu einer Zeile ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile addieren.

Beim Gauß Algorithmus werden diese drei Schritte systematisch so lang durchgeführt, bis Zeilenstufenform hergestellt ist. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt:

Schritt 1. Von links beginnend erste Spalte j suchen, die nicht komplett Null ist.

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & & j & \\
 \hline
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Schritt 2. Falls oberstes Element in dieser Spalte (d.h. a_{1j}) Null ist, vertausche erste Zeile mit einer Zeile i , in der $a_{ij} \neq 0$. Die erste Zeile hat danach die Form

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & \neq 0 & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Schritt 3. Dividiere erste Zeile durch a_{1j} . Die erste Zeile hat danach die Form

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & 1 & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Schritt 4. Ausräumen der j -ten Spalte. Subtrahiere von der k -ten Zeile das a_{kj} -fache der ersten Zeile für alle $k = 2, 3, \dots$. Hierdurch wird die gesamte j -te Spalte außer dem ersten Element a_{1j} zu Null.

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & & j & \\
 \hline
 & & 1 & & \\
 & & \times & & \\
 & & \times & & \\
 & & \times & & \\
 \hline
 & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Schritt 5. Verfahren rekursiv auf die Teilmatrix anwenden, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht bis die Zeilenstufenform erreicht ist.

Beispiel 20.6 Gegeben sei das LGS

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 5 \end{array}$$

Schritt 1. Die erste Spalte, die nicht komplett Null ist, ist die Spalte $j = 2$.

Schritt 2. Da das oberste Element a_{1j} in Spalte $j = 2$ Null ist, wird die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Man hätte hier auch eine andere Spalte wählen können.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 5 \end{array}$$

Das oberste Element in Spalte $j = 2$ ist jetzt $a_{1j} = 2$.

Schritt 3. Die erste Zeile wird durch $a_{1j} = 2$ dividiert um eine führende Eins in der ersten Zeile zu erhalten.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 5 \end{array}$$

Schritt 4. Ausräumen der $j = 2$ -ten Spalte.

- Von der $k = 2$ -ten Zeile wird $a_{kj} = 0$ mal die erste Zeile subtrahiert.
- Von der $k = 3$ -ten Zeile wird $a_{kj} = 4$ mal die erste Zeile subtrahiert.
- Von der $k = 4$ -ten Zeile wird $a_{kj} = 6$ mal die erste subtrahiert.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & -1 \end{array}$$

Schritt 5. Die erste Zeile wird nun nicht mehr geändert. Die gleichen Schritte 1-4 werden nun auf die Restmatrix angewandt.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & -1 \end{array}$$

Beispiel 20.7 Das komplette Rechenschema sieht wie folgt aus.

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	2	2	0	4
2	4	0	2	2
1	3	3	5	7
0	-2	0	5	7
2	4	0	2	2
0	2	2	0	4
1	3	3	5	7
0	-2	0	5	7
1	2	0	1	1
0	2	2	0	4
1	3	3	5	7
0	-2	0	5	7
1	2	0	1	1
	2	2	0	4
	1	3	4	6
	-2	0	5	7
1	2	0	1	1
	1	1	0	2
	1	3	4	6
	-2	0	5	7
1	2	0	1	1
	1	1	0	2
		2	4	4
		2	5	11
1	2	0	1	1
	1	1	0	2
		1	2	2
		2	5	11
1	2	0	1	1
	1	1	0	2
		1	2	2
			1	7

Da in der vierten Zeile bereits eine führende Eins steht, hat man damit Zeilenstufenform erreicht und kann mit Rückwärtseinsetzen die Lösung berechnen.

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 7 \\
 x_3 &= 2 - 2x_4 = 2 - 14 = -12 \\
 x_2 &= 2 - x_3 = 2 - (-12) = 14 \\
 x_1 &= 1 - 2x_2 - x_4 = 1 - 28 - 7 = -34.
 \end{aligned}$$

Beispiel 20.8 Abschließend ein Beispiel mit unendlich vielen Lösungen.

x_1	x_2	x_3	x_4		
3	6	3	12	9	
1	2	4	10	9	
2	4	4	12	10	
1	2	1	4	3	Erste Zeile durch 3 teilen.
1	2	4	10	9	
2	4	4	12	10	
1	2	1	4	3	Erste Spalte ausräumen.
		3	6	6	Zweite Zeile minus $a_{21} = 1$ mal erste Zeile.
		2	4	4	Dritte Zeile minus $a_{31} = 2$ mal erste Zeile.
1	2	1	4	3	
		1	2	2	Zweite Zeile durch $a_{23} = 3$ teilen.
		2	4	4	
1	2	1	4	3	
		1	2	2	Dritte Spalte ausräumen.
		0	0	0	Dritte Zeile minus $a_{32} = 2$ mal zweite Zeile.

Die letzte Gleichung $0 = 0$ kann weggelassen werden. Damit sind x_2 und x_4 beliebig.

$$x_3 = 2 - 2x_4$$

$$x_1 = 3 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3 - 2x_2 - 2 + 2x_4 - 4x_4 = 1 - 2x_2 - 2x_4.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ 2 - 2x_4 \\ x_4 \end{array} \right) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) + x_2 \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + x_4 \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

21 Matrizen

Im Kontext von linearen Gleichungssystemen wurde eine Matrix als rechteckiger Block von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten beschrieben. Fügt man in diesen Block Klammern um die Spalten ein, erkennt man, dass eine Matrix ein n -Tupel von Spaltenvektoren mit jeweils m Komponenten ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

Die Darstellung einer Matrix als rechteckiger Zahlenblock ist also nur eine Vereinfachung der Notation.

Definition 21.1 (Matrix)

Eine $m \times n$ Matrix ist ein n -Tupel von m -stelligen Vektoren.

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen ist somit $(\mathbb{R}^m)^n$, d.h. die Menge aller n -Tupel von m -Tupeln von reellen Zahlen. Dies wird abgekürzt mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Für Matrizen werden Großbuchstaben verwendet. Um also auszudrücken, dass A eine $m \times n$ Matrix ist, schreibt man

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Beachten Sie, dass

$$\mathbb{R}^{m \times n} \neq \mathbb{R}^{n \times m}$$

falls $n \neq m$. Auf der linken Seite steht eine Menge von n -Tupeln, auf der rechten eine Menge von m -Tupeln.

Die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet, d.h.

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Die Komponente in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A wird mit a_{ij} bezeichnet. Der erste Index ist der Zeilenindex, der zweite der Spaltenindex. Entsprechend ist a_{ij} die i -te Komponente von \vec{a}_j .

21.1 Addition und skalare Multiplikation

Die Rechenoperationen auf Matrizen sind ähnlich definiert wie die Rechenoperationen auf Vektoren. Insbesondere kann man Matrix Operationen durch entsprechende Vektor Operationen realisieren, indem man diese spaltenweise auf die Matrix anwendet.

Definition 21.2 (Matrix Addition.)

Die Matrix Addition $+$ $\in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert durch

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Matrizen werden somit komponentenweise addiert. Man kann die Addition auch mit Vektor Additionen bewerkstelligen: Die j -te Spalte von $A + B$ ist die Summe der j -ten Spalte von A und der j -ten Spalte von B .

$$(A + B)_j = \vec{a}_j + \vec{b}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

bzw.

$$A + B = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{a}_2 + \vec{b}_2, \dots, \vec{a}_n + \vec{b}_n).$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass man keine doppelten Indizes braucht.

Definition 21.3 (Skalare Multiplikation.)

Die skalare Multiplikation $\cdot \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert durch

$$(cA)_{ij} = ca_{ij}$$

Auch die skalare Multiplikation ist somit komponentenweise definiert. Man kann sie auch spaltenweise durch skalare Multiplikationen von Vektoren bewerkstelligen:

$$(cA)_j = c\vec{a}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

bzw.

$$cA = (c\vec{a}_1, c\vec{a}_2, \dots, c\vec{a}_n).$$

Für die Addition und skalare Multiplikation gelten die gleichen Gesetze wie für Vektoren.

Theorem 21.4

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ c(A + B) &= cA + cB \\ (a + b)C &= aC + bC \\ (ab)C &= a(bC). \end{aligned}$$

Beweis. Exemplarisch wird das zweite Gesetz gezeigt. Die prinzipielle Vorgehensweise ist bei allen Gesetzen gleich. Da Matrizen Tupel sind, sind zwei Matrizen genau dann gleich wenn ihre Komponenten gleich sind. Um

$$c(A + B) = cA + cB$$

zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$[c(A + B)]_{ij} = (cA + cB)_{ij}$$

für beliebiges $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} [c(A + B)]_{ij} &= c(A + B)_{ij} && \text{Def. skalare Multiplikation} \\ &= c(a_{ij} + b_{ij}) && \text{Def. Matrix Addition} \\ &= ca_{ij} + cb_{ij} && \text{Distributivgesetz für Skalare} \\ &= (cA)_{ij} + (cB)_{ij} && \text{Def. skalare Multiplikation} \\ &= (cA + cB)_{ij} && \text{Def. Matrix Addition} \end{aligned}$$

21.2 Matrix Vektor Multiplikation

Man kann eine $m \times n$ Matrix A mit einem n -stelligen Vektor \vec{x} multiplizieren. Das Ergebnis ist ein m -stelliger Vektor \vec{y} . Die i -te Komponente von \vec{y} erhält man, indem man das Skalarprodukt aus der i -ten Zeile von A und dem Vektor \vec{x} berechnet (Zeile mal Spalte Regel):

$$\begin{array}{ccc}
 i \text{ ---} \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{a_{ij}} \\ \text{---} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ x_j \\ \text{---} \end{array} \right) & = & \text{---} \left(\begin{array}{c} \square \\ \text{---} \end{array} \right) i \\
 A \in \mathbb{R}^{m \times n} & \vec{x} \in \mathbb{R}^n & A\vec{x} \in \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Die Matrix Vektor Multiplikation ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl Komponenten von \vec{x} ist – sonst würde das Skalarprodukt aus den Zeilen von A und \vec{x} nicht aufgehen.

Beispiel 21.5

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -11 \\ 16 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Definition 21.6 (Matrix Vektor Multiplikation.)

Die Matrix Vektor Multiplikation $\cdot \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 (A\vec{x})_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j
 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, m$.

Weshalb man die Matrix Vektor Multiplikation auf diese Weise definiert, wird in Kapitel 23 klar.

Lineare Gleichungssysteme. Lineare Gleichungssysteme lassen sich kompakt mit der Matrix Vektor Multiplikation darstellen. Da

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

kann das LGS

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit einer Matrix Multiplikation

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ausgedrückt werden.

Linearkombination der Spalten. Außer mit der “Zeile mal Spalte” Regel kann man eine Matrix Vektor Multiplikation auch dadurch berechnen, dass man die Spalten von A mit den Komponenten von \vec{x} gewichtet aufsummiert.

Beispiel 21.7

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 21.8

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

Da doppelte Indizes vermieden werden, arbeitet es sich mit der Darstellung der Matrix Vektor Multiplikation als Linearkombination der Spalten oft einfacher als mit der o.g. Definition.

Beweis.

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Def. Matrix Vektor Multiplikation

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Def. Vektor Addition

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Def. skalare Multiplikation von Vektoren

$$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

Man kann man somit jede Linearkombination von Vektoren als Matrix Vektor Multiplikation darstellen.

Die Rechengesetze für die Matrix Vektor Multiplikation sind wie erwartet.

Theorem 21.9

$$\begin{aligned}(A + B)\vec{x} &= A\vec{x} + B\vec{x} \\ A(\vec{x} + \vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ (cA)\vec{x} &= c(A\vec{x}) = A(c\vec{x})\end{aligned}$$

Beweis. Exemplarisch wird das dritte Gesetz gezeigt. Unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren gilt

$$\begin{aligned}(cA)\vec{x} &= (c\vec{a}_1, c\vec{a}_2, \dots, c\vec{a}_n)\vec{x} \\ &= x_1(c\vec{a}_1) + x_2(c\vec{a}_2) + \dots + x_n(c\vec{a}_n) \\ &= c(x_1\vec{a}_1) + c(x_2\vec{a}_2) + \dots + c(x_n\vec{a}_n) \\ &= c(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n) \\ &= c(A\vec{x}) \\ (cA)\vec{x} &= x_1(c\vec{a}_1) + x_2(c\vec{a}_2) + \dots + x_n(c\vec{a}_n) \\ &= (cx_1)\vec{a}_1 + (cx_2)\vec{a}_2 + \dots + (cx_n)\vec{a}_n \\ &= (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} \\ &= A(c\vec{x}).\end{aligned}$$

Definition 21.10 (Einheitsmatrix, kanonische Basisvektoren)

Die $n \times n$ Einheitsmatrix ist definiert durch

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ von E heißen kanonische Basisvektoren, d.h.

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Komponente}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Einheitsmatrix ist ein Spezialfall, da sie bei der Matrix Vektor Multiplikation keinen Effekt hat.

Theorem 21.11

$$E\vec{x} = \vec{x}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \vec{x}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit einem kanonischen Basisvektor kann man eine Spalte von A herausgreifen.

Theorem 21.12

$$A\vec{e}_j = \vec{a}_j$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A\vec{e}_j &= 0\vec{a}_1 + \dots + 1\vec{a}_j + \dots + 0\vec{a}_n \\ &= \vec{a}_j. \end{aligned}$$

21.3 Matrix-Matrix Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier Matrizen gilt wie bei der Matrix Vektor Multiplikation die "Zeile mal Spalte" Regel. Die Komponente $(AB)_{ij}$ erhält man als Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B .

$$\begin{array}{ccc}
 i \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) & = & i \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 A \in \mathbb{R}^{m \times k} & B \in \mathbb{R}^{k \times n} & & AB \in \mathbb{R}^{m \times n}
 \end{array}$$

Damit das funktioniert, muss eine Zeile von A so viele Komponenten haben wie eine Spalte von B . Folglich muss die Anzahl k von Spalten von A gleich der Anzahl k von Zeilen von B sein. Wenn also $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ist, muss $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ sein. Zu jeder Zeile von A lässt sich mit diesem Schema eine Zeile von AB berechnen. Zu jeder Spalte von B existiert entsprechend eine Spalte von AB . Damit ist $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Beispiel 21.13

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 4}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 1}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{1 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{1 \times 4}}$$

Hat die Matrix B nur eine Spalte, ist das Ergebnis gleich wie bei der Matrix Vektor Multiplikation. Die Matrix Vektor Multiplikation ist somit ein Spezialfall der Matrix Matrix Multiplikation.

Definition 21.14 (Matrix Matrix Multiplikation.)

Die Matrix Matrix Multiplikation $\cdot \in \mathbb{R}^{m \times k} \times \mathbb{R}^{k \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 (AB)_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \\
 &= \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell}b_{\ell j}.
 \end{aligned}$$

Spaltenweise Berechnung der Matrix Multiplikation. Außer mit der Zeile mal Spalte Regel kann man ein Matrix Produkt auch spaltenweise durch Matrix Vektor Multiplikationen berechnen: Die j -te Spalte von AB ist $A\vec{b}_j$ für $j = 1, \dots, n$. Diese Art der Darstellung ist wesentlich übersichtlicher, da man weniger Indizes braucht und Matrizen “zusammen” lassen kann.

Beispiel 21.15

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem 21.16

$$AB = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n).$$

Beweis. Die Komponente in der i -ten Zeile und j -ten Spalte auf der linken Seite ist nach Definition

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Die Komponente in der i -ten Zeile und j -ten Spalte auf der rechten Seite ist die i -te Komponente des Vektors $A\vec{b}_j$. Diese erhält man laut Definition der Matrix Vektor Multiplikation als Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit \vec{b}_j , d.h.

$$\begin{aligned} (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n)_{ij} &= (A\vec{b}_j)_i \\ &= a_{i1}(\vec{b}_j)_1 + a_{i2}(\vec{b}_j)_2 + \dots + a_{ik}(\vec{b}_j)_k \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} \\ &= (AB)_{ij}. \end{aligned}$$

Damit sind die Komponenten der Matrizen auf beiden Seiten gleich.

Die Rechengesetze für die Matrix Matrix Multiplikation sind wie erwartet mit einer wichtigen Ausnahme:

Die Matrix Multiplikation ist *nicht* kommutativ.

Selbst wenn sowohl AB als auch BA definiert sind und gleich viele Zeilen und Spalten haben, d.h. für quadratische Matrizen, sind sie i.a. nicht gleich. Der Grund ist, dass bei der Berechnung von $(AB)_{ij}$ die i -te Zeile von A und die j -te Spalte von B aufeinander treffen, während bei $(BA)_{ij}$ die i -te Zeile von B und die j -te Spalte von A multipliziert werden. Das Ergebnis ist folglich i.a. nicht gleich.

Beispiel 21.17

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Man muss daher beim Umformen von Matrix Gleichungen aufpassen. Die Gleichung

$$A = A$$

ist trivialerweise erfüllt. Multipliziert man aber beide Seiten mit B und multipliziert B einmal von rechts und einmal von links, erhält man

$$AB = BA \quad \text{falsch!}$$

Wenn man beim Umformen einer Matrix Gleichung eine Matrix auf beiden Seiten dranmultipliziert, muss man dies folglich entweder auf *beiden* Seiten von links oder von rechts machen!

Theorem 21.18

$$\begin{array}{ll}
c(AB) = (cA)B = A(cB) & \\
(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}) & \\
(A+B)C = AC + BC & \text{Distributivgesetz} \\
(AB)C = A(BC) & \text{Assoziativgesetz} \\
AE = A = EA & \text{Neutrales Element}
\end{array}$$

Einen skalaren Faktor c kann man in einem Matrix Produkt platzieren wo man möchte.

Beweis. Exemplarisch wird das zweite Gesetz gezeigt. Mit den Gesetzen der Matrix Vektor Multiplikation gilt

$$\begin{aligned}
(AB)\vec{x} &= x_1(AB)_1 + x_2(AB)_2 + \dots + x_n(AB)_n && \text{Matrix Vektor Multiplikation durch Linearkombination} \\
&= x_1(A\vec{b}_1) + x_2(A\vec{b}_2) + \dots + x_n(A\vec{b}_n) && \text{Spaltenweise Matrix Multiplikation} \\
&= A(x_1\vec{b}_1) + A(x_2\vec{b}_2) + \dots + A(x_n\vec{b}_n) && \text{Rechengesetz der Matrix Vektor Multiplikation} \\
&= A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \dots + x_n\vec{b}_n) && \text{Rechengesetz der Matrix Vektor Multiplikation} \\
&= A(B\vec{x}) && \text{Matrix Vektor Multiplikation durch Linearkombination}
\end{aligned}$$

Der Satz vom Nullprodukt gilt für Matrizen nicht. Es gibt durchaus Matrizen $A, B \neq 0$ so dass $AB = 0$.

Beispiel 21.19

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

21.4 Inverse Matrix

Nachdem man Matrizen multiplizieren kann, stellt sich die Frage, ob auch eine Division von Matrizen definiert ist. Die Division ist definiert als Multiplikation mit dem Kehrwert, d.h.

$$\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}.$$

Es genügt also, sich zu überlegen was der Kehrwert einer Matrix ist. Anders als bei Skalaren verwendet man bei Matrizen keine Bruchnotation, da unklar ist, ob

$$\frac{A}{B} = A \frac{1}{B} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{B} A$$

sein soll. Da die Matrix Multiplikation nicht kommutativ ist, macht dies durchaus einen Unterschied. Der Kehrwert einer Matrix A wird folglich nicht mit $1/A$ sondern mit A^{-1} bezeichnet sofern er existiert.

Der Kehrwert einer reellen Zahl a ist definiert als die Zahl, mit der a multipliziert werden muss um eins zu erhalten, d.h. als Lösung x der Gleichung

$$ax = 1.$$

Es ist bekannt, dass diese Gleichung genau eine Lösung hat falls $a \neq 0$. Analog geht man bei Matrizen vor um die inverse Matrix zu definieren. Der Einfachheit halber schränkt man sich hierbei auf quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein.

Definition 21.20 (Inverse Matrix.)

Eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt inverse Matrix von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wenn

$$AX = E.$$

Theorem 21.21

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert höchstens eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass

$$AX = E.$$

Da der Beweis etwas länglich ist, wurde er in Kapitel 21.5 ausgelagert.

Eine $n \times n$ Matrix hat somit höchstens eine Inverse. Diese wird (falls sie existiert) mit A^{-1} bezeichnet. In diesem Fall gilt somit

$$AA^{-1} = E.$$

Beispiel 21.22 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Somit ist X inverse Matrix von A . Anders als bei Skalaren sieht man einer Matrix also nicht direkt an, was ihre Inverse ist.

Im Gegensatz zum skalaren Fall gibt es viele Matrizen, die keine Inverse haben. Die Nullmatrix ist also nicht die einzige.

Beispiel 21.23 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um eine Inverse X von A zu berechnen, muss die Gleichung

$$AX = E$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Dies führt zu vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die beiden Gleichungen, in denen x_{11} und x_{21} auftauchen sind

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} &= 1 \\ 2x_{11} + 4x_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Die linke Seite der zweiten Gleichung ist in diesem Beispiel das doppelte der ersten Gleichung, die rechte Seite jedoch nicht. Folglich hat dieses LGS keine Lösung. Es existiert daher keine Matrix X mit $AX = E$.

Definition 21.24 (Reguläre bzw. singuläre Matrix)

Eine quadratische Matrix A heißt *singulär*, wenn es keine Matrix X gibt mit

$$AX = E,$$

sonst *regulär*. Singuläre Matrizen sind somit nicht invertierbar.

Singuläre Matrizen sind Ausnahmefälle. Würde man die Koeffizienten einer singulären Matrix zufällig um einen beliebig kleinen Betrag ändern, wäre die Wahrscheinlichkeit eins, dass sie danach regulär ist. Die einzige singuläre 1×1 Matrix ist (0) .

Berechnung der Inversen

Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet werden so dass

$$AX = E.$$

Führt man die Matrix Multiplikation AX spaltenweise durch und zerlegt E in seine Spalten, erhält man

$$(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n).$$

Da zwei n -Tupel gleich sind genau dann wenn ihre Komponenten gleich sind, führt dies zu n linearen Gleichungssystemen

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad \dots, \quad A\vec{x}_n = \vec{e}_n.$$

Die Lösung jedes einzelnen LGS liefert eine Spalte der Matrix X . Da alle Gleichungssysteme die selbe Koeffizientenmatrix haben und man A nur einmal auf Zeilenstufenform bringen muss, bietet es sich beim Gauß Algorithmus an, alle rechten Seiten "parallel" zu verarbeiten.

Beispiel 21.25 Gesucht ist die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A		E		
\vec{a}_1	\vec{a}_2	\vec{e}_1	\vec{e}_2	
2	3	1	0	
1	2	0	1	
1	$3/2$	$1/2$	0	Erste Zeile durch 2 teilen.
1	2	0	1	
1	$3/2$	$1/2$	0	Erste Spalte ausräumen.
	$1/2$	$-1/2$	1	Zweite Zeile minus erste Zeile.
1	$3/2$	$1/2$	0	
	1	-1	2	Zweite Zeile mal 2.
1	0	2	-3	Erste Zeile minus $3/2$ mal zweite Zeile.
0	1	-1	2	
\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{x}_1	\vec{x}_2	
E		X		

Nachdem im vorletzten Schritt die Zeilenstufenform erreicht war, hätten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 durch Rückwärtseinsetzen berechnet werden können. Es ist jedoch geschickter, durch weitere Gauß Schritte die Spalten über der Diagonalen auszuräumen und damit die linke Seite auf Einheitsmatrix zu transformieren. Danach kann \vec{x}_1, \vec{x}_2 ohne Rückwärtseinsetzen direkt abgelesen werden und man erhält

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das allgemeine Schema zur Brechnung der Inversen lässt sich durch folgendes Bild veranschaulichen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{cccc} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{array} \right) \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} E \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{array} \\
 \hline
 \text{Äquivalenzumformungen} \\
 \text{(Gauß Elimination)} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \\ E \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{array} \right) \\ X \end{array}
 \end{array}$$

Eine reguläre Matrix A erkennt man dadurch, dass man sie wie in o.g. Beispiel mit den Gauß Algorithmus auf Einheitsmatrix transformieren kann.

Bei Skalaren treten die Inversen in Paaren auf: Der Kehrwert von 5 ist $1/5$, der Kehrwert von $1/5$ ist wiederum 5. Wenn x Kehrwert von a ist, dann ist auch a Kehrwert von x . Dies ist bei Matrizen auch so.

Theorem 21.26

Wenn X Inverse von A ist, dann ist auch A Inverse von X , d.h. wenn

$$AX = E$$

dann ist auch

$$XA = E.$$

Für eine reguläre Matrix A gilt somit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad \text{bzw.} \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Die Aussage dieses Theorems wäre trivial, wenn die Matrix Multiplikation kommutativ wäre. Es ist somit eine Ausnahme, dass die Reihenfolge der Faktoren A und X vertauscht werden darf, wenn sie Inverse voneinander sind. Der Beweis dieses Theorems geschieht anhand des Gauß Algorithmus. Hat man X mit o.g. Schema berechnet, muss man nur die Spalten vertauschen und alle Gauß Schritte rückwärts ausführen um A als Inverse von X zu berechnen.

Für Skalare gilt das einfache Gesetz für Kehrwerte

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \frac{1}{b}.$$

Da das Kommutativgesetz für die Matrix Multiplikation nicht gilt, muss man mit der Reihenfolge der Faktoren aufpassen, wenn man dieses Gesetz auf Matrizen überträgt. Tatsächlich dreht sich diese um:

Theorem 21.27

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Beweis. Ausgehend von der Gleichung

$$(AB)(AB)^{-1} = E,$$

die per Definition stimmt, führt man folgende Umformungen durch.

$(AB)(AB)^{-1} = E$	Multiplikation mit A^{-1} von links
$A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}E$	Assoziativgesetz, neutrales Element
$(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$	Ersetze $A^{-1}A$ durch E
$B(AB)^{-1} = A^{-1}$	Multiplikation mit B^{-1} von links
$B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	Ersetze $B^{-1}B$ durch E
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	

21.5 Eindeutigkeit der inversen Matrix*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es höchstens eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit

$$AX = E$$

Sei also X eine Matrix mit $AX = E$.

- Zunächst wird gezeigt, dass dann für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$A\vec{x} \neq \vec{0}.$$

Angenommen es gäbe ein $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$. Dann hat das LGS $A|\vec{0}$ unendlich viele Lösungen $c\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Folglich muss beim Gauß Algorithmus die letzte Zeile komplett Null sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass im Verfahren keine Zeilenvertauschungen erforderlich waren. Falls doch, werden die Gleichungen einfach vorab vertauscht, was ja die Lösungsmenge nicht ändert.

Bei den beiden anderen Gauß Schritten wird eine Zeile entweder mit einem Skalar ungleich Null multipliziert um eine führende Eins zu erzeugen oder es wird ein Vielfaches einer früheren Zeile von ihr subtrahiert um eine Spalte auszuräumen. Seien $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ die *Zeilen* von A . Wird die i -te Zeile im Algorithmus neu berechnet, ist sie daher immer eine Linearkombination von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_i$, d.h. hat die Form

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_i\vec{b}_i \quad \text{mit} \quad c_i \neq 0.$$

Da die letzte Zeile am Ende komplett Null ist, gilt für diese

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n = \vec{0} \quad \text{mit} \quad c_n \neq 0.$$

Führt man nun die gleichen Gauß Schritte statt mit rechter Seite $\vec{0}$ mit \vec{e}_n durch, ist am Ende die rechte Seite der letzten Null-Zeile jedoch c_n , d.h. ungleich Null. Damit wäre das LGS $A|\vec{e}_n$ nicht lösbar. Da aber $AX = E$, ist $A\vec{x}_n = \vec{e}_n$, was im Widerspruch zur Unlösbarkeit des LGS $A|\vec{e}_n$ steht.

Damit wurde gezeigt, dass $A\vec{x} \neq \vec{0}$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$.

- Angenommen es gäbe noch eine weitere Matrix Y mit $AY = E$. Dann wäre

$$\begin{aligned} AX - AY &= E - E = 0 \\ A(X - Y) &= 0. \end{aligned}$$

Für jede Spalte \vec{u} von $X - Y$ ist folglich $A\vec{u} = \vec{0}$ und laut vorigem Ergebnis daher $\vec{u} = \vec{0}$. Das bedeutet aber, dass $X - Y = 0$ bzw. $Y = X$.

Die Gleichung $AX = E$ kann also keine zwei verschiedenen Lösungen haben.

21.6 Transponierte Matrix

Nimmt man die Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ordnet diese zeilenweise zu einer neuen Matrix an, erhält man die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beispiel 21.28

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Spalte von A wird die erste Zeile von A^T , aus der zweiten Spalte von A wird die zweite Zeile von A^T .

Definition 21.29 (Transponierte Matrix.)

Die Matrix Transposition $\cdot^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ist definiert durch

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$A = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \dots \end{pmatrix}^n \quad m \quad A^T = \begin{pmatrix} \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}^m \quad n$$

Definition 21.30 (Symmetrische Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Eine Matrix ist symmetrisch genau dann wenn

$$A^T = A.$$

Beispiel 21.31 Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Auch die Einheitsmatrix E ist symmetrisch.

Theorem 21.32

$$\begin{aligned}
(A^T)^T &= A \\
(A+B)^T &= A^T + B^T \\
(cA)^T &= cA^T \\
(AB)^T &= B^T A^T \\
(A^{-1})^T &= (A^T)^{-1}
\end{aligned}$$

Beweis. Interessant sind nur die letzten beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned}
[(AB)^T]_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{Def. Transposition} \\
&= \sum_{\ell} A_{j\ell} B_{\ell i} && \text{Def. Matrix Multiplikation} \\
&= \sum_{\ell} A_{\ell j}^T B_{i\ell}^T && \text{Def. Transposition} \\
&= \sum_{\ell} B_{i\ell}^T A_{\ell j}^T && \text{Kommutativgesetz für Skalare} \\
&= (B^T A^T)_{ij} && \text{Def. Matrix Multiplikation}
\end{aligned}$$

Ausgehend von der Gleichung

$$A^{-1}A = E$$

erhält man durch Transposition auf beiden Seiten

$$(A^{-1}A)^T = E^T = E.$$

Mit dem o.g. Gesetz für die Transponierte eines Matrix Produkts gilt

$$A^T(A^{-1})^T = E.$$

Folglich ist $(A^{-1})^T$ Inverse von A^T und somit

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Bei dem Gesetz $(AB)^T = B^T A^T$ kehrt sich die Reihenfolge der Faktoren um, wie dies auch bei $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ der Fall war. Dies ist auch schon aufgrund der Anzahl Zeilen und Spalten plausibel. Wenn z.B. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ist, dann ist AB definiert aber $A^T B^T$ nicht sondern nur $B^T A^T$.

Eine Matrix mit nur einer Spalte ist ein 1-Tupel von Vektoren und somit ein Vektor. Damit kann man Vektoren als Spezialfall von Matrizen mit einer Spalte betrachten. Die Vektor Addition und die skalare Multiplikation von n -stelligen Vektoren ist identisch mit der Matrix Addition und der skalaren Multiplikation von $n \times 1$ Matrizen.

Die Transponierte eines n -stelligen Vektors ist eine Matrix mit einer Zeile und n Spalten, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n).$$

Auch das Skalarprodukt von Vektoren kann durch Matrix Operationen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{Matrix Multiplikation} \\ &= \vec{x}^T \vec{y}. \end{aligned}$$

Treten also Vektoren und Matrizen gemeinsam in einem Term auf, ist es oft hilfreich wenn man alles als Matrizen interpretiert.

21.7 Orthogonale Matrizen

Definition 21.33 (Orthogonale Matrix)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal wenn die Spalten von A paarweise orthogonale und normierte Vektoren sind, d.h.

$$\begin{aligned} \|\vec{a}_i\| &= 1 && \text{für alle } i = 1, \dots, n \\ \vec{a}_i \circ \vec{a}_j &= 0 && \text{für alle } i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i \neq j. \end{aligned}$$

Orthogonale Matrizen haben viele nützliche Eigenschaften. So ist z.B. die Berechnung der Inversen, die ja i.a. etwas mühsam ist, bei orthogonalen Matrizen trivial.

Theorem 21.34

Sei A eine orthogonale Matrix. Dann ist A regulär und es gilt

$$A^{-1} = A^T.$$

Beweis. Sei A orthogonal. Zu zeigen ist, dass A^T die inverse Matrix von A ist, d.h.

$$A^T A = E.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (A^T A)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \\ &= \vec{a}_i \circ \vec{a}_j \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= E_{ij}. \end{aligned}$$

Die o.g. Aussage gilt auch umgekehrt.

Theorem 21.35

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$A^T A = E.$$

Dann ist A orthogonal.

Beweis. Wie im vorigen Beweis gezeigt, ist

$$(A^T A)_{ij} = \vec{a}_i \circ \vec{a}_j.$$

Laut Annahme gilt $A^T A = E$. Folglich ist

$$\vec{a}_i \circ \vec{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist $\vec{a}_i \circ \vec{a}_j = 0$ für $i \neq j$, d.h. die Spalten von A sind paarweise orthogonal. Da

$$\|\vec{a}_i\| = \sqrt{\vec{a}_i \circ \vec{a}_i} = 1$$

sind die Spalten von A normiert. Folglich ist A eine orthogonale Matrix.

Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.

Theorem 21.36

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale Matrizen. Dann ist auch AB eine orthogonale Matrix.

Beweis. Seien A, B orthogonale Matrizen, d.h.

$$A^T A = E, \quad B^T B = E.$$

Mit dem Assoziativgesetz der Matrix Multiplikation gilt

$$\begin{aligned} (AB)^T(AB) &= (B^T A^T)(AB) \\ &= B^T(A^T A)B \\ &= B^T E B \\ &= B^T B \\ &= E. \end{aligned}$$

Folglich ist auch AB eine orthogonale Matrix.

22 Vektorräume

22.1 Abgeschlossenheit

Definition 22.1 (Vektorraum)

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Vektorraum, wenn M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation, d.h. wenn für alle $\vec{u}, \vec{v} \in M$ und für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &\in M \\ c\vec{u} &\in M.\end{aligned}$$

In der Literatur werden Vektorräume viel allgemeiner definiert und die hier betrachteten Teilmengen von \mathbb{R}^m sind lediglich ein Spezialfall. Wenn man die Idee hinter Vektorräumen an diesem konkreten Beispiel verstanden hat, ist die Verallgemeinerung aber nicht mehr schwer.

Beispiel 22.2 Die Ursprungsgerade mit Richtungsvektor \vec{a} ist definiert durch

$$M = \{x\vec{a} \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente von M sind die skalaren Vielfachen von \vec{a} . Somit ist M ein Vektorraum.

- Abgeschlossenheit unter Addition.
Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M$. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{R}$ so dass

$$\vec{u} = x\vec{a}, \quad \vec{v} = y\vec{a}.$$

Folglich ist

$$\vec{u} + \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{a} = (x + y)\vec{a}$$

ebenfalls Element von M .

- Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation.
Sei $\vec{u} \in M$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so dass

$$\vec{u} = x\vec{a}.$$

Folglich ist

$$c\vec{u} = c(x\vec{a}) = (cx)\vec{a}$$

ebenfalls Element von M .

Im Spezialfall $\vec{a} = \vec{0}$ ist $M = \{\vec{0}\}$. Auch die Menge, die als einziges Element den Nullvektor enthält, ist ein Vektorraum.

Beispiel 22.3 Eine Ursprungsebene mit Richtungsvektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 hat die Struktur

$$M = \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

M ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 und ist ein Vektorraum.

- Abgeschlossenheit unter Addition.

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M$. Dann gibt es $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\vec{u} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2, \quad \vec{v} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \\ &= (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2\end{aligned}$$

ebenfalls Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 und somit Element von M .

- Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation.

Sei $\vec{u} \in M$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\vec{u} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2.$$

Folglich ist

$$c\vec{u} = c(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) = (cx_1)\vec{a}_1 + (cx_2)\vec{a}_2$$

Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 und somit Element von M .

Beispiel 22.4 Sei allgemein M die Menge aller Linearkombinationen von n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, d.h.

$$M = \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die Menge M ist ein Vektorraum. Tatsächlich kann *jeder* Vektorraum dargestellt werden als Menge aller Linearkombinationen einer bestimmten Anzahl von Vektoren. Man sagt, die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ spannen den Vektorraum auf. Vektorräume werden daher auch als lineare Räume oder Spannräume bezeichnet.

Um Schreibaufwand zu reduzieren, fassen wir die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ zu einer Matrix zusammen. Mit

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ist

$$M = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Abgeschlossenheit unter Addition.

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in M$. Dann gibt es $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\vec{u} = A\vec{x}, \quad \vec{v} = A\vec{y}.$$

Folglich ist

$$\vec{u} + \vec{v} = A\vec{x} + A\vec{y} = A(\vec{x} + \vec{y})$$

ebenfalls Element von M .

- Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation.

Sei $\vec{u} \in M$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\vec{u} = A\vec{x}.$$

Folglich ist

$$c\vec{u} = c(A\vec{x}) = A(c\vec{x})$$

ebenfalls Element von M .

Definition 22.5 (Lineare Hülle, Spannraum)

Seien $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Die lineare Hülle oder der Spannraum von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist definiert als Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

$$\begin{aligned} L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) &= \{x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Wie in Beispiel 22.4 gezeigt, ist $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ein Vektorraum.

22.2 Lineare Unabhängigkeit

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ die Menge

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation und somit ein Vektorraum ist.

Die Frage ist nun, ob sich dieser Vektorraum verkleinert, wenn man einen dieser Vektoren, z.B. den ℓ -ten weglässt, d.h.

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) \stackrel{?}{=} L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n).$$

Der Vektor \vec{a}_ℓ wäre dann bei der Erzeugung des Vektorraums überflüssig und könnte durch die anderen ersetzt werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn \vec{a}_ℓ Linearkombination der anderen Vektoren ist.

Beispiel 22.6

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Beispiel 22.7 Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

da $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ Linearkombination von \vec{a}_1, \vec{a}_2 ist. Weiterhin ist auch

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_3)$$

Da $\vec{a}_2 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_3$ Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_3 ist.

Theorem 22.8

Wenn \vec{a}_ℓ Linearkombination der Vektoren \vec{a}_i , $i = 1, \dots, n$, $i \neq \ell$ ist, dann ist

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n).$$

Beweis. Angenommen \vec{a}_ℓ ist Linearkombination der anderen, d.h.

$$\vec{a}_\ell = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n y_i \vec{a}_i \quad \text{für bestimmte } y_i.$$

Zu zeigen ist, dass

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n).$$

Zwei Mengen sind laut Definition gleich, wenn jeweils die eine Teilmenge der anderen ist, d.h.

$$\begin{aligned} L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) &\supseteq L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) \\ L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) &\subseteq L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n). \end{aligned}$$

Die erste Teilmengenbeziehung ist trivial — ohne \vec{a}_ℓ kann man sicher nicht mehr Linearkombinationen erzeugen als mit \vec{a}_ℓ .

Sei also \vec{b} ein beliebiger Vektor aus $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n)$, d.h.

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \quad \text{für bestimmte } x_i.$$

Zu zeigen ist, dass \vec{b} auch Element von $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n)$ ist. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n x_i \vec{a}_i + x_\ell \vec{a}_\ell \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n x_i \vec{a}_i + x_\ell \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n y_i \vec{a}_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n (x_i \vec{a}_i + x_\ell y_i \vec{a}_i) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n (x_i + x_\ell y_i) \vec{a}_i. \end{aligned}$$

Damit ist \vec{b} Linearkombination von \vec{a}_i mit $i \neq \ell$ und somit

$$\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n). \quad \square$$

Die Umkehrung von Theorem 22.8 gilt natürlich auch. Angenommen

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n).$$

Da

$$\vec{a}_\ell \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n)$$

folgt dass

$$\vec{a}_\ell \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n)$$

und somit ist \vec{a}_ℓ Linearkombination der anderen \vec{a}_i , $i \neq \ell$.

Wenn ein Tupel $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ in dem Sinne minimal ist, dass keiner der Vektoren verzichtbar ist bei der Erzeugung des Vektorraums, heißt es linear unabhängig. Dies ist genau dann der Fall, wenn keiner der Vektoren Linearkombination der anderen ist.

Definition 22.9 (Lineare Unabhängigkeit)

Ein Tupel $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ heißt linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren \vec{a}_ℓ Linearkombination der anderen \vec{a}_i , $i \neq \ell$ ist.

Falls ein \vec{a}_ℓ Linearkombination der anderen \vec{a}_i , $i \neq \ell$ ist, heißt es linear abhängig.

Hat man nur zwei Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 bedeutet lineare Unabhängigkeit, dass die Vektoren nicht kollinear sind. Diese Forderung wurde bei Ursprungsebenen aufgestellt. Kollinearität ist somit ein Spezialfall des allgemeineren Konzepts lineare Unabhängigkeit.

Wie oben gezeigt, sind linear unabhängige Vektoren im Hinblick auf die Erzeugung eines Vektorraums minimal.

Theorem 22.10

$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear unabhängig genau dann wenn für alle ℓ gilt

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) \neq L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n).$$

Wir haben damit bereits zwei äquivalente Bedingungen für lineare Unabhängigkeit. Tatsächlich zeigt sich lineare Unabhängigkeit noch in weiteren Situationen.

Der Nullvektor kann immer auf triviale Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden wenn alle Gewichte Null gewählt werden, d.h.

$$\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \dots + 0\vec{a}_n.$$

Die Frage ist, ob man den Nullvektor auch mit anderen Gewichten erzeugen kann.

Theorem 22.11

($\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$) ist linear abhängig genau dann wenn der Nullvektor auf nichttriviale Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann, d.h. wenn es Gewichte x_1, \dots, x_n gibt so dass

$$\vec{0} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

wobei für mindestens ein ℓ gilt $x_\ell \neq 0$.

Beweis.

- Annahme $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear abhängig. Dann existiert ein ℓ so dass

$$\vec{a}_\ell = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n y_i \vec{a}_i \quad \text{für bestimmte } y_i.$$

Folglich ist

$$\vec{a}_\ell - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n y_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

- Annahme es existiert eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors, d.h.

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \quad \text{für bestimmte } x_i$$

und $x_\ell \neq 0$. Dann ist

$$\vec{a}_\ell = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \frac{x_i}{x_\ell} \vec{a}_i$$

eine Linearkombination der anderen \vec{a}_i , $i \neq \ell$ und somit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ linear abhängig.

Abschließend noch ein weiteres, äquivalentes Kriterium für lineare Unabhängigkeit. Die Vektoren $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ sind linear unabhängig, genau dann wenn sich jeder Vektor $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ auf genau eine Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ darstellen lässt. Das heißt, es gibt genau einen Satz von Gewichten x_1, \dots, x_n so dass

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

Diese Eindeutigkeit der Darstellung der Elemente eines Vektorraums ist es, die die lineare Unabhängigkeit zu so einem wichtigen Konzept macht.

Theorem 22.12

$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear abhängig, wenn es einen Vektor in $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, gibt der auf mehr als eine Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann, d.h. wenn es Gewichte x_i, y_i gibt so dass

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = y_1 \vec{a}_1 + \dots + y_n \vec{a}_n$$

wobei für mindestens ein ℓ gilt $x_\ell \neq y_\ell$.

Beweis.

- Angenommen $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear abhängig. Laut Theorem 22.11 gibt es dann eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors, d.h.

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

wobei für mindestens ein ℓ gilt $x_\ell \neq 0$. Andererseits kann der Nullvektor aber auch trivial dargestellt werden durch

$$0 \vec{a}_1 + \dots + 0 \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Somit hat man zwei verschiedene Darstellungen für einen Vektor aus $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

- Angenommen ein Vektor aus $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kann auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden, d.h.

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = y_1 \vec{a}_1 + \dots + y_n \vec{a}_n$$

mit $x_\ell \neq y_\ell$ für ein ℓ . Dann ist

$$(x_1 - y_1) \vec{a}_1 + \dots + (x_\ell - y_\ell) \vec{a}_\ell + \dots + (x_n - y_n) \vec{a}_n = \vec{0}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors und somit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ linear abhängig.

Zusammenfassung der Kriterien für lineare Unabhängigkeit.

Folgende Kriterien sind äquivalent.

- $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear unabhängig.
- Kein Vektor ist redundant bei der Erzeugung des Vektorraums, d.h.

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) \neq L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell, \dots, \vec{a}_n) \quad \text{für alle } \ell.$$

- Der Nullvektor lässt sich nur auf triviale Weise erzeugen, d.h.

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

gilt nur wenn alle Gewichte x_i Null sind.

- Jedes Element des Vektorraums $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kann auf genau eine Weise als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ dargestellt werden.

Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen.

Die Theorie der linearen Unabhängigkeit hängt direkt mit der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen zusammen.

- Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar wenn es x_1, \dots, x_n gibt so dass

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

bzw.

$$\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

- Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, dann hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ höchstens eine Lösung.
- Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ genau dann wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.
- Wenn A mehr Spalten als Zeilen hat, entstehen bei der Transformation auf Zeilenstufenform mit dem Gauß Algorithmus Null-Zeilen. In diesem Fall hat das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen. Gemäß vorigem Punkt sind die Spalten von A dann linear abhängig. Hieraus folgt das wichtige Resultat, dass jedes Tupel mit mehr als m Vektoren im \mathbb{R}^m immer linear abhängig ist.

Theorem 22.13

Sei $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ und $n > m$. Dann ist $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ linear abhängig.

Anschaulich ist dies leicht zu sehen. Hat man 3 Pfeile in der Ebene, kann man immer einen davon durch die anderen beiden erzeugen, indem man diese geeignet streckt und hintereinander setzt.

22.3 Basis und Dimension von Vektorräumen

Definition 22.14 (Basis)

Sei M ein Vektorraum. Ein Tupel $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ heißt Basis von M wenn

- $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ linear unabhängig ist und
- $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = M$.

Ist $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ eine Basis von M , lässt sich nach Theorem 22.12 jeder Vektor $\vec{b} \in M$ auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ darstellen:

Zu jedem $\vec{b} \in M$
 existiert genau ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass
 $A\vec{x} = \vec{b}$.

Beispiel 22.15 Die Menge \mathbb{R}^n ist ein Vektorraum. Die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich sehr einfach als Linearkombination von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ darstellen durch

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Damit ist

$$L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \mathbb{R}^n$$

und somit ist $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^n . Da diese Basis so naheliegend ist, heißen $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ kanonische Basisvektoren.

Die nächsten beiden Theoreme sind eher technischer Natur und helfen, die wirklich relevanten Aussagen über Basen zu formulieren.

Theorem 22.16 (Basisergänzungssatz)

Sei M ein Vektorraum. Sei $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ linear unabhängig und

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = M.$$

Dann kann man $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ durch eventuelle Hinzunahme von Vektoren aus $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ zu einer Basis von M ergänzen.

Beweis. Wenn

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = M$$

ist, hat man bereits eine Basis und muss keinen Vektor aus $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ dazunehmen.

Ansonsten gibt es mindestens einen Vektor \vec{b}_i , der nicht Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ist. Nimmt man diesen dazu, ist

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_i)$$

immer noch linear unabhängig. Diesen Prozess wiederholt man so lang bis man eine Basis von M hat. Dies ist nach spätestens m Schritten der Fall, da laut Annahme

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$$

eine Basis ist.

Theorem 22.17 (Austauschlemma)

Seien $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ und $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ zwei Basen von M . Dann existiert zu jedem \vec{a}_i ein \vec{b}_j so dass

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j)$$

wieder eine Basis von M ist. Man kann also \vec{a}_i durch \vec{b}_j austauschen.

Beweis. Sei \vec{a}_i ein beliebiger Vektor aus $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Lässt man diesen weg, sind die verbleibenden Vektoren zwar immer noch linear unabhängig, bilden aber keine Basis von M mehr. Folglich existiert ein Vektor \vec{b}_j mit

$$\vec{b}_j \notin L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n).$$

Damit ist

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j)$$

linear unabhängig. Um zu sehen, dass dies auch eine Basis von M ist, wird der Basisergänzungssatz angewandt. Würde man \vec{a}_i wieder dazunehmen, könnte man M erzeugen, d.h.

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j, \vec{a}_i) = M.$$

Da diese Vektoren jedoch linear abhängig sind, handelt es sich nicht um eine Basis. Folglich muss bereits

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j)$$

eine Basis gewesen sein.

Hieraus folgt das wichtige Resultat, dass jede Basis von M aus gleich vielen Vektoren besteht.

Theorem 22.18

Sind $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ und $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ zwei Basen von M , muss $n = m$ sein.

Beweis. Aufgrund des Austauschlemmas kann man jeden Vektor aus $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ durch einen Vektor aus $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ austauschen. Wenn $n > m$ ist, hätte man danach ein Tupel, in dem mindestens zwei gleiche Vektoren aus B auftreten. Dieses Tupel ist dann aber linear abhängig und folglich keine Basis, was ein Widerspruch zum Austauschlemma wäre.

Da jede Basis von M aus gleich vielen Vektoren besteht, kann man die Dimension von M als Anzahl dieser Vektoren definieren.

Definition 22.19 (Dimension)

Die Dimension eines Vektorraums M ist die Anzahl von Vektoren, aus denen jede Basis von M besteht.

Beispiel 22.20 Eine Ursprungsgerade ist ein Vektorraum, der von einem Richtungsvektor aufgespannt wird. Ursprungsgeraden sind somit eindimensionale Teilmengen des \mathbb{R}^n . Die Dimension eines Vektorraums hat somit nichts damit zu tun wie viel stellig seine Elemente sind.

Beispiel 22.21 Eine Ursprungsebene ist ein Vektorraum, der von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Ursprungsebenen sind somit zweidimensionale Teilmengen des \mathbb{R}^3 .

Beispiel 22.22 Die kanonischen Basisvektoren

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

bilden eine Basis des \mathbb{R}^n . Damit ist der \mathbb{R}^n ein n -dimensionaler Vektorraum.

Ein Vektorraum hat viele unterschiedliche Basen. Jedes n -Tupel von linear unabhängigen Vektoren in einem n -dimensionalen Vektorraum M bildet eine Basis von M .

Theorem 22.23

Sei M ein n -dimensionaler Vektorraum. Seien $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in M$ linear unabhängig. Dann ist $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ eine Basis von M .

Beweis. Da M ein n -dimensionaler Vektorraum ist, existiert eine Basis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von M . Aufgrund des Basisergänzungssatzes kann $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ durch geeignete Hinzunahme von Vektoren aus B zu einer Basis von M ergänzt werden. Dann hätte man aber eine Basis von M mit mehr als n Vektoren im Widerspruch zu Theorem 22.18. Folglich muss bereits $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ eine Basis von M gewesen sein.

Theorem 22.24

Jedes Tupel von mehr als n Vektoren in einem n -dimensionalen Vektorraum ist linear abhängig.

Beweis. Hätte man mehr als n linear unabhängige Vektoren in einem n -dimensionalen Vektorraum M , könnten diese durch Hinzunahme von weiteren Vektoren aus M zu einer Basis von M ergänzt werden. Dann hätte man aber eine Basis mit mehr als n Vektoren, was im Widerspruch zu Theorem 22.18 steht.

Wie bereits mit Hilfe des Gauß Algorithmus gezeigt, sind mehr als n Vektoren im \mathbb{R}^n folglich immer linear abhängig.

Zusammenhang mit Matrizen

Wenn die n Spalten einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis des \mathbb{R}^n . In diesem Fall hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ immer genau eine Lösung. Folglich hat auch die Gleichung $AX = E$ genau eine Lösung und A ist regulär.

Dies gilt auch umgekehrt. Wenn A regulär ist, hat $AX = E$ eine Lösung X und es gilt $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$. Jeder kanonische Basisvektor von \mathbb{R}^n ist somit Linearkombination der Spalten von A . Damit ist $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^n$. Weiterhin müssen dann $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sein, da sie sonst zu einer Basis von \mathbb{R}^n mit mehr als n Vektoren ergänzt werden könnten.

Theorem 22.25

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist regulär genau dann wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.

Da A regulär ist genau dann wenn A^T regulär ist, sind bei einer quadratischen Matrix A die Spalten genau dann linear unabhängig wenn die Zeilen linear unabhängig sind.

Folgende Aussagen sind für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ somit äquivalent.

- A ist regulär.
- A ist invertierbar.
- Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
- Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung.

23 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind Funktionen von Vektoren mit speziellen Eigenschaften. Diese Eigenschaften sind nichts anderes als Rechengesetze, mit denen sich viele Dinge enorm vereinfachen lassen. Aus diesem Grund spielen lineare Funktionen in den Anwendungen eine wichtige Rolle und in vielen Situationen wird man allgemeine Funktionen durch lineare Funktionen approximieren. Man nennt diesen Prozess auch Linearisierung.

Besonders wichtig ist der 1:1 Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und Matrizen. Jede lineare Funktion kann durch eine Matrix beschrieben werden. Die Auswertung einer linearen Funktion entspricht einer Matrix Vektor Multiplikation, die Komposition von linearen Funktionen der Matrix Multiplikation und die Umkehrfunktion der Matrix Inversion.

Matrix Operationen können massiv parallelisiert werden. Man findet lineare Funktionen daher auch in Anwendungen, wo Rechenleistung kritisch ist wie z.B. Computer Grafik und Neuronalen Netzen.

23.1 Definition einer linearen Funktion

Definition 23.1 (Lineare Funktion)

Eine Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst linear wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$

Linearität erlaubt das Vertauschen der Reihenfolge von Rechenoperationen:

- Ob man zuerst \vec{x} und \vec{y} addiert und dann f auf die Summe anwendet oder zuerst f auf \vec{x} und \vec{y} separat anwendet und dann addiert, ist egal.
- Ob man zuerst \vec{x} mit der Konstanten u skaliert und dann f anwendet oder zuerst f auf \vec{x} anwendet und dann mit u skaliert, ist egal.

Lineare Funktionen erlauben daher Umformungen, die im allgemeinen nicht zulässig sind. Glücklicherweise sind viele Funktionen, die in der Praxis auftreten, linear und folglich besonders einfach zu handhaben.

Die beiden Linearitätseigenschaften lassen sich durch kommutative Diagramme darstellen.

$$\begin{array}{ccc} \vec{x}, \vec{y} & \xrightarrow{\quad + \quad} & \vec{x} + \vec{y} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ f(\vec{x}), f(\vec{y}) & \xrightarrow{\quad + \quad} & f(\vec{x} + \vec{y}) \\ & & = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{\quad \cdot u \quad} & u\vec{x} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ f(\vec{x}) & \xrightarrow{\quad \cdot u \quad} & f(u\vec{x}) \\ & & = uf(\vec{x}) \end{array}$$

23.2 Beispiele zu linearen Funktionen

Spezialfall lineare Funktionen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Schauen wir uns ein paar Beispiele für lineare Funktionen an und beginnen mit dem einfachsten Fall $n = m = 1$, d.h. $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 23.2

Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

erfüllt keine der beiden Linearitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &\neq \sin(x) + \sin(y) \\ \sin(ux) &\neq u \sin(x). \end{aligned}$$

Beispiel 23.3 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x$$

ist linear. Es gilt

$$\begin{aligned} 3(x+y) &= 3x + 3y \\ 3(ux) &= u(3x). \end{aligned}$$

Beispiel 23.4 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 1$$

ist (überraschenderweise) *nicht* linear, obwohl ihr Schaubild eine Gerade ist. Tatsächlich gibt es hier in der Literatur große Verwirrung. Wir halten uns aber strikt an o.g. Definition und stellen fest, dass keine der Linearitätsbedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 3(x+y) + 1 = 3x + 3y + 1 \\ f(x) + f(y) &= 3x + 1 + 3y + 1 = 3x + 3y + 2 \\ f(ux) &= 3ux + 1 \\ uf(x) &= u(3x + 1) = 3ux + u. \end{aligned}$$

Tatsächlich haben *alle* linearen Funktionen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Form

$$f(x) = ax$$

für eine Konstante a .

Spezialfall lineare Funktionen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Betrachten wir nun Funktionen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 23.5 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$$

ist linear. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ f(u\vec{x}) &= f \begin{pmatrix} ux_1 \\ ux_2 \end{pmatrix} \\ &= ux_1 + ux_2 \\ uf(\vec{x}) &= u(x_1 + x_2) \\ &= ux_1 + ux_2 \end{aligned}$$

Beispiel 23.6 Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2$$

ist nicht linear. Beide Linearitätsbedingungen sind nicht erfüllt.

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ f(u\vec{x}) &= ux_1 ux_2 \\ &= u^2 x_1 x_2 \\ uf(\vec{x}) &= ux_1 x_2. \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall lineare Funktionen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Abschließend Beispiele für den allgemeinen Fall wenn n und m größer als Eins sind.

Beispiel 23.7 Sei

$$f \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Die Funktion ist linear.

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3) \\ (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \end{pmatrix} \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y_1 - y_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x_1 + 5y_1 - x_3 - y_3 \\ x_2 + y_2 + y_2 + y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 23.8 Sei

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Die Funktion ist nicht linear. Wiederum ist keine der beiden Linearitätsbedingungen erfüllt.

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= \begin{pmatrix} 7 \\ x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 - x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= \begin{pmatrix} 14 \\ x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 - x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\ f(u\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 7 \\ ux_1 \\ ux_3 - ux_2 \end{pmatrix} \\ uf(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 7u \\ ux_1 \\ ux_3 - ux_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es lag sozusagen nur an der ersten Komponente.

23.3 Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und Matrizen

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es einen 1:1 Zusammenhang zwischen linearen Funktionen und Matrizen gibt.

- Für jede Matrix A ist die Funktion $f(x) = A\vec{x}$ linear.
- Zu jeder linearen Funktion f gibt es eine Matrix A so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle \vec{x} .

Es ist somit egal, ob man mit linearen Funktionen oder Matrizen hantiert: Man kann immer das eine durch das andere äquivalent ersetzen. In den Anwendungen treten meistens lineare Funktionen auf, das Arbeiten mit Matrizen ist aber einfacher.

Zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 23.9 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung ist, dass dann die Funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ linear ist. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist genau die Funktion aus dem Beispiel auf Seite 263, von der gezeigt wurde, dass sie linear ist.

Beispiel 23.10 Wir wissen, dass die Funktion

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

linear ist und wollen nun die zugehörige Matrix A konstruieren, so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle \vec{x} . Umformen ergibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Trick besteht darin, den Funktionsterm zunächst in die Form einer Linearkombination von konstanten Vektoren umzuformen, wobei die Gewichte die Variablen sind. Da jede Linearkombination durch eine Matrix Vektor Multiplikation beschrieben werden kann, ist man fertig.

Die beiden o.g. Zusammenhänge werden durch die folgenden beiden Theoreme formuliert und bewiesen.

Theorem 23.11

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

linear.

Beachten Sie, dass sich die Reihenfolge der Indizes n, m umdreht:

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zu zeigen ist, dass die Funktion

$$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

linear ist, d.h. die beiden Linearitätsbedingungen aus Definition 23.1 erfüllt. Diese folgen direkt aus den Rechengesetzen für Matrizen.

- Erste Linearitätsbedingung.

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= A(\vec{x} + \vec{y}) \\ &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

- Zweite Linearitätsbedingung.

$$\begin{aligned} f(u\vec{x}) &= A(u\vec{x}) \\ &= u(A\vec{x}) \\ &= uf(\vec{x}). \end{aligned}$$

Theorem 23.12

Zu jeder linearen Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle \vec{x} .

Man nennt die Matrix A auch Matrix Darstellung von f oder die zu f gehörende Matrix.

Beweis. Wie bereits oben angedeutet, läuft die Sache auf Linearkombinationen raus. Zunächst kann man jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination der kanonischen Basisvektoren darstellen:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_n} \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion, d.h. man kann die beiden Linearitätseigenschaften aus Definition 23.1 beim Umformen anwenden.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1 \vec{e}_1) + f(x_2 \vec{e}_2) + \dots + f(x_n \vec{e}_n) \\ &= f(x_1 \vec{e}_1) + f(x_2 \vec{e}_2) + \dots + f(x_n \vec{e}_n) && \text{1. Linearitätseigenschaft} \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) && \text{2. Linearitätseigenschaft} \\ &= \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Linearkombination durch ein Matrix Vektor Multiplikation dargestellt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Der Beweis zeigt somit nicht nur, dass man zu jeder linearen Funktion eine Matrix findet, sondern auch, wie man diese sehr einfach konstruieren kann: Man

muss lediglich die Funktionswerte der kanonischen Basisvektoren berechnen und diese spaltenweise zu einer Matrix zusammenfassen.

Beispiel 23.13 Kehren wir zum Beispiel 23.10 zurück. Die Funktion

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

ist linear. Die Bilder der kanonischen Basisvektoren sind

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die zugehörige Matrix

$$\begin{aligned} A &= \left(f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es gilt wie erwartet

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

für alle \vec{x} .

Die letzten beiden Theorem stellen die 1:1 Beziehung zwischen linearen Funktionen und Matrizen her und werden nochmal wie folgt zusammengefasst.

Theorem 23.14

Matrizen und lineare Funktionen sind äquivalent.

- Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert genau eine lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.
- Zu jeder linearen Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

23.4 Abschlusseigenschaften linearer Funktionen

Aufgrund des 1:1 Zusammenhangs zwischen linearen Funktionen und Matrizen gibt es zu jeder Operation auf Matrizen die entsprechende Operation auf linearen Funktionen:

- Die Matrix Vektor Multiplikation entspricht der Funktionsauswertung. Ist A die zu f gehörige Matrix, dann ist

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

- Die Addition von Matrizen entspricht der Addition ihrer zugehörigen linearen Funktion. Ist A die zu f und B die zu g gehörige Matrix, dann ist

$$(f + g)(\vec{x}) = (A + B)\vec{x}.$$

- Die skalare Multiplikation von Matrizen entspricht der skalaren Multiplikation ihrer zugehörigen linearen Funktion. Ist A die zu f gehörige Matrix und $u \in \mathbb{R}$, dann ist

$$(uf)(\vec{x}) = (uA)\vec{x}.$$

- Die Multiplikation von Matrizen entspricht der Komposition ihrer zugehörigen linearen Funktionen. Ist A die zu f und B die zu g gehörige Matrix, dann ist AB die zu $f \circ g$ gehörige Matrix, d.h.

$$(f \circ g)(\vec{x}) = (AB)\vec{x}.$$

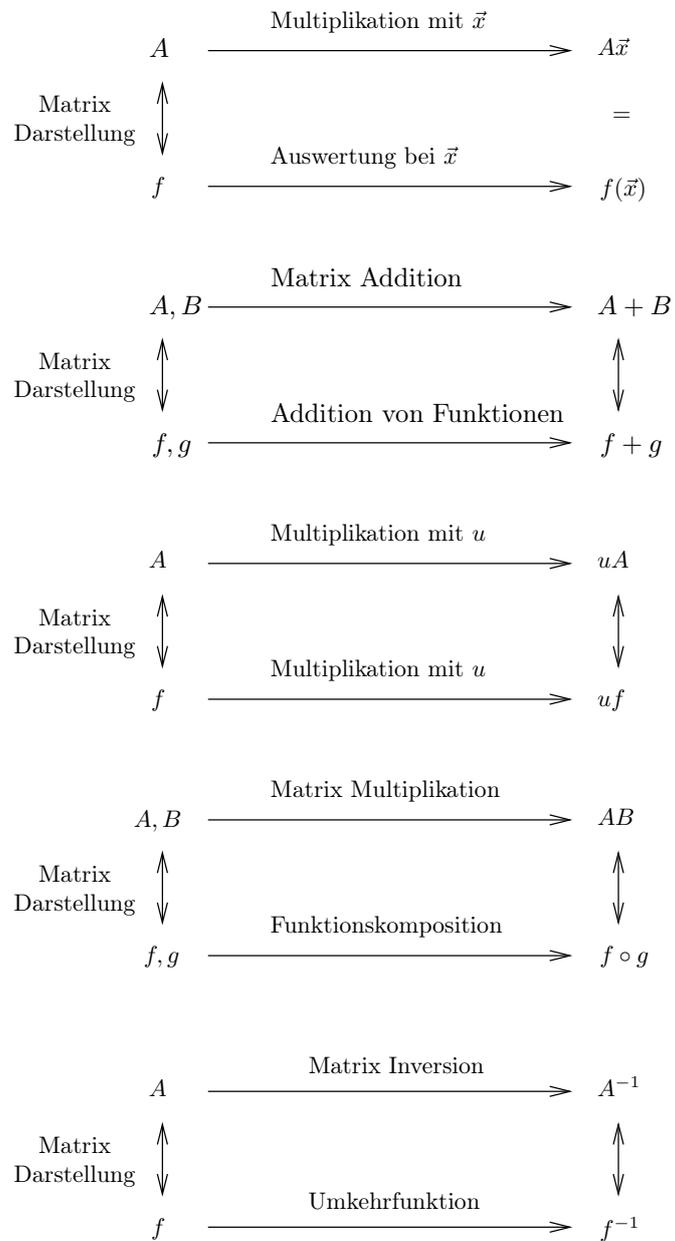
- Die Inversion einer regulären Matrix entspricht der Umkehrung ihrer zugehörigen linearen Funktion. Ist A die zu f gehörige Matrix, dann ist A^{-1} die zu f^{-1} gehörige Matrix, d.h.

$$f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}.$$

Somit ist eine Matrix A regulär genau dann wenn die zugehörige Funktion f bijektiv ist.

Hieraus folgen Abschlusseigenschaften für lineare Funktionen:

- Sind f, g lineare Funktionen, dann ist auch $f + g$ eine lineare Funktion.
- Ist f eine lineare Funktion und $u \in \mathbb{R}$, dann ist auch uf eine lineare Funktion.
- Sind f, g lineare Funktionen, dann auch $f \circ g$.
- Ist f eine bijektive, lineare Funktion, dann auch f^{-1} .



Nachfolgend werden diese Aussagen in Theoremen formuliert und bewiesen.

Theorem 23.15

Seien $f, g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Funktionen mit zugehörigen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist auch

$$f + g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h.

$$(f + g)(\vec{x}) = (A + B)\vec{x}.$$

Beweis. Mit den Gesetzen der Matrixrechnung gilt

$$\begin{aligned} (f + g)(\vec{x}) &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \\ &= A\vec{x} + B\vec{x} \\ &= (A + B)\vec{x}. \end{aligned}$$

Da die Funktion $f + g$ durch eine Matrix $A + B$ dargestellt werden kann, ist sie nach Theorem 23.11 linear.

Theorem 23.16

Sei $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $u \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$uf \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (uf)(\vec{x}) = u f(\vec{x})$$

eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $uA \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h.

$$(uf)(\vec{x}) = (uA)\vec{x}.$$

Beweis. Mit den Gesetzen der Matrixrechnung gilt

$$\begin{aligned} (uf)(\vec{x}) &= u f(\vec{x}) \\ &= u A\vec{x} \\ &= (uA)\vec{x}. \end{aligned}$$

Da die Funktion uf durch eine Matrix uA dargestellt werden kann, ist sie nach Theorem 23.11 linear.

Theorem 23.17

Seien

$$f \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

lineare Funktionen mit zugehörigen Matrizen

$$A \in \mathbb{R}^{m \times k}, \quad B \in \mathbb{R}^{k \times n},$$

d.h.

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad g(\vec{x}) = B\vec{x}.$$

Dann ist auch $f \circ g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion und die zugehörige Matrix ist $AB \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, d.h.

$$(f \circ g)(\vec{x}) = (AB)\vec{x}.$$

Beweis. Umformen und das Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation ergibt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\vec{x}) &= f(g(\vec{x})) \\ &= f(B\vec{x}) \\ &= A(B\vec{x}) \\ &= (AB)\vec{x}. \end{aligned}$$

Da die Funktion $f \circ g$ durch eine Matrix AB dargestellt werden kann, ist sie nach Theorem 23.11 linear.

Die Multiplikation von Matrizen entspricht somit der Komposition von linearen Funktionen.

Damit eine Funktion invertierbar ist, muss sie bijektiv sein. Was bedeutet das für den Spezialfall linearer Funktionen? Sei $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Spalten von A seien

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m,$$

d.h. $f(\vec{x})$ ist eine Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ mit Gewichten x_1, \dots, x_n

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

- f ist injektiv genau dann wenn $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind. Da es maximal m linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^m gibt, kann f nicht injektiv sein falls $n > m$.
- f ist surjektiv genau dann wenn $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$. Da man mindestens m Vektoren braucht um den \mathbb{R}^m aufzuspinnen, kann f nicht surjektiv sein falls $n < m$.
- Folglich kann f nicht bijektiv sein falls $n \neq m$.

Bijektive lineare Funktionen kann es folglich nur in $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ geben.

Theorem 23.18

Sei $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Funktion. Dann ist die zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär.

Beweis. Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ genau ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{bzw.} \quad A\vec{x} = \vec{y}.$$

Das LGS $A\vec{x} = \vec{y}$ ist somit für jede rechte Seite $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar und damit muss A regulär sein.

Theorem 23.19

Sei $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist auch f^{-1} eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix A^{-1} .

Beweis. Sei

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \text{bzw.} \quad f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}.$$

Da A Matrix von f ist, gilt

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{y}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(\vec{y}) &= \vec{x} \\ &= A^{-1}\vec{y}. \end{aligned}$$

Da die Funktion f^{-1} durch eine Matrix A^{-1} dargestellt werden kann, ist sie nach Theorem 23.11 linear.

Die Inversion von Matrizen entspricht somit der Umkehrung von linearen Funktionen.

Index

- A^{-1} , 232
- \mathbb{N} , 17
- \mathbb{Q} , 17
- \mathbb{R} , 17
- \mathbb{R}^n , 180
- $\mathbb{R}^{m \times n}$, 220
- \mathbb{Z} , 17
- \rightarrow , 11
- \emptyset , 16
- \exists , 22
- \forall , 18
- \leftrightarrow , 11
- \neg , 11
- \vee , 11
- \subset , 21
- \subseteq , 18
- \supset , 21
- \supseteq , 21
- \times , 30
- \wedge , 11
- $df(x)$, 84
- dx , 83
- j , 141
- n -faches kartesisches Produkt, 32
- n -stelliger Vektor, 180
- n -te Ableitung, 94
- \vec{x} , 180

- Ableitung, 76
- Ableitungsfunktion, 77
- Allquantor, 18
- Aussagenlogik, 11
- Aussagenlogische Funktionen, 11

- Basis, 253
- Baum, 8
- bestimmt divergente Folge, 55
- bestimmtes Integral, 118
- Beweis, 5

- de Morgan, 13
- Definition, 5
- Differentialquotient, 84
- Differentialrechnung, 76
- Differenzenquotient, 77
- Differenzierbarkeit, 77
- Dimension, 256

- doppelte Nullstelle, 165

- echte Teilmenge, 21
- Element, 15
- Existenzquantor, 22

- Faktorisierung, 171
- Folge, 54
- führender Koeffizient, 99
- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 118
- Funktion, 35
- Funktionssymbol, 7

- ganze Zahl, 17
- genau dann wenn, 11
- Graph, 38
- Grenzwert einer Folge, 58
- Grenzwert einer Funktion, 65

- Hauptwert, 161
- Hilfssymbol, 7
- höhere Ableitung, 94
- Hornerschema, 168

- Imaginärteil, 143
- Infixnotation, 9
- Integralfunktion, 119
- Integrierbarkeit, 118
- irrationale Zahl, 17

- kanonische Basisvektoren, 253
- Kardinalität, 16
- kartesische Koordinaten, 143
- kartesisches Produkt, 30
- kollinear, 202
- kommutatives Diagramm, 30
- Komplexe Zahl, 141
- komplexer Logarithmus, 163
- Komponenten, 180
- Konstantensymbol, 7
- Konstanter Faktor Regel, 129
- konvergente Folge, 55, 58

- leere Menge, 16
- LGS, 209
- lineare Hülle, 245
- lineare Unabhängigkeit, 248

-
- linearer Raum, 245
 - lineares Gleichungssystem, 209
 - Linearisierung, 96
 - Linearkombination, 202, 211

 - Mächtigkeit, 16
 - Matrix, 220
 - Matrix Darstellung, 267
 - Menge, 15
 - Mengengleichheit, 21
 - Morphismus, 31

 - natürliche Zahl, 17
 - Nebenwerte, 164
 - nicht, 11
 - Nullfolge, 57

 - Obermenge, 21
 - oder, 11
 - orthogonale Matrix, 241
 - Ortsvektor, 181

 - partielle Integration, 131
 - Polynomdivision, 172
 - Primzahl, 22
 - Produktregel, 131
 - Punkt, 181

 - Quadrupel, 29

 - rationale Zahl, 17
 - Realteil, 143
 - reelle Zahl, 17
 - Relationssymbol, 7
 - Restglied nach Lagrange, 104
 - Richtungsvektor, 199

 - Schnittmenge, 24
 - Sekante, 76
 - Skalar, 180
 - Skalarprodukt, 191
 - Spannraum, 202, 245
 - Stammfunktion, 108
 - Stetigkeit, 73
 - Summenregel, 127
 - Syntax, 10

 - Tangente, 76
 - Teilmenge, 18
 - Teilterm, 9
 - Term, 7

 - Theorem, 5
 - Tripel, 29
 - Tupel, 29

 - Umkehrrelation, 34
 - unbestimmt divergente Folge, 55
 - und, 11
 - uneigentlicher Grenzwert, 71
 - uneigentliches Integral, 125

 - Variablensymbol, 7
 - Vektor, 180
 - Vektorraum, 243
 - Vereinigungsmenge, 24

 - Wahrheitswerte, 11
 - wenn-dann, 11

 - Zeilenstufenform, 212
 - zweite Ableitung, 94