Mathematik 1
Zusatzaufgaben

(Stand: 6. Dezember 2021)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1 Terme

Aufgabe 1. Die Gleichung

$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 + 2ab + b^2$$

gilt für alle a, b. Ersetzen Sie nun in den Termen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens a durch x und b durch $\sin(x)$. Gilt die entstehende Gleichung für alle x?

Lösung von Aufgabe 1. Es entsteht die Gleichung

$$(x+\sin(x))^2 \quad = \quad x^2 + 2x\sin(x) + \sin(x)^2.$$

Die Gleichung gilt für alle x.

Aufgabe 2. Nennen Sie alle Teilterme des Terms

$$\sqrt{e^{x-1}} + 2$$

Lösung von Aufgabe 2.

$$1,\ 2,\ x,\ x-1,\ e^{x-1},\ \sqrt{e^{x-1}},\ \sqrt{e^{x-1}}+2.$$

2 Logik

Aufgabe 3. Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstabelle die de Morganschen Gesetze:

$$\begin{aligned} \neg(F \vee G) &= (\neg F) \wedge (\neg G) \\ \neg(F \wedge G) &= (\neg F) \vee (\neg G). \end{aligned}$$

Zeigen Sie weiterhin, dass

$$F \to G = (\neg F) \vee G.$$

Zeigen Sie unter Anwendung dieser Gesetze, dass

$$F \to G = (\neg G) \to (\neg F).$$

Lösung von Aufgabe 3. Das erste de Moransche Gesetz zeigt man wie folgt:

F	G	$\neg(F \vee G)$	$(\neg F) \wedge (\neg G)$
w	w	f	f
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Die anderen Gesetze zeigt man analog. Damit gilt

$$\begin{aligned} (\neg G) \to (\neg F) &= \neg(\neg G) \vee (\neg F) \\ &= G \vee (\neg F) \\ &= (\neg F) \vee G \\ &= F \to G. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Das Symbol $\forall x$ liest sich "für alle x gilt". Entscheiden Sie von den folgenden beiden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{gathered} \forall x\ x \in \emptyset \to x \notin \emptyset \\ \forall x\ x \notin \emptyset \to x \in \emptyset \end{gathered}$$

Lösung von Aufgabe 4. Die Aussage

$$\forall x\ x \in \emptyset \to x \notin \emptyset$$

ist wahr. Sei x beliebig aber fest. Die Aussage $x \in \emptyset$ ist falsch. Daher ist die Aussage $x \in \emptyset \to x \notin \emptyset$ wahr. Die Aussage

$$\forall x\ x \notin \emptyset \to x \in \emptyset$$

ist falsch. Sei x beliebig aber fast. Die Aussage $x \notin \emptyset$ ist wahr, die Aussage $x \in \emptyset$ ist falsch. Daher ist die Aussage $x \notin \emptyset \to x \in \emptyset$ falsch.

Aufgabe 5. Gibt es Aussagen $F(x)$ und $G(x)$ so dass der Wahrheitswert von

$$\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \quad \text{und} \quad (\forall x\ F(x)) \wedge (\forall x\ G(x))$$

unterschiedlich ist? Begründen Sie Ihre Antwort anschaulich mit zwei Sätzen.

Lösung von Aufgabe 5. Die Formeln sind äquivalent. Wenn für alle x gilt, dass $F(x) \wedge G(x)$ wahr ist, dann muss $F(x)$ wahr sein für alle x und auch $G(x)$ wahr sein für alle x.

Wenn umgekehrt $F(x)$ wahr ist für alle x und auch $G(x)$ wahr ist für alle x, dann ist auch $F(x) \wedge G(x)$ wahr für alle x.

3 Mengen

Aufgabe 6. Berechnen Sie folgende Mengen:

$$\{\{5\},1,-7\} \cup \{-7,5\}$$
$$\{\{5\},1,-7\} \cap \{-7,5\}$$
$$\{\{5\},1,-7\} \setminus \{-7,5\}$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned} \{\{5\},1,-7\} \cup \{-7,5\} &= \{\{5\},1,-7,5\} \\ \{\{5\},1,-7\} \cap \{-7,5\} &= \{-7\} \\ \{\{5\},1,-7\} \setminus \{-7,5\} &= \{\{5\},1\} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Finden Sie jeweils ein Element x so dass gilt

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ x &\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x &\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned} 1/2 &\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ \sqrt{2} &\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -3 &\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Nennen Sie alle Teilmengen der Menge $\{3,9\}$. Vergessen Sie auch die leere Menge nicht!

Lösung von Aufgabe 8.

$$\emptyset, \{3\}, \{9\}, \{3,9\}$$

Aufgabe 9. Die Aussagen

$$x \notin A \cup B \text{ und } x \notin A \wedge x \notin B$$

sind äquivalent, d.h. haben den selben Wahrheitswert für alle A, B, x. Man kann daher die aussagenlogische Gleichheit aufstellen

$$x \notin A \cup B \quad = \quad x \notin A \wedge x \notin B.$$

Für den Beweis muss man nur die Rechengesetze der Aussagenlogik anwenden:

$$\begin{aligned} x \notin A \cup B &= \neg(x \in A \cup B) \\ &= \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &= \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ &= x \notin A \wedge x \notin B. \end{aligned}$$

Beweisen Sie auf gleiche Weise

$$x \notin A \setminus B \quad = \quad x \notin A \vee x \in B.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} x \notin A \setminus B &= \neg(x \in A \setminus B) \\ &= \neg(x \in A \wedge x \notin B) \\ &= \neg(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \\ &= \neg(x \in A) \vee \neg\neg(x \in B) \\ &= x \notin A \vee x \in B. \end{aligned}$$

4 Relationen

Aufgabe 10. Gegeben sei die Relation

$$R = \{x \mid \text{ es gibt ein } a \in \mathbb{R} \text{ so dass } x = (a, a^2 + 1)\}.$$

- Nennen Sie 3 Elemente von R.
- Die Elemente von R sind Paare von reellen Zahlen. Zeichnen Sie jedes dieser Paare als Punkt in einem Koordinatensystem ein. Da es unendlich viele Paare sind, genügt eine Skizze.

Lösung von Aufgabe 10. Elemente sind z.B. $(1, 2), (0, 1), (2, 5)$. Es entsteht das Schaubild der Funktion

$$f(a) = a^2 + 1.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$\mathbb{N}^2 \cap \mathbb{Q}^2$$
$$\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Q}$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^2 \cap \mathbb{Q}^2 &= \mathbb{N}^2 \\ \mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{Z} &= \emptyset \\ \mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

5 Funktionen

Aufgabe 12. Ist das Tripel

$$f = \big(\{2,5\}, \{1,6,7\}, \{(2,1),(5,1)\}\big)$$

eine Funktion? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 12. Es ist eine Funktion, da

$$\{(2,1),(5,1)\} \subseteq \{2,5\} \times \{1,6,7\}$$

und es zu jedem $a \in \{2,5\}$ genau ein $b \in \{1,6,7\}$ gibt mit

$$(a,b) \in \{(2,1),(5,1)\}.$$

Aufgabe 13. Wie kann man formal ausdrücken, dass f eine Funktion ist, die jedem Paar bestehend aus einer ganzen Zahl und einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ein Tripel von natürlichen Zahlen zuordnet?

Lösung von Aufgabe 13.

$$f \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \to \mathbb{R})) \to \mathbb{N}^3.$$

Aufgabe 14. Welche der folgenden Funktionen sind gleich?

$$\begin{array}{rl}
f_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, & f_1(x) = x/x \\
f_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, & f_2(x) = 1 \\
f_3 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_3(x) = 1 \\
f_4 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_4(x) = \begin{cases} x/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}
\end{array}$$

Lösung von Aufgabe 14. $f_1 = f_2$ und $f_3 = f_4$.

Aufgabe 15. Wieviele Elemente hat die Menge $\{0,1\} \to \{0,1,2\}$? Stellen Sie ein Element dieser Menge als Tripel (A, B, R) dar.

Lösung von Aufgabe 15. $\{0,1\} \to \{0,1,2\}$ hat $3^2 = 9$ Elemente.

$$f = (\{0,1\}, \{0,1,2\}, \{(0,0),(1,2)\})$$

Aufgabe 16. Sei A eine Menge mit $|A| = 3$. Berechnen Sie

$$|A \to A|, \quad |(A \to A) \to A|, \quad |A \to (A \to A)|.$$

Lösung von Aufgabe 16. Mit der Formel

$$|A \to B| \quad = \quad |B|^{|A|}$$

folgt

$$\begin{aligned}
|A \to A| &= 3^3 \\
&= 27 \\
|(A \to A) \to A| &= 3^{27} \\
&\approx 7.63 \times 10^{12} \\
|A \to (A \to A)| &= 27^3 \\
&= 19683.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei

$$A = \{1, 2\}.$$

Nennen Sie je ein Element aus den Mengen

$$\begin{gathered}
A \times A \\
A \to A \\
A \to (A \times A) \\
(A \times A) \to A \\
A \times (A \to A) \\
(A \to A) \times (A \to A)
\end{gathered}$$

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{aligned}
(2, 1) &\in A \times A \\
(A, A, \{(1, 2), (2, 2)\}) &\in A \to A \\
(A, A \times A, \{(1, (1, 2)), (2, (1, 1))\}) &\in A \to (A \times A) \\
(A \times A, A, \{((1, 1), 2), ((1, 2), 1), ((2, 1), 2), ((2, 2), 1)\}) &\in (A \times A) \to A \\
(1, (A, A, \{(1, 1), (2, 1)\})) &\in A \times (A \to A) \\
((A, A, \{(1, 1), (2, 2)\}), (A, A, \{(1, 1), (2, 1)\})) &\in (A \to A) \times (A \to A)
\end{aligned}$$

6 Komposition

Aufgabe 18. Gegeben sind zwei Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x, 3x+1) \\ g(x,y) &= x - 5y \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \circ f$ und $f \circ g$.

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{aligned} g \circ f &\in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(f(x)) &= g(2x, 3x+1) \\ &= 2x - 5(3x+1) \\ &= -13x - 5 \\ f \circ g &\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(g(x,y)) &= f(x - 5y) \\ &= (2x - 10y, 3x - 15y + 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Sei $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ und $g \in \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x, x^2, 3) \\ g(x,y,z) &= (x - z, y). \end{aligned}$$

Finden Sie einen Term für die Funktion $g \circ f$. Geben Sie auch an von wo nach wo diese Funktion abbildet.

Lösung von Aufgabe 19.

$$g \circ f \in \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(5x, x^2, 3) \\ &= (5x - 3, x^2). \end{aligned}$$

Aufgabe 20. Sei $f \in \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y, x-y).$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für $f \circ f$.

Lösung von Aufgabe 20.

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x,y) &= f(f(x,y)) \\ &= f(x+y, x-y) \\ &= \big((x+y) + (x-y), (x+y) - (x-y)\big) \\ &= (2x, 2y). \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn

$$f(-x) = f(x)$$

und ungerade wenn

$$f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

- Wenn f und g ungerade sind, dann ist auch $f \circ g$ ungerade.
- Wenn f und g gerade sind, dann ist auch $f \circ g$ gerade.
- Wenn f gerade und g ungerade ist, ist dann $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ gerade oder ungerade?

Lösung von Aufgabe 21.

- Seien f, g ungerade Funktionen, d.h.

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ g(-x) &= -g(x). \end{aligned}$$

  Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(-g(x)) \\ &= -f(g(x)) \\ &= -(f \circ g)(x), \end{aligned}$$

  d.h. $f \circ g$ ist ungerade.
- Seien f, g gerade Funktionen, d.h.

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ g(-x) &= g(x). \end{aligned}$$

  Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(g(x)) \\ &= (f \circ g)(x), \end{aligned}$$

  d.h. $f \circ g$ ist gerade.
- Sei f gerade und g ungerade, d.h.

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ g(-x) &= -g(x). \end{aligned}$$

  Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(-g(x)) \\ &= f(g(x)) \\ &= (f \circ g)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x),\end{aligned}$$

d.h. $f \circ g$ und $g \circ f$ ist gerade.

Aufgabe 22. Sei

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1} + e^x.$$

Finden Sie zwei Funktionen g, h so dass

$$f = g \circ h.$$

Lösung von Aufgabe 22. Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.

$$\begin{aligned} &h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, & h(x) &= (\sin(x), x^2+1, e^x) \\ &g \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, & g(x,y,z) &= \frac{x}{y} + z. \end{aligned}$$

7 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Aufgabe 23. Finden Sie eine Relation R so dass das Tripel

$$\big(\{1,5\},\{2,3,4\},R\big)$$

eine injektive Funktion ist. Ist diese Funktion auch surjektiv?

Lösung von Aufgabe 23.

$$R = \{(1,2),(5,3)\}$$

Die Funktion ist nicht surjektiv.

Aufgabe 24. Finden Sie eine Menge A so dass

$$f \in A \to \mathbb{R}, \quad f(x) \quad = \quad \tan(x)$$

eine bijektive Funktion ist. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Zeichnen Sie zuerst den Graph der Tangensfunktion.

Lösung von Aufgabe 24. Eine Lösung ist das offene Intervall

$$A \quad = \quad]-\pi/2,\ \pi/2[.$$

Es ginge aber auch

$$A \quad = \quad]k\pi - \pi/2,\ k\pi + \pi/2[$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 25. Seien

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + x, \qquad g(x) = x^3 - x.$$

- Sind die Funktionen surjektiv?
- Sind die Funktionen injektiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 25.

- Beide Funktionen sind stetig, d.h. haben keine Sprünge. Für große positive bzw. negative x-Werte nehmen die Funktionen beliebig große positive bzw. negative Werte an. Somit sind beide Funktionen surjektiv.
- Die Funktion f ist streng monoton steigend da

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

für alle x. Daher ist f injektiv. Die Funktion g ist nicht injektiv. Umformen ergibt

$$g(x) = x(x-1)$$

und damit ist

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(1) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 26. Die Funktion $f \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = \frac{3y}{x} + 1.$$

Ist f injektiv bzw. surjektiv? Geben Sie jeweils einen Satz Begründung.

Lösung von Aufgabe 26. Die Funktion ist nicht injektiv, da z.B.

$$f(1,1) = f(2,2) \text{ aber } (1,1) \neq (2,2).$$

Die Funktion ist surjektiv, da es zu jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ein $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$q = a/b.$$

Die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{3y}{x} + 1$$

ist immer lösbar. Umformen ergibt

$$\frac{a-b}{3b} = \frac{y}{x}.$$

Eine Lösung ist z.B. $x = 3b$ und $y = a - b$.

Aufgabe 27. Finden Sie eine Relation R so dass das Tripel

$$f = (\{1, 2\}, \{4, 5\}, R)$$

eine Funktion ist, die aber *nicht* injektiv ist.

Lösung von Aufgabe 27. Ein Beispiel ist

$$R = \{(1, 4), (2, 4)\}.$$

8 Umkehrfunktion

Aufgabe 28. Sei
$$f \in \{1,2\} \to \{(2,0),(3,1)\}$$
definiert durch
$$f(x) = (x+1, x-1).$$
Finden Sie Mengen A, B, R so dass
$$f^{-1} = (A, B, R).$$

Lösung von Aufgabe 28.
$$\begin{aligned} A &= \{(2,0),(3,1)\} \\ B &= \{1,2\} \\ R &= \{((2,0),1),((3,1),2)\} \end{aligned}$$

Aufgabe 29. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion
$$f = \big(\{1,2\},\{2,3\},\{(1,2),(2,3)\}\big).$$

Lösung von Aufgabe 29.
$$f^{-1} = \big(\{2,3\},\{1,2\},\{(2,1),(3,2)\}\big).$$

Aufgabe 30. Sei $A = \{1,2,3,4\}$. Definieren Sie eine bijektive Funktion $f \in A \to A$ und geben Sie ihre Umkehrfunktion f^{-1} an.

Lösung von Aufgabe 30. Zum Beispiel $f, f^{-1} \in A \to A$ mit
$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f^{-1}(x) &= x. \end{aligned}$$

Aufgabe 31. Sei $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \frac{1}{x} + x.$$
Ist f injektiv bzw. surjektiv? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antwort. Hinweis: Versuchen Sie eine Umkehrfunktion zu konstruieren.

Lösung von Aufgabe 31. Die Funktion ist surjektiv, wenn die Gleichung
$$y = \frac{1}{x} + x$$
für jedes $y \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung hat. Sie ist injektiv, wenn die Gleichung für jedes $y \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat. Beides ist nicht der Fall. Umformen ergibt
$$xy = 1 + x^2$$

bzw.

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

Die Lösungen sind

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Die Gleichung hat damit z.B. für $y = 1$ keine Lösung. Für $y = 3$ hat sie zwei Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 32. Die Funktion

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to [1, \infty[\quad \text{mit} \quad f(x) \;=\; e^{(x^2)}$$

ist bijketiv. Hierbei ist

$$[1, \infty[\;=\; \{y \,|\, y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 1\}.$$

Berechnen Sie die Umkehrfunktion.

Lösung von Aufgabe 32. Für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$f^{-1} \in [1, \infty[\to \mathbb{R}_0^+.$$

$f^{-1}(y)$ ist für jedes $y \in [1, \infty[$ das $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist, für das gilt

$$y \;=\; e^{(x^2)}.$$

Auflösen nach x ergibt

$$\ln(y) \;=\; x^2.$$

Da $y \geq 1$, ist der Logarithmus definiert und $\ln(y) \geq 0$. Diese Gleichung hat zwei Lösungen

$$x \;=\; \pm\sqrt{(\ln(y)}.$$

Da die Lösung $x \in \mathbb{R}_0^+$ gesucht wird, gilt

$$x \;=\; \sqrt{\ln(y)}.$$

Damit ist

$$f^{-1}(y) \;=\; \sqrt{\ln(y)}.$$

Aufgabe 33. Welche der folgenden Funktionen hat eine Umkehrfunktion? Falls eine Umkehrfunktion existiert, geben Sie einen Funktionsterm für diese an, andernfalls begründen Sie kurz weshalb keine Umkehfunktion existiert. Hinweis: Skizzieren Sie die Sinus Funktion und schauen Sie sich die relevanten Bereiche an!

- $f \in [0, \pi] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin(x)$

- $f \in [0, \pi/2] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin(x)$
- $f \in [0, \pi/2] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$
- $f \in [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$
- $f \in [\pi, \pi + \pi/2] \to [-1, 0], \quad f(x) = \sin(x)$

Lösung von Aufgabe 33.

- $f \in [0, \pi] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin(x)$ ist nicht injektiv. Es gilt z.B. $f(0) = f(\pi)$.
- $f \in [0, \pi/2] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin(x)$ ist bijektiv und hat eine Umkehrfunktion $f^{-1} \in [0, 1] \to [0, \pi/2]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.
- $f \in [0, \pi/2] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$ ist nicht surjektiv. Es gibt z.B. kein $x \in [0, \pi/2]$ mit $f(x) = -1$.
- $f \in [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$ ist bijektiv und hat eine Umkehrfunktion $f^{-1} \in [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.
- $f \in [\pi, \pi + \pi/2] \to [-1, 0], \quad f(x) = \sin(x)$ ist bijektiv und hat eine Umkehrfunktion $f^{-1} \in [-1, 0] \to [\pi, \pi + \pi/2]$, $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin(x)$.

Aufgabe 34. Sei $f \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x, y) = (x/y, 1 - x).$$

Berechnen Sie einen Term für die Umkehrfunktion von f.

Lösung von Aufgabe 34. Sei

$$f(x, y) = (u, v).$$

Dann ist

$$f^{-1}(u, v) = (x, y).$$

Aus der Gleichung der Paare

$$(u, v) = (x/y, 1 - x)$$

folgt

$$\begin{aligned} u &= x/y \\ v &= 1 - x \end{aligned}$$

Auflösen nach x, y ergibt

$$\begin{aligned} x &= 1 - v \\ y &= (1 - v)/u \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad f^{-1}(u, v) = (1 - v, (1 - v)/u).$$

9 Folgen

Aufgabe 35. Die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert gegen 0. Es muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existieren, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n| < \varepsilon$. Finden Sie solch ein N für $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ und $\varepsilon = 10^{-100}$.

Lösung von Aufgabe 35. Die Folge $x_n = 1/n$ ist streng monoton fallend. Es genügt daher, ein N zu finden mit $|x_N| < \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie ist damit garantiert, dass auch $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da x_n immer größer Null ist, ist

$$|x_N| < \varepsilon$$

äquivalent zu

$$x_N < \varepsilon.$$

Auflösen nach N ergibt

$$N > 1/\varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 0.1$ erhält man $N > 10$. Man kann also für N einen beliebigen Wert ≥ 10 nehmen. Für $\varepsilon = 0.01$ kann man entsprechend $N = 100$ nehmen, für $\varepsilon = 10^{-100}$ kann man $N = 10^{100}$ nehmen.

Aufgabe 36. Eine Folge x_n konvergiert gegen den Grenzwert $\hat{x} \in \mathbb{R}$ genau dann wenn die Folge

$$y_n = x_n - \hat{x}$$

eine Nullfolge ist. Die Folge

$$x_n = \frac{2n-1}{n+2}$$

konvergiert gegen 2. Es muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existieren, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - 2| < \varepsilon$. Finden Sie solch ein N für $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ und $\varepsilon = 10^{-100}$.
Ein paar Hinweise:

- Lösen Sie $|x_n - 2| < \varepsilon$ nach n auf und setzen Sie dann die gegebenen Werte für ε ein.
- $x_n - 2$ ist immer negativ, das hilft einem die Betragsstriche loszuwerden.
- Wenn Sie ein N gefunden haben, prüfen Sie nach ob auch tatsächlich $|x_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ ist. Schauen Sie sich hierzu ein paar Beispiele x_N, x_{N+1}, $x_{N+2}, \ldots$ an.
- Für $\varepsilon = 0.1$ erhält man z.B. $N = 49$. Man prüft nach, dass

$$|x_{49} - 2| = |-5/51| = 0.098\ldots < 0.1$$
$$|x_{50} - 2| = |-5/52| = 0.096\ldots < 0.1$$

usw. Natürlich hätte es auch jeder Wert größer 49 für N getan. Wenn man also unsicher ist, setzt man N lieber etwas größer an.

Lösung von Aufgabe 36. Die Folge

$$\begin{aligned} |x_n - 2| &= \left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| \\ &= \frac{5}{n+2} \end{aligned}$$

ist streng monoton fallend und nach unten begrenzt durch 0. Gilt somit für ein N dass

$$|x_N - 2| < \varepsilon$$

dann gilt dies auch für alle $n > N$. Die Ungleichung

$$|x_N - 2| < \varepsilon$$

läßt sich somit wie folgt umformen und nach N auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{5}{N+2} &< \varepsilon \\ 5 &< (N+2)\varepsilon \\ 5 - 2\varepsilon &< N\varepsilon \\ \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} &< N. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 0.1$ erhält man $N > 48$. Für $\varepsilon = 0.01$ erhält man $N > 498$. Für $\varepsilon = 10^{-100}$ erhält man $N > 5 \times 10^{100} - 2$.

Aufgabe 37. Berechnen Sie den Grenzwert $\hat{x}$ der Folge

$$x_n = \frac{3\ln(n)}{\ln(n^2) + 1}.$$

Sie müssen dafür den Funktionsterm umformen. Mit dem so berechneten Grenzwert $\hat{x}$ muss die Folge

$$x_n - \hat{x}$$

eine Nullfolge sein. Formen Sie die den Term $x_n - \hat{x}$ so um, dass man dies erkennt. Berechnen Sie dann zu beliebigem $\varepsilon > 0$ das kleinste N so dass $|x_n - \hat{x}| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Lösung von Aufgabe 37.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3\ln(n)}{\ln(n^2) + 1} \\ &= \frac{3\ln(n)}{2\ln(n) + 1} \\ &= \frac{3}{2 + \frac{1}{\ln(n)}} \quad \text{für } n > 1 \\ &\to \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Grenzwert $\hat{x} = 3/2$.

$$\begin{aligned} x_n - \hat{x} &= \frac{3\ln(n)}{\ln(n^2)+1} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{6\ln(n) - 3(\ln(n^2+1))}{2(\ln(n^2)+1)} \\ &= \frac{6\ln(n) - 3\ln(n^2) - 3}{2\ln(n^2)+2} \\ &= \frac{-3}{4\ln(n)+2} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Umformen der Ungleichung

$$\begin{aligned} |x_n - \hat{x}| &< \varepsilon \\ \left|\frac{-3}{4\ln(n)+2}\right| &< \varepsilon \\ \frac{3}{4\ln(n)+2} &< \varepsilon \\ 3 &< \varepsilon(4\ln(n)+2) \\ \frac{3}{\varepsilon} &< 4\ln(n)+2 \\ \frac{3}{\varepsilon} - 2 &< 4\ln(n) \\ \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} &< \ln(n) \\ n &> \exp\left(\frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Für

$$N = \exp\left(\frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)$$

gilt damit $|x_n - \hat{x}| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Aufgabe 38. Sei

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a^i$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$. Damit ist z.B.

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a + a^2 \\ x_3 &= a + a^2 + a^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Gehen Sie wie folgt vor, um den Grenzwert dieser Folge zu berechnen:

- Zeigen Sie, dass
$$ax_n = \sum_{i=2}^{n+1} a^i$$
- Berechnen Sie die Differenz
$$ax_n - x_n$$
und stellen Sie das Ergebnis ohne Summenzeichen dar.
- Klammern Sie in obigem Ausdruck x_n aus und berechnen Sie damit
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Lösung von Aufgabe 38.

$$\begin{aligned}
ax_n &= a\sum_{i=1}^{n} a^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a\,a^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^{i+1} \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} a^i \\
ax_n - x_n &= \sum_{i=2}^{n+1} a^i - \sum_{i=1}^{n} a^i \\
&= a^{n+1} - a \\
x_n(a-1) &= a^{n+1} - a \\
x_n &= \frac{a^{n+1} - a}{a-1} \\
\lim_{n\to\infty} x_n &= \frac{a}{1-a}
\end{aligned}$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie zu jeder der nachfolgend gegebenen Folgen x_n und Funktionen $f(x)$ den Grenzwert der Folge $f(x_n)$. Skizzieren Sie erforderlichenfalls die Folge x_n und die Funktion $f(x)$ und vereinfachen Sie den

Funktionsterm für $f(x_n)$. Ein Beweis ist nicht erforderlich.

$$
\begin{array}{rclcrcl}
x_n & = & 1/n, & \quad & f(x) & = & \cos(\pi - x) \\
x_n & = & n + 1/2, & & f(x) & = & \cos(\pi x) \\
x_n & = & n + 1, & & f(x) & = & \cos(\pi x) \\
x_n & = & \dfrac{n\pi + 1}{2n}, & & f(x) & = & \tan(x) \\
x_n & = & \dfrac{n\pi - 3}{2n}, & & f(x) & = & \tan(x) \\
x_n & = & \dfrac{(-1)^n}{n+1}, & & f(x) & = & \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 2x - 1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\
x_n & = & \dfrac{(-1)^n}{n+1}, & & f(x) & = & \begin{cases} -x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Lösung von Aufgabe 39.

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1/n \\
f(x) &= \cos(\pi - x) \\
f(x_n) &= \cos(\pi - 1/n) \\
\lim_{n\to\infty} \cos(\pi - 1/n) &= \cos(\pi) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= n + 1/2 \\
f(x) &= \cos(\pi x) \\
f(x_n) &= \cos(\pi x_n) \\
&= \cos(\pi(n + 1/2)) \\
&= \cos(n\pi + \pi/2) \\
&= -\sin(n\pi) \\
&= 0 \\
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= n + 1 \\
f(x) &= \cos(\pi x) \\
f(x_n) &= \cos(\pi x_n) \\
&= \cos(\pi(n + 1)) \\
&= \cos(n\pi + \pi) \\
&= -\cos(n\pi) \\
&= (-1)^n \\
\lim_{n\to\infty} f(x_n) & \quad \text{existiert nicht}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n\pi+1}{2n} \\ f(x) &= \tan(x) \\ f(x_n) &= \tan(\pi/2 + 1/(2n)) \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n\pi-3}{2n} \\ f(x) &= \tan(x) \\ f(x_n) &= \tan(\pi/2 - 3/(2n)) \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(-1)^n}{n+1} \\ f(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 2x-1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ f(x_n) &= \begin{cases} x_n+1 & \text{falls } x_n \geq 0 \\ 2x_n-1 & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^n/(n+1)+1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2(-1)^n/(n+1)-1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ & \text{hat keinen Grenzwert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(-1)^n}{n+1} \\ f(x) &= \begin{cases} -x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 2x+1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ f(x_n) &= \begin{cases} -x_n+1 & \text{falls } x_n \geq 0 \\ 2x_n+1 & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(-1)^n/(n+1)+1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2(-1)^n/(n+1)+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 40. Die Folge

$$x_n = 1/\ln(n+1)$$

konvergiert gegen 0. Es muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existieren, so dass für alle $n > N$ gilt $|x_n| < \varepsilon$. Finden Sie solch ein N für beliebiges $\varepsilon > 0$.

Lösung von Aufgabe 40. Die Folge

$$x_n = 1/\ln(n+1)$$

ist streng monoton fallend. Es genügt daher, ein N zu finden mit $|a_N| < \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie ist damit garantiert, dass auch $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da x_n immer größer Null ist, ist

$$|x_N| < \varepsilon$$

äquivalent zu

$$x_N < \varepsilon.$$

Auflösen nach N ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(N+1)} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< \ln(N+1) \\ e^{1/\varepsilon} &< N+1 \\ e^{1/\varepsilon}-1 &< N \end{aligned}$$

Damit kann man z.B.

$$N = e^{1/\varepsilon}$$

wählen.

Aufgabe 41. Sei $x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge und $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Komposition

$$f \circ x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

wieder eine Folge mit den Gliedern

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

Sei nun konkret $x_n = 1 + 1/n$. Dann konvergiert x_n gegen 1 für n gegen unendlich. Untersuchen Sie, ob auch die Folge $f(x_n)$ konvergiert, und falls ja wogegen, für folgende Funktionen f. Eine begründete Vermutung genügt, ein Beweis ist nicht verlangt:

$$f(x) = \sin(x), \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = 1/(x-1), \quad f(x) = \sin(1/(x-1)).$$

Hinweis: Falls $f(x) = x^2$ ist

$$f(x_n) = (1 + 1/n)^2.$$

Lösung von Aufgabe 41.

- $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

  $$f(x_n) = \sin(1 + 1/n).$$

  Damit konvergiert $f(x_n)$ gegen $\sin(1)$.
- $f(x) = e^x$. Dann ist

  $$f(x_n) = e^{1+1/n}$$

  Die Folge konvergiert gegen e.
- $f(x) = 1/(x-1)$. Dann ist

  $$\begin{aligned} f(x_n) &= 1/(1+1/n-1) \\ &= 1/(1/n) \\ &= n \end{aligned}$$

  Die Folge ist bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞.

- $f(x) = \sin(1/(x-1))$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sin(1/(1+1/n-1)) \\ &= \sin(1/(1/n)) \\ &= \sin(n) \end{aligned}$$

Die Folge ist unbestimmt divergent.

Aufgabe 42. Seien x_n, y_n Nullfolgen. Welche der folgenden Folgen sind dann garantiert auch Nullfolgen?

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}, \quad \sin(x_n), \quad \cos(x_n), \quad e^{x_n}$$

Welche dieser Folgen sind garantiert keine Nullfolgen? Von welchen Folgen kann man dies nicht allgemein sagen? Begründung ist nicht erforderlich.

Lösung von Aufgabe 42. Nullfolgen sind mit Sicherheit

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \sin(x_n).$$

Garantiert keine Nullfolgen sind

$$\cos(x_n), \quad e^{x_n}$$

da diese Folgen gegen 1 konvergieren. Bei der Folge

$$\frac{x_n}{y_n}$$

kommt es darauf an, ob Zähler oder Nenner schneller gegen Null konvergiert.

10 Grenzwert von Funktionen

Aufgabe 43. Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Versuchen Sie, die Funktion grafisch darzustellen. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $\hat{x} = 1$ keinen Grenzwert besitzt. Gibt es überhaupt eine Zahl $\hat{x} \in \mathbb{R}$ so dass f einen Grenzwert bei $\hat{x}$ hat?

Lösung von Aufgabe 43. f hat an der Stelle $\hat{x} = 1$ keinen Grenzwert, da es zwei Folgen von x-Werten gibt, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren. Sei

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + 1/n \\ x'_n &= 1 + \pi/n \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $x_n \to 1$, $x'_n \to 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \neq 1$ und $x'_n \neq 1$. Da $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x'_n \notin \mathbb{Q}$ für alle n, erhält man für die zugehörigen Folgen der Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1 \\ f(x'_n) &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 44. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} x \sin(1/x).$$

Lösung von Aufgabe 44. Da $\sin(1/x)$ für jedes $x \neq 0$ zwischen -1 und 1 liegt und x gegen Null geht, gilt

$$\lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Aufgabe 45. Besitzen die folgenden Funktionen einen Grenzwert bei $\hat{x}$? Wenn Sie unsicher sind, dann zeichnen Sie die Funktionen zunächst in der Nähe von $\hat{x}$.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x)/x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
für $\hat{x} = 0$ bzw. für $\hat{x} = -1$.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
für $\hat{x} = 0$ bzw. für $\hat{x} = -1$.
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}/x$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x}/|x|$ für $\hat{x} = 0$.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ und $\hat{x} = 1$.

Lösung von Aufgabe 45.

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x)/x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert aber an der Stelle $\hat{x} = -1$ den Grenzwert 0.
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$
hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ und an der Stelle $\hat{x} = -1$ den Grenzwert 0.
- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den Grenzwert 1.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}/x$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ keinen Grenzwert.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x}/|x|$ hat an der Stelle $\hat{x} = 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.
- $f \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ hat an der Stelle $\hat{x} = 1$ den Grenzwert 2. Dies erkennt man daran dass
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

11 Stetigkeit

Aufgabe 46. Definieren Sie eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $\hat{x} = 2$ einen Grenzwert hat, dort aber nicht stetig ist. Zeichnen Sie eine Skizze dieser Funktion in der Nähe von $\hat{x}$.

Lösung von Aufgabe 46.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 2 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 47. Finden Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{falls } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2+5} & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Lösung von Aufgabe 47. Offensichtlich ist f für beliebiges a überall stetig außer bei $\hat{x} = 2$. Damit f auch an der Stelle $\hat{x} = 2$ stetig ist, muss der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen. Allgemein erhält man links- uind rechtsseitigen Grenzwert durch

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}(x-a)^2 &= (2-a)^2 \\ \lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5} &= 3. \end{aligned}$$

Folglich muss

$$(2-a)^2 = 3$$

sein, d.h. $a = 2 + \sqrt{3}$ oder $a = 2 - \sqrt{3}$.

Aufgabe 48. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |9-3x|/(x-3) & \text{für } x \neq 3 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

Welche der folgenden Grenzwerte existieren und welchen Wert haben Sie?

$$\lim_{x\to 0} f(x), \qquad \lim_{x\to 3} f(x)$$

Ist f stetig an der Stelle $x = 3$? Hinweis: Versuchen Sie zunächst, den Funktionsterm von f durch eine weitere Fallunterscheidung zu vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 48. Die Funktion $f(x)$ läßt sich etwas einfacher schreiben durch

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x > 3 \\ -3 & \text{falls } x < 3 \\ 0 & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= -3 \\ \lim_{x\to 3} f(x) &= \text{nicht definiert.} \end{aligned}$$

12 Ableitung

Aufgabe 49. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \tan(\tan(x)).$$

Lösung von Aufgabe 49.

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{1}{\cos^2(\tan(x))}.$$

Aufgabe 50. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Funktion

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(x)$$

gilt

$$f'(x) = 1/x.$$

Gehen Sie wie folgt vor: Die Ableitung der e-Funktion darf als bekannt vorausgesetzt werden. Da die e-Funktion die Umkehrfunktion der ln Funktion ist, gilt

$$e^{f(x)} = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Leiten Sie beide Seiten nach x ab und lösen Sie die Gleichung nach f' auf.

Lösung von Aufgabe 50. Ableiten von beiden Seiten der Gleichung

$$e^{f(x)} = x$$

ergibt unter Verwendung der Kettenregel

$$e^{f(x)} f'(x) = 1.$$

Da $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ folgt

$$x f'(x) = 1.$$

Auflösen nach $f'(x)$ ergibt

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 51. In der Vorlesung wurde die Summenregel und die Kettenregel der Differentialrechnung hergeleitet. Gehen Sie ähnlich vor, um die Ableitungsregel für konstante Faktoren

$$\big(c\, f(x)\big)' = c\, f'(x)$$

herzuleiten.

Lösung von Aufgabe 51.

$$\begin{aligned}
\big(c\, f(x)\big)' &= \frac{c\, f(x+dx) - c\, f(x)}{dx} \\
&= \frac{c(f(x+dx) - f(x))}{dx} \\
&= c\left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right) \\
&= c\, f'(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 52. In der Signalverarbeitung besteht eine wichtige Operation darin, ein Signal $f(t)$ um einen Betrag $\hat{t}$ zu verzögern bzw. "nach rechts" zu verschieben. Die so verschobene Funktion wird mit $h(t)$ bezeichnet. Wie Sie wissen, gilt

$$h(t) \quad = \quad f(t - \hat{t}).$$

- Verifizieren Sie dies am Beispiel $f(t) = t^2$ und $\hat{t} = 2$. Zeichnen Sie die Funktion $f(t)$ und verschieben Sie sie zeichnerisch um 2 nach rechts. Sei die so entstandene Funktion $h(t)$. Prüfen Sie für die Werte $t = 0$, $t = 2$ und $t = -1$, dass tatsächlich $h(t) = f(t-2)$ indem Sie die Funktionswerte ausrechnen und einzeichnen.
- Sei nun $f(t)$ wieder eine beliebige Funktion. Finden Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

  $$f(t-2) \quad = \quad (f \circ g)(t).$$

  für alle t. Die Verschiebung um 2 soll also durch eine Funktionskomposition mit einer Funktion g bewerkstelligt werden. Die verschobene Funktion ist damit

  $$f \circ g.$$

- Es soll nun gezeigt werden, dass es egal ist, ob man eine Funktion f zuerst ableitet und dann um 2 verschiebt oder ob man zuerst f um 2 verschiebt und dann ableitet. Machen Sie sich dies an Ihrem Bild klar, indem Sie die Ableitung von f und h einzeichnen. Stellen Sie diese Aussage dann für beliebiges f als Gleichung auf und beweisen Sie diese. Sie benötigen hierfür lediglich die Kettenregel der Ableitung. Diese Eigenschaft der Ableitung heißt Zeitinvarianz.

Lösung von Aufgabe 52. Aus

$$f(t-2) \quad = \quad f(g(t))$$

folgt

$$g(t) = t - 2.$$

Wenn man f zuerst ableitet und dann verschiebt, erhält man f' um 2 verschoben, d.h.

$$f' \circ g.$$

Wenn man f zuerst verschiebt und dann ableitet, erhält man

$$(f \circ g)'.$$

Zu zeigen ist also

$$(f' \circ g)(t) = (f \circ g)'(t)$$

für alle t. Da $g'(t) = 1$ folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(t) &= f(g(t))' \\
&= f'(g(t))g'(t) \\
&= f'(t-2) \\
&= f'(g(t)) \\
&= (f' \circ g)(t).
\end{aligned}$$

Kompakt ließe sich das auch ausdrücken durch

$$f(t-2)' = f'(t-2)$$

13 Tangente

Aufgabe 53. Berechnen Sie die Linearisierung der Funktion

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}$$

im Punkt $\hat{x} = 4$.

Lösung von Aufgabe 53. Ableitung.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}.$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= e^2 \\ f'(\hat{x}) &= \frac{1}{4} e^2. \end{aligned}$$

Linearisierung.

$$\begin{aligned} \ell(x) &= e^2 + \frac{1}{4} e^2 (x - 4) \\ &= \frac{1}{4} e^2 x. \end{aligned}$$

Aufgabe 54. Für beliebige Funktionen f, g und Zahlen a sind die Funktionen af und $f + g$ definiert durch

$$\begin{aligned} (af)(x) &= af(x) \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Seien $\ell_f(x), \ell_g(x), \ell_{af}(x), \ell_{f+g}(x)$ Linearisierungen der Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $(af)(x)$, $(f + g)(x)$ im Punkt $\hat{x}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \ell_{af}(x) &= a\ell_f(x) \\ \ell_{f+g}(x) &= \ell_f(x) + \ell_g(x). \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Linearisierungen von $af(x)$ und $(f + g)(x)$ im Punkt $\hat{x}$ unter Verwendung der Ableitungsregeln und vereinfachen Sie dann.

Lösung von Aufgabe 54. Ableitungen.

$$\begin{aligned} (af)'(x) &= af'(x) \\ (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Linearisierungen

$$\begin{aligned}
\ell_{af}(x) &= (af)(\hat{x}) + (af)'(\hat{x})(x-\hat{x}) \\
&= af(\hat{x}) + af'(\hat{x})(x-\hat{x}) \\
&= a\left(f(\hat{x}) + f(\hat{x})(x-\hat{x})\right) \\
&= a\ell_f(x) \\
\ell_{f+g}(x) &= (f+g)(\hat{x}) + (f+g)'(\hat{x})(x-\hat{x}) \\
&= f(\hat{x}) + g(\hat{x}) + (f'(\hat{x}) + g'(\hat{x}))(x-\hat{x}) \\
&= f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x-\hat{x}) + g(\hat{x}) + g'(\hat{x})(x-\hat{x}) \\
&= \ell_f(x) + \ell_g(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 55. Berechnen Sie die Linearisierung folgender Funktionen im Punkt $\hat{x} = -1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x^2) \\
f(x) &= \ln(1-x) \\
f(x) &= \frac{x+3}{2x-1}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 55.

- $$\begin{aligned}
f(-1) &= \sin(1) \\
f'(x) &= 2x\cos(x) \\
f'(-1) &= -2\cos(1) \\
\ell(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) \\
&= \sin(1) - 2\cos(1)(x+1) \\
&= -0.239 - 1.08x
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(-1) &= \ln(2) \\
f'(x) &= 1/(x-1) \\
f'(-1) &= -1/2 \\
\ell(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) \\
&= \ln(2) - 1/2(x+1) \\
&= 0.193 - 0.5x
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f(-1) &= -2/3 \\
f'(x) &= -\frac{7}{(2x-1)^2} \\
f'(-1) &= -7/9 \\
\ell(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) \\
&= -2/3 - 7/9(x+1) \\
&= -1.44 - 0.778x
\end{aligned}$$

14 Taylor Polynome

Aufgabe 56. Sei

$$p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_n(x-1)^n$$

das Taylor Polynom vom Grad n von

$$f(x) = \frac{1}{e^x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Berechnen Sie eine allgemeine Formel für den Koeffizienten a_i für $i = 0, \ldots, n$.

Lösung von Aufgabe 56. Aus

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

folgt durch ableiten

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \\ f''(x) &= e^{-x} \\ f'''(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

bzw. allgemein

$$f^{(i)}(x) = (-1)^i e^{-x}.$$

Auswerten bei $\hat{x} = 1$ ergibt

$$f^{(i)}(\hat{x}) = (-1)^i \frac{1}{e}.$$

Damit ist der i-te Koeffizient des Taylor Polynoms

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{i!} f^{(i)}(\hat{x}) \\ &= \frac{(-1)^i}{i!e} \end{aligned}$$

Aufgabe 57. Berechnen Sie das Taylor $p(x)$ Polynom vom Grad 2 der Funktion

$$f(x) = \sin(e^x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$. Wählen Sie als Abkürzungen

$$\begin{aligned} s &= \sin(e) \\ c &= \cos(e). \end{aligned}$$

Sie müssen das Polynom nicht ausmultiplizieren.

Lösung von Aufgabe 57.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(e^x) \\
f'(x) &= e^x \cos(e^x) \\
f''(x) &= e^x \cos(e^x) + e^x e^x(-\sin(e^x)) \\
&= e^x(\cos(e^x) - e^x \sin(e^x)) \\
f(1) &= \sin(e) \\
&= s \\
f'(1) &= e\cos(e) \\
&= ec \\
f''(1) &= e(\cos(e) - e\sin(e)) \\
&= ec - e^2 s \\
p(x) &= s + ec(x-1) + \frac{1}{2}(ec - e^2 s)(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 58. Zeigen Sie, dass für große $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e.$$

Wenn man auf beiden Seiten logarithmiert, vereinfacht sich das Problem zu dem Beweis, dass

$$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \approx 1.$$

Verwenden Sie hierfür die Taylorreihe der ln-Funktion zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \quad \text{für } 0 < x \leq 2.$$

Lösung von Aufgabe 58. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

und damit

$$\begin{aligned}
\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right)^k \\
&= n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{n^{k-1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots \\
&\to 1 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 59. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad n der Funktion $f(x) = \ln(x)$ zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$.

Lösung von Aufgabe 59. Für die Ableitungen von $f(x) = \ln(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 1/x \\ f^{(2)}(x) &= -1/x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 2/x^3 \\ f^{(4)}(x) &= -6/x^4 \\ f^{(5)}(x) &= 24/x^5 \\ &\vdots \\ f^{(i)}(x) &= (-1)^{i-1}(i-1)!/x^i \end{aligned}$$

Für den Entwicklungspunkt $\hat{x} = 1$ gilt somit

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= 0 \\ f^{(i)}(\hat{x}) &= (-1)^{i-1}(i-1)! \qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom vom Grad n

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(\hat{x})}{i!}(x-\hat{x})^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i!}(x-1)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}(x-1)^i. \end{aligned}$$

Aufgabe 60. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 von

$$f(x) = \cos(e^x)$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = \ln(\pi)$. Bringen Sie das Polynom auf die Form

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 60. Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x \sin(e^x) \\ f''(x) &= -e^x \sin(e^x) - e^x e^x \cos(e^x)) \\ &= -e^x(\sin(e^x) + e^x \cos(e^x)). \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = \ln(\pi)$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= -1 \\ f'(\hat{x}) &= -\pi \sin(\pi) \\ &= 0 \\ f''(\hat{x}) &= -\pi(\pi \cos(\pi)) \\ &= \pi^2 \end{aligned}$$

Taylor Polyom

$$\begin{aligned} p(x) &= -1 + \frac{1}{2!}\pi^2(x - \ln(\pi))^2 \\ &= -1 + \frac{\pi^2}{2}(x^2 - 2x\ln(\pi) + \ln(\pi)^2) \\ &= \frac{\pi^2}{2}x^2 - \pi^2\ln(\pi)x + \frac{1}{2}\pi^2\ln(\pi)^2 - 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi^2}{2} \\ b &= -\pi^2\ln(\pi) \\ c &= \frac{1}{2}\pi^2\ln(\pi)^2 - 1 \end{aligned}$$

15 Integral

Aufgabe 61. Sei $f(t) = 0$ für $t \notin [a, b]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Hinweis: Zerlegen Sie den Integrationsbereich $-\infty \dots \infty$ in die 3 Intervalle $-\infty \dots a$, $a \dots b$ und $b \dots \infty$.

Lösung von Aufgabe 61.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{b} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{\infty} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{\infty} 0dt \\ &= \int_a^b f(t)dt.\end{aligned}$$

Aufgabe 62. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktionen f gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Lösung von Aufgabe 62. Mit Substitution

$$\begin{aligned}u &= -x \\ \frac{du}{dx} &= -1 \\ dx &= -du\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)dx &= \int_{\infty}^{-\infty} f(u)(-du) \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde nur die Integrationsvariable umbenannt. Dies entspricht einer weiteren Substitution $x = u$. Man hätte den Beweis auch so führen können. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann ist $-F(-x)$

eine Stammfunktion von $f(-x)$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)dx &= -\left[F(-x)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= -(F(-\infty) - F(\infty)) \\
&= F(\infty) - F(-\infty) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \left[F(x)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= F(\infty) - F(-\infty).
\end{aligned}$$

Aufgabe 63. Berechnen Sie

$$\int \frac{e^{1/\sin(x)}}{\tan(x)(1-\cos^2(x))} dx.$$

Lösung von Aufgabe 63. Zunächst wird der Integrand vereinfacht.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{1/\sin(x)}}{\tan(x)(1-\cos^2(x))} &= \frac{\cos(x)e^{1/\sin(x)}}{\sin(x)\sin^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)e^{1/\sin(x)}}{\sin^3(x)}.
\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\sin(x)} = \sin(x)^{-1} \\
\frac{du}{dx} &= -\sin(x)^{-2}\cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
dx &= \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)} du
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(x)e^{1/\sin(x)}}{\sin^3(x)} &= \int \frac{\cos(x)e^u}{\sin^3(x)} \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)} du \\
&= -\int \frac{e^u}{\sin(x)} du \\
&= -\int ue^u du.
\end{aligned}$$

Partielle Integration.

$$\begin{aligned}
-\int ue^u du &= -\left(ue^u - \int e^u du\right) \\
&= -ue^u + e^u \\
&= e^u(1-u).
\end{aligned}$$

Rücksubstitution.

$$\begin{aligned} e^u(1-u) &= e^{1/\sin(x)}\left(1-\frac{1}{\sin(x)}\right) \\ &= e^{1/\sin(x)}\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)} \\ &= \frac{e^{1/\sin(x)}(\sin(x)-1)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 64. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

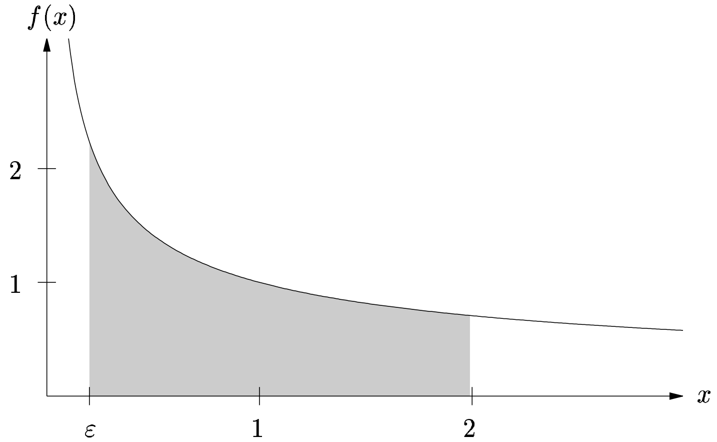
für x zwischen 0 und 2. Ist der Flächeninhalt überhaupt endlich? Da $f(0)$ nicht definiert ist, muss man wie folgt vorgehen: Man berechnet zunächst für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$F_\varepsilon = \int_\varepsilon^2 f(x)dx$$

und führt dann den Grenzübergang

$$F = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon$$

durch.



Lösung von Aufgabe 64.

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &= \int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \int_\varepsilon^2 x^{-1/2}dx \\ &= 2\left[x^{1/2}\right]_\varepsilon^2 \\ &= 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{\varepsilon}\right) \\ F &= \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 65. Berechnen Sie die *geometrische* Fläche zwischen der Funktion

$$f(x) = x\sin(x),$$

und der x-Achse zwischen 0 und 2π. (Die Fläche unter der x-Achse soll also positiv gerechnet werden.)

Lösung von Aufgabe 65. Für x zwischen 0 und π ist $f(x)$ positiv, zwischen π und 2π negativ. Folglich ist die Fläche

$$A = \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx.$$

Durch partielle Integration erhält man eine Stammfunktion

$$F(x) = \sin(x) - x\cos(x).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A &= [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\pi} - [\sin(x) - x\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \sin(\pi) - \pi\cos(\pi) - \sin(0) + 0\cos(0) \\ &\quad -\big(\sin(2\pi) - 2\pi\cos(2\pi) - \sin(\pi) + \pi\cos(\pi)\big) \\ &= \pi - (-2\pi - \pi) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 66. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \sqrt{x}\cos(\sqrt{x}).$$

Hinweis: Der Rechenweg ist relativ lang.

Lösung von Aufgabe 66. Substitution

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ dx &= 2\sqrt{x}du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})dx &= \int \sqrt{x}\cos(u)2\sqrt{x}du \\ &= 2\int x\cos(u)du \\ &= 2\int u^2\cos(u)du. \end{aligned}$$

Partielle Integration.

$$\int u^2\cos(u)du = u^2\sin(u) - 2\int u\sin(u)du$$

Nochmal partielle Integration.

$$\begin{aligned}\int u\sin(u)du &= -u\cos(u) - \int -\cos(u)du \\ &= -u\cos(u) + \int \cos(u)du \\ &= -u\cos(u) + \sin(u).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int u^2\cos(u)du &= u^2\sin(u) - 2(-u\cos(u) + \sin(u)) \\ &= u^2\sin(u) + 2u\cos(u) - 2\sin(u) \\ \int \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})dx &= 2\int u^2\cos(u)du \\ &= 2(u^2\sin(u) + 2u\cos(u) - 2\sin(u)) \\ &= 2u^2\sin(u) + 4u\cos(u) - 4\sin(u) \\ &= 2x\sin(\sqrt{x}) + 4\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 4\sin(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

16 Komplexe Zahlen

Aufgabe 67. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$\frac{z}{z+1} = j.$$

Lösung von Aufgabe 67. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
z &= jz + j \\
z(1-j) &= j \\
z &= \frac{j}{1-j} \\
&= \frac{j(1+j)}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 68. Berechnen Sie den Betrag, sowie Real- und Imaginärteil von

$$z = \left(je^j\right)^{10}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 68.

$$\begin{aligned}
&\left(je^j\right)^{10} \\
&= j^{10}e^{10j} \\
&= (-1)(\cos(10) + j\sin(10)) \\
&= -\cos(10) - j\sin(10).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}(z) &= -\cos(10) \\
\mathrm{im}(z) &= -\sin(10) \\
|z| &= \sqrt{\cos(10)^2 + \sin(10)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 69. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \frac{j+1}{e^j + 1}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 69.

$$\begin{aligned} z &= \frac{j+1}{e^j+1} \\ &= \frac{j+1}{\cos(1)+j\sin(1)+1} \\ &= \frac{(1+j)(\cos(1)+1-j\sin(1))}{(\cos(1)+1)^2+\sin^2(1)} \\ &= \frac{\cos(1)+1-j\sin(1)+j\cos(1)+j+\sin(1)}{\cos^2(1)+2\cos(1)+1+\sin^2(1)} \\ &= \frac{\cos(1)+\sin(1)+1+j(\cos(1)-\sin(1)+1)}{2+2\cos(1)} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{re}(z) &= \frac{\cos(1)+\sin(1)+1}{2+2\cos(1)} \\ \mathrm{im}(z) &= \frac{\cos(1)-\sin(1)+1}{2+2\cos(1)} \end{aligned}$$

Aufgabe 70. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{t} \sin(u)e^u du.$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\int_{t}^{\infty} \sin(u)e^u du$$

für kein $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Lösung von Aufgabe 70. Berechnung einer Stammfunktion.

$$\begin{aligned} \int \sin(u)e^u du &= \int \mathrm{im}(e^{ju})e^u du \\ &= \int \mathrm{im}(e^{u(j+1)})du \\ &= \mathrm{im} \int (e^{u(j+1)})du \\ &= \mathrm{im}\left(\frac{1}{j+1}e^{u(j+1)}\right) \\ &= \mathrm{im}\left(\frac{1-j}{2}e^{u(j+1)}\right) \\ &= \frac{e^u}{2}\mathrm{im}\left((1-j)(\cos(u)+j\sin(u))\right) \\ &= \frac{e^u}{2}(\sin(u)-\cos(u)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \sin(u)e^u du &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{t} \sin(u)e^u du \\
&= \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \left[e^u(\sin(u) - \cos(u))\right]_{-T}^{t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} e^t(\sin(t) - \cos(t)) - e^{-T}(\sin(-T) - \cos(-T)) \\
&= \frac{1}{2} e^t(\sin(t) - \cos(t)) \\
\int_{t}^{\infty} \sin(u)e^u du &= \lim_{T\to\infty} \int_{t}^{T} \sin(u)e^u du \\
&= \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \left[e^u(\sin(u) - \cos(u))\right]_{t}^{T} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} e^T(\sin(T) - \cos(T)) - e^t(\sin(t) - \cos(t)).
\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 71. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 4e^{j\pi/4}\,\overline{z}.$$

Lösung von Aufgabe 71. Sei

$$\begin{aligned}
z &= re^{j\varphi} \\
\overline{z} &= re^{-j\varphi}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
r^3 e^{j3\varphi} &= 4e^{j\pi/4} r e^{-j\varphi} \\
r^2 e^{j4\varphi} &= 4e^{j\pi/4}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4 \\
r &= 2 \\
4\varphi &= \pi/4 + 2k\pi \\
\varphi &= \frac{\pi}{16} + k\frac{2\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind somit

$$z = 2e^{j(\pi/16 + k2\pi/4)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Aufgabe 72. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sin(x)}{\tan(x/2)} = 1 + \cos(x).$$

Verwenden Sie nicht die Additionstheoreme sondern komplexe Zahlen. Hinweis: Erweitern Sie den Bruch mit

$$e^{jx/2} + e^{-jx/2}$$

und wenden Sie eine binomische Formel an.

Lösung von Aufgabe 72.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\tan(x/2)} &= \frac{\sin(x)\cos(x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{\frac{1}{4j}(e^{jx}-e^{-jx})(e^{jx/2}+e^{-jx/2})}{\frac{1}{2j}(e^{jx/2}-e^{-jx/2})} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(e^{jx}-e^{-jx})(e^{jx/2}+e^{-jx/2})}{e^{jx/2}-e^{-jx/2}}\end{aligned}$$

Erweitern mit

$$e^{jx/2}+e^{-jx/2}$$

liefert

$$\frac{1}{2}\frac{(e^{jx}-e^{-jx})(e^{jx/2}+e^{-jx/2})^2}{(e^{jx/2}-e^{-jx/2})(e^{jx/2}+e^{-jx/2})}$$

Im Nenner lässt sich die binomische Formel

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

anwenden. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{(e^{jx}-e^{-jx})(e^{jx}+2+e^{-jx})}{e^{jx}-e^{-jx}} &= \frac{1}{2}(2+e^{jx}+e^{-jx}) \\ &= 1+\cos(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 73. Die Funktion

$$f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=x^2$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Ist die Erweiterung

$$f\in\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \qquad f(z)=z^2$$

injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 73. Die Funktion ist nicht injektiv, da auch für komplexe Zahlen z gilt

$$f(z) = f(-z).$$

Die Funktion ist aber surjektiv. Sei $y\in\mathbb{C}$ beliebig. Sei

$$y = re^{j\varphi}, \qquad r\in\mathbb{R}, r\geq 0$$

die Darstellung von y in Polarkoordinaten. Dann gilt für

$$z = \sqrt{r}e^{j\varphi/2}$$

dass

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \\ &= \left(\sqrt{r}e^{j\varphi/2}\right)^2 \\ &= re^{j\varphi} \\ &= y. \end{aligned}$$

Somit existiert zu jedem $y \in \mathbb{C}$ ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = y$.

Aufgabe 74. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von allen Lösungen z der Gleichung

$$(z+1)^5 = 7.$$

Lösung von Aufgabe 74. Sei

$$z + 1 = re^{j\varphi}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left(re^{j\varphi}\right)^5 &= 7 \\ r^5 e^{j5\varphi} &= 7 \\ r &= \sqrt[5]{7} \\ 5\varphi &= 2k\pi \\ \varphi &= 2k\pi/5, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z + 1 &= \sqrt[5]{7}e^{j2k\pi/5} \\ &= \sqrt[5]{7}\cos(2k\pi/5) + j\sqrt[5]{7}\sin(2k\pi/5) \\ z &= \sqrt[5]{7}\cos(2k\pi/5) - 1 + j\sqrt[5]{7}\sin(2k\pi/5), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 75. Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|e^{jz}| = \frac{1}{e^{\mathrm{im}(z)}}.$$

Lösung von Aufgabe 75. Sei

$$z = a + jb.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |e^{jz}| &= |e^{j(a+jb)}| \\ &= |e^{ja}e^{-b}| \\ &= e^{-b} \\ &= \frac{1}{e^b} \\ &= \frac{1}{e^{\mathrm{im}(z)}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 76. Berechnen Sie

$$\int (\cos(t))^2 \, dt$$

in dem Sie die Cosinusfunktion durch komplexe e-Funktionen darstellen. Formen Sie das Ergebnis dann so weit um, bis keine komplexen Größen mehr darin auftreten.

Lösung von Aufgabe 76.

$$\begin{aligned}
\int (\cos(t))^2 \, dt &= \int \left(\frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int (e^{2jt} + e^{-2jt} + 2e^{jt}e^{-jt}) dt \\
&= \frac{1}{4}\int (e^{2jt} + e^{-2jt}) dt + \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2j}e^{2jt} + \frac{1}{-2j}e^{-2jt}\right) + \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{4}e^{2jt} - \frac{1}{4}e^{-2jt}\right) + \frac{t}{2} \\
&= \mathrm{im}\left(\frac{1}{4}e^{2jt}\right) + \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 77. Berechnen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$e^z = (1+j)^7.$$

Lösung von Aufgabe 77. Umrechnen in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}
(1+j)^7 &= \left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^7 \\
&= 2^{7/2}e^{j7\pi/4} \\
&= 2^{7/2}e^{-j\pi/4}.
\end{aligned}$$

Mit $z = a + jb$ ist

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{a+jb} \\
&= e^a e^{jb}.
\end{aligned}$$

Damit die Gleichung erfüllt ist, müssen auf beiden Seiten die Beträge gleich sein und die Winkel bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
e^a &= 2^{7/2} \\
b &= -\pi/4 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Vereinfachen ergibt

$$\begin{aligned} a &= \ln(2^{7/2}) \\ &= 7\ln(\sqrt{2}) \\ b &= (2k-1/4)\pi. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind somit

$$z = 7\ln(\sqrt{2}) + j(2k-1/2)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 78. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$u = \frac{z}{\overline{z}}.$$

Zeigen Sie, dass $|u| = 1$ und der Winkel von u gleich dem Winkel von z^2 ist.

Lösung von Aufgabe 78. Sei

$$z = re^{j\varphi}.$$

Dann ist

$$\overline{z} = re^{-j\varphi}$$

und

$$\begin{aligned} u &= \frac{z}{\overline{z}} \\ &= \frac{re^{j\varphi}}{re^{-j\varphi}} \\ &= e^{j\varphi}e^{j\varphi} \\ &= e^{j2\varphi}. \end{aligned}$$

Damit ist $|u| = 1$. Weiterhin gilt

$$z^2 = r^2 e^{j2\varphi}$$

so dass der Winkel von u und der Winkel von z^2 beide gleich 2φ sind.

17 Partialbruchzerlegung

Aufgabe 79. Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{\cos(x)(\sin(x)+2)}{\sin(x)^2-2\sin(x)+1}.$$

Hinweis: Substitution, Partialbruchzerlegung.

Lösung von Aufgabe 79. Substitution

$$u=\sin(x),\quad \frac{du}{dx}=\cos(x),\quad dx=\frac{du}{\cos(x)}.$$

$$\int \frac{\cos(x)(\sin(x)+2)}{\sin(x)^2-2\sin(x)+1}dx \;=\; \int \frac{u+2}{u^2-2u+1}du.$$

Faktorisierung des Nenners

$$u^2-2u+1 \;=\; (u-1)^2.$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{u+2}{(u-1)^2} &= \frac{c_1}{u-1}+\frac{c_2}{(u-1)^2}\\
u+2 &= c_1(u-1)+c_2\\
&= c_1u+c2-c1.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$c_1=1,\quad c_2=3.$$

Integration

$$\begin{aligned}
\int \frac{u+2}{u^2-2u+1}du &= \int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{3}{(u-1)^2}\right)du\\
&= \ln(|u-1|)-\frac{3}{u-1}+C\\
&= \ln(|\sin(x)-1|)-\frac{3}{\sin(x)-1}+C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 80. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\cos(x)}$$

im Intervall $-\pi/2 < x < \pi/2$. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten. Hinweis: Wenn Sie den Bruch zuerst mit $\cos(x)$ erweitern und ausnutzen, dass

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) \;=\; 1$$

ist, können Sie mit der Substitution $u=\sin(x)$ komplexe Zahlen vermeiden.

Lösung von Aufgabe 80.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Substitution.

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{1}{\cos(x)} du \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} dx &= \int \frac{\cos(x)}{1-u^2} \frac{1}{\cos(x)} du \\ &= \int \frac{1}{1-u^2} du. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} 1-u^2 &= (1-u)(1+u) \\ \frac{1}{1-u^2} &= \frac{C_1}{1-u} + \frac{C_2}{1+u} \\ 1 &= C_1(1+u) + C_2(1-u). \end{aligned}$$

- Sepezialfall $u = 1$ liefert $C_1 = 1/2$.
- Sepezialfall $u = -1$ liefert $C_2 = 1/2$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-u^2} du &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln|1-u| + \ln|1+u| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln|1-\sin(x)| + \ln|1+\sin(x)| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(1+\sin(x)) - \ln(1-\sin(x)) \right) + C \end{aligned}$$

Probe durch Ableiten.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin(x)) - \ln(1-\sin(x))\right)\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin(x)}\cos(x) - \frac{1}{1-\sin(x)}(-\cos(x))\right) \\
&= \frac{\cos(x)}{2}\left(\frac{1}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1-\sin(x)}\right) \\
&= \frac{\cos(x)}{2}\frac{(1-\sin(x)) + (1+\sin(x))}{1-\sin^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)}{2}\frac{2}{1-\sin^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

18 Vektoren

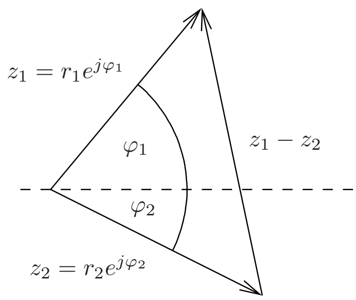
Aufgabe 81. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann als zweistelliger Vektor

$$z = \begin{pmatrix} \mathrm{re}(z) \\ \mathrm{im}(z) \end{pmatrix}$$

interpretiert und als Pfeil in der komplexen Ebene dargestellt werden. Die Seiten eines beliebigen Dreiecks können durch Pfeile dargestellt und somit durch komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{j\varphi_2} \end{aligned}$$

und $z_1 - z_2$ beschreiben werden, wobei $r_1, r_2 > 0$:



Der Satz des Pythagoras lässt sich nun wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 &= |z_1 - z_2|^2 \qquad \text{genau dann wenn} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras indem Sie die erste Gleichung so lang äquivalent umformen bis die zweite Gleichung dasteht. Sie brauchen hierfür u.a. die Gesetze für komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\overline{z} \\ z + \overline{z} &= 2\mathrm{re}(z). \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 81. Die Gleichung

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

wird wie folgt äquivalent umgeformt:

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 &= |r_1 e^{j\varphi_1} - r_2 e^{j\varphi_2}|^2 \\ r_1^2 + r_2^2 &= (r_1 e^{j\varphi_1} - r_2 e^{j\varphi_2})\overline{(r_1 e^{j\varphi_1} - r_2 e^{j\varphi_2})} \\ r_1^2 + r_2^2 &= (r_1 e^{j\varphi_1} - r_2 e^{j\varphi_2})(r_1 e^{-j\varphi_1} - r_2 e^{-j\varphi_2}) \\ r_1^2 + r_2^2 &= r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} - r_1 r_2 e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ 0 &= r_1 r_2 (e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)}) \\ 0 &= \mathrm{re}(e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}) \\ 0 &= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aufgabe 82. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

Sie dürfen dabei alle Gesetze der reellen Arithmetik verwenden — machen Sie aber deutlich an welcher Stelle Sie diese benutzen.

Lösung von Aufgabe 82. Zu zeigen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Folglich existieren $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)\vec{x} &= (a+b)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+b)x_1 \\ \vdots \\ (a+b)x_n \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multiplikation)} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_1 \\ \vdots \\ ax_n + bx_n \end{pmatrix} && \text{(Reelles Distributivgesetz)} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx_1 \\ \vdots \\ bx_n \end{pmatrix} && \text{(Def. Vektor Addition)} \\
&= a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multipliation)} \\
&= a\vec{x} + b\vec{x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 83. Sei

$$\vec{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{t+1} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Wert für t, für den $\|\vec{v}\|$ minimal ist.

Lösung von Aufgabe 83. Da die Euklidische Norm eines Vektors nie negativ ist, ist es egal ob man die Extremstelle von $\|\vec{v}\|$ oder von $\|\vec{v}\|^2$ berechnet. Substitution

$$u \quad = \quad e^t$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e^{t+1} \\ e^{-t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t e^1 \\ {}^1\!/\!_{e^t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ue \\ {}^1\!/\!_u \end{pmatrix} \\
\|\vec{v}\|^2 &= u^2 e^2 + {}^1\!/\!_{u^2} \\
\frac{d}{du}\|\vec{v}\|^2 &= 2ue^2 - {}^2\!/\!_{u^3}
\end{aligned}$$

Da $u \neq 0$ kann man wie folgt umformen.

$$\begin{aligned}
2ue^2 - {}^2\!/\!_{u^3} &= 0 \\
2u^4e^2 - 2 &= 0 \\
u^4e^2 &= 1 \\
u^4 &= e^{-2} \\
u &= e^{-1/2}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt $t = -1/2$.

Da die Funktion nur einen lokalen Extremwert hat und $\|\vec{v}\| \to \infty$ für $t \to \pm\infty$, muss es sich um ein Minimum handeln.

19 Skalarprodukt

Aufgabe 84. Stellen Sie den Term

$$ab + cd + ef$$

als Skalarprodukt von zwei Vektoren dar.

Lösung von Aufgabe 84.

$$ab + cd + ef = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

Aufgabe 85. Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^m$ orthogonale und normierte Vektoren, und $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$$

definiert. Zeigen Sie, dass dann

$$||f(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Sie dürfen alle in der Vorlesung bewiesenen Eigenschaften des Skalarprodukts und der Euklidischen Norm verwenden.

Lösung von Aufgabe 85. Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ orthogonal und normiert. Sei $\vec{x}$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||f(\vec{x})|| &= ||x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2|| \\ &= \sqrt{(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) \circ (x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2)} \\ &= \sqrt{x_1^2(\vec{a}_1 \circ \vec{a}_1) + x_2^2(\vec{a}_2 \circ \vec{a}_2) + 2x_1x_2(\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= ||\vec{x}||. \end{aligned}$$

Aufgabe 86. Beweisen Sie ausführlich, dass wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal sind, auch $a\vec{x}$ und $b\vec{y}$ orthogonal sind für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Hinweis: Zwei Vektoren sind orthogonal genau dann wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Lösung von Aufgabe 86. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, d.h. $\vec{x} \circ \vec{y} = 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a\vec{x} \circ b\vec{y} &= \sum_{i=1}^{n} ax_i\, by_i \\ &= (ab)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= (ab)\vec{x} \circ \vec{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

20 Matrizen

Aufgabe 87. Beweisen Sie ausführlich, dass

$$A(\vec{x} + \vec{y}) \quad = \quad A\vec{x} + A\vec{y}.$$

Sie dürfen die Gesetze der Vektorrechnung verwenden.

Lösung von Aufgabe 87.

$$\begin{aligned}
A(\vec{x} + \vec{y}) &= (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + y_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n + y_n\vec{a}_n \\
&= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n \\
&= (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= A\vec{x} + A\vec{y}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 88. Zeigen Sie, dass die Matrix Addition kommutativ ist.

Lösung von Aufgabe 88. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zu zeigen:

$$A + B = B + A.$$

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & \ldots & b_{1n} + a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & \ldots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}$$

Aufgabe 89. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 89.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 90. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Berechnung zuerst nach der Regel “Zeile mal Spalte” durch und danach unter Verwendung von Matrix-Vektor Multiplikationen.

Lösung von Aufgabe 90.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 91. Wie viele Multiplikationen von reellen Zahlen sind erforderlich um das Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ zu berechnen? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 91. Die Ergebnismatrix besteht aus mn Komponenten. Für jede Komponente ist das Skalarprodukt aus einer Zeile von A und einer Spalten von B zu berechnen, was k Multiplikationen kostet. Insgesamt sind somit kmn Multiplikationen erforderlich.

Aufgabe 92. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\hat{\vec{x}}$ eine Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\} \quad = \quad \{\hat{\vec{x}} + \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie die Gleichheit von Mengen definiert ist. Anschaulich bedeutet dies, dass man die Menge *aller* Lösungen des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ dadurch berechnen kann, dass man *eine* Lösung $\hat{\vec{x}}$ bestimmt und zu dieser die Lösungen des zugehörigen homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ addiert.

Lösung von Aufgabe 92. Es sind zwei Teilmengenbeziehungen zu zeigen.

- Zu zeigen:

$$\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\} \quad \subseteq \quad \{\hat{\vec{x}} + \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Sei

$$\vec{x}_b \quad \in \quad \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\},$$

d.h.

$$A\vec{x}_b = \vec{b}.$$

Zu zeigen:

$$\vec{x}_b \in \{\hat{\vec{x}} + \vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\},$$

d.h. es gibt einen Vektor $\vec{x}$ mit

$$\begin{aligned} \vec{x}_b &= \hat{\vec{x}} + \vec{x} \text{ und} \\ A\vec{x} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Mit der Wahl

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_b - \hat{\vec{x}}$$

gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}_b &= \hat{\vec{x}} + \vec{x}_0 \\ A\vec{x}_0 &= A(\vec{x}_b - \hat{\vec{x}}) \\ &= A\vec{x}_b - A\hat{\vec{x}} \\ &= \vec{b} - \vec{b} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

- Zu zeigen:

$$\{\hat{\vec{x}} + \vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \{\vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{b}\}.$$

Sei

$$\vec{x}_b \in \{\hat{\vec{x}} + \vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\},$$

d.h. es gibt einen Vektor $\vec{x}_0$ so dass

$$\begin{aligned} \vec{x}_b &= \hat{\vec{x}} + \vec{x}_0 \text{ und} \\ A\vec{x}_0 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Zu zeigen:

$$\vec{x}_b \in \{\vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{b}\},$$

d.h.

$$A\vec{x}_b = \vec{b}.$$

Mit den Annahmen über $\vec{x}_b$ gilt

$$\begin{aligned} A\vec{x}_b &= A(\hat{\vec{x}} + \vec{x}_0) \\ &= A\hat{\vec{x}} + A\vec{x}_0 \\ &= \vec{b} + \vec{0} \\ &= \vec{b}. \end{aligned}$$