Heilbronn, den 12.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2y-x, x^2) \\ g(x,y) &= y + \sin(x+y) \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Funktionsterm für die Komposition $g \circ f$.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g(2y-x, x^2) \\ &= x^2 + \sin(2y - x + x^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Komposition zweier injektiver Funktionen injektiv ist.

Lösung von Aufgabe 2. Seien $f \in A \to B$ und $g \in B \to C$ injektiv. Zu zeigen ist, dass $g \circ f$ injektiv ist.

Seien $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$. Zu zeigen ist, dass

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2).$$

Da f injektiv ist und $x_1 \neq x_2$ folgt

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Da g inkektiv ist und $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

und damit

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2).$$

Aufgabe 3. Sei

$$f \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Hat f eine Umkehrfunktion? Falls ja, berechnen Sie diese, falls nein, begründen Sie weshalb f keine Umkehrfunktion hat.

Lösung von Aufgabe 3. f ist bijektiv. Für $y \in \mathbb{R}_0^+$ erhält man das zugehörige $x \in \mathbb{R}_0^+$ durch Lösen der Gleichung.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{e^{\sqrt{x}} - 1} \\ y^2 &= e^{\sqrt{x}} - 1 \\ y^2 + 1 &= e^{\sqrt{x}} \\ \ln(y^2 + 1) &= \sqrt{x} \\ \ln(y^2 + 1)^2 &= x. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f^{-1} \in \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad f^{-1}(y) = \ln(y^2 + 1)^2.$$

Aufgabe 4. Definieren Sie eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $\hat{x} = 2$ stetig ist, dort aber nicht differenzierbar ist. Zeichnen Sie eine Skizze dieser Funktion in der Nähe von $\hat{x}$.

Lösung von Aufgabe 4. $f(x) = |x - 2|$.

Aufgabe 5. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$f \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f' \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = ax^{a-1}.$$

Sie dürfen hierbei die Ketteneregel verwenden und die Ableitung der e- und der ln-Funktion. Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} \left(e^{a \ln(x)}\right)' &= e^{a \ln(x)} (a \ln(x))' \\ &= x^a \, a \, \frac{1}{x} \\ &= ax^a \, x^{-1} \\ &= ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = \pi/2$ von

$$f(x) = \ln(\sin(x)).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 6. Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\sin(x)) \\ f'(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ f''(x) &= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = \pi/2$.

$$\begin{aligned} f(\pi/2) &= \ln(1) \\ &= 0 \\ f'(\pi/2) &= \frac{0}{1} \\ &= 0 \\ f''(\pi/2) &= -1. \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x - \pi/2)^2.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \cos(x)(\sin(x) + x).$$

Prüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten.

Lösung von Aufgabe 7. Ausmultiplizieren ergibt

$$f(x) = \cos(x)\sin(x) + x\cos(x)$$

- Berechnung von

  $$\int \cos(x)\sin(x)dx$$

  mit Substitution

  $$u = \sin(x), \qquad \frac{du}{dx} = \cos(x), \qquad dx = \frac{1}{\cos(x)}du.$$

  Damit ist

  $$\begin{aligned} \int \cos(x)\sin(x)dx &= \int \cos(x)u\frac{1}{\cos(x)}du \\ &= \int udu \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(x). \end{aligned}$$

- Berechnung von

$$\int x\cos(x)dx$$

mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x).\end{aligned}$$

Damit ist

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\sin^2(x) + x\sin(x) + \cos(x)$$

eine Stammfunktion von $f(x)$.

Probe:

$$\begin{aligned}F'(x) &= \sin(x)\cos(x) + \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)\cos(x) + x\cos(x) \\ &= \cos(x)(\sin(x) + x).\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\int_0^{\ln(\pi)} e^{1+x}\sin(e^x)dx$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Nutzen Sie die Rechengesetze der e-Funktion und wenden Sie eine Substitution an.

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned}\int e^{1+x}\sin(e^x)dx &= \int ee^x\sin(e^x)dx \\ &= e\int e^x\sin(e^x)dx.\end{aligned}$$

Substitution:

$$u = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{du}{e^x}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}e\int e^x\sin(e^x)dx &= e\int \sin(u)du \\ &= -e\cos(u) + C \\ &= -e\cos(e^x) + C\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(\pi)} e^{1+x}\sin(e^x)dx &= [-e\cos(e^x)]_0^{\ln(\pi)} \\ &= -e(\cos(\pi) - \cos(1)) \\ &= -e(-1 - \cos(1)) \\ &= e + e\cos(1)\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-4}.$$

Lösung von Aufgabe 9. Polynomdivision.

$$x^3+4 : x^2-4 = x + \frac{4x+4}{x^2-4}$$

Faktorisierung des Nenners:

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

Partialbruchzerlegung des gebrochenen Rests.

$$\begin{aligned} \frac{4x+4}{(x-2)(x+2)} &= \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x+2} \\ 4x+4 &= c_1(x+2) + c_2(x-2) \end{aligned}$$

Spezialfall $x = 2$

$$\begin{aligned} 12 &= 4c_1 \\ c_1 &= 3 \end{aligned}$$

Spezialfall $x = -2$

$$\begin{aligned} -4 &= -4c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = x + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3\ln(|x-2|) + \ln(|x+2|)$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) = e^x(1+x)\sin(xe^x).$$

Hinweis: Substitution.

Lösung von Aufgabe 10. Mit

$$\begin{aligned} g &= xe^x \\ \frac{dg}{dx} &= e^x + xe^x \\ &= e^x(1+x) \\ dx &= \frac{1}{e^x(1+x)}dg \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\int e^x(1+x)\sin(xe^x)dx &= \int e^x(1+x)\sin(g)\frac{1}{e^x(1+x)}dg\\ &= \int \sin(g)dg\\ &= -\cos(g)+C\\ &= -\cos(xe^x).\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie

$$\int \cos^4(x)\tan(x)dx.$$

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x)\tan(x)dx &= \int \cos^4(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx\\ &= \int \cos^3(x)\sin(x)dx.\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}g &= \cos(x)\\ \frac{dg}{dx} &= -\sin(x)\\ dx &= -\frac{1}{\sin(x)}dg\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\sin(x)dx &= \int g^3\sin(x)\left(-\frac{1}{\sin(x)}\right)dg\\ &= -\int g^3 dg\\ &= -\frac{1}{4}g^4+C\\ &= -\frac{1}{4}\cos^4(x)+C.\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei $x\in\mathbb{R}$ und

$$z = \frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1+j)}.$$

Berechnen Sie $|z|$ in Abhängigkeit von x.

Lösung von Aufgabe 12.

$$
\begin{aligned}
|z| &= \left|\frac{e^{j(x+1)}}{e^x(1+j)}\right| \\
&= \frac{|e^{j(x+1)}|}{|e^x(1+j)|} \\
&= \frac{1}{|e^x|\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{e^x\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie für beliebige Konstanten a, ω

$$
\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt.
$$

Hinweis: Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Sie brauchen hierfür die Gesetze der komplexen Zahlen, insbesondere

$$
\begin{aligned}
z - \overline{z} &= 2j\text{im}(z) \\
\text{im}(e^{j\varphi}) &= \sin(\varphi).
\end{aligned}
$$

Berücksichtigen Sie auch den Spezialfall $\omega = 0$. Verwenden Sie die si-Funktion, die definiert ist durch

$$
\text{si}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}
$$

Das Ergebnis ist dann $2a\text{si}(\omega a)$.

Lösung von Aufgabe 13. Der Spezialfall $\omega = 0$ wird separat betrachtet, da im folgenden Rechenweg durch ω dividiert wird.

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega t}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}\right).
\end{aligned}
$$

Da $e^{j\omega a}$ und $e^{-j\omega a}$ konjugiert komplex sind, ist

$$
\begin{aligned}
e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} &= 2j\text{im}(e^{j\omega a}) \\
&= 2j\sin(\omega a).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} 2j\sin(\omega a) \\
&= \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) \\
&= 2a\frac{\sin(\omega a)}{\omega a} \\
&= 2a\text{si}(\omega a).
\end{aligned}
$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt &= \int_{-a}^{a} 1 dt \\
&= 2a \\
&= 2a \mathrm{si}(\omega a).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{-a}^{a} e^{j\omega t} dt = 2a \mathrm{si}(\omega a)$$

für alle a, ω.

Aufgabe 14. Sei

$$z = \frac{1}{1 + e^{j\varphi}}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{re}(z)$. Hinweis: Das Ergebnis ist unabhängig von φ.

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{1 + \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)} \\
&= \frac{1 + \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)} \\
&= \frac{1 + \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)}{1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\
&= \frac{1 + \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)}{2 + 2\cos(\varphi)} \\
\mathrm{re}(z) &= \frac{1 + \cos(\varphi)}{2 + 2\cos(\varphi)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung

$$(z + 1)^{10} = j + 1.$$

Kann man sagen, dass die Lösungen auf einem Kreis in der komplexen Ebene liegen?

Lösung von Aufgabe 15. Sei

$$z + 1 = re^{j\varphi}.$$

Dann ist

$$(z + 1)^{10} = r^{10} e^{j10\varphi}.$$

Mit

$$j+1 \quad = \quad \sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

ist die Gleichung

$$r^{10}e^{j10\varphi} \quad = \quad \sqrt{2}e^{j\pi/4}.$$

Aus der Gleichheit der Beträge folgt

$$\begin{aligned} r^{10} &= \sqrt{2} \\ r &= 2^{1/20}. \end{aligned}$$

Die Winkel müssen gleich sein bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, d.h.

$$\begin{aligned} 10\varphi &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \varphi &= \frac{\pi}{40} + \frac{1}{10}2k\pi \\ &= (1+8k)\pi/40, \qquad k = 0, 1, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z+1 &= 2^{1/20}e^{j(1+8k)\pi/40} \\ z &= 2^{1/20}e^{j(1+8k)\pi/40} - 1 \\ &= \underbrace{2^{1/20}\cos((1+8k)\pi/40) - 1}_{\text{Realteil}} + j\,\underbrace{2^{1/20}\sin((1+8k)\pi/40)}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

Die Lösungen liegen auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit Radius $2^{1/20}$. Der Mittelpunkt ist allerdings nicht der Koordinatenursprung sondern die reelle Zahl -1.

Aufgabe 16. Berechnen Sie für eine beliebige Konstante $s \in \mathbb{C}$ die Integrale

$$\int_0^\infty e^{jt}e^{-st}dt$$
$$\int_0^\infty e^{-jt}e^{-st}dt$$
$$\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt.$$

Hinweis:

- Stellen Sie die Cosinusfunktion durch komplexe e-Funkionen dar und nutzen Sie die Linearität des Integrals.
- Da die Obergrenze ∞ ist, muss ein Grenzwert berechnet werden. Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + jb$ gilt

$$\begin{aligned} e^{zt} &= e^{(a+jb)t} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + j\sin(bt)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} e^{zt} \quad = \quad 0$$

falls $\mathrm{re}(z) < 0$ und undefiniert sonst. Zeigen Sie damit, dass die Integrale genau dann existieren, wenn $\mathrm{re}(s) > 0$.

Lösung von Aufgabe 16.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{jt}e^{-st}dt &= \int_0^\infty e^{(j-s)t}dt \\
&= \frac{1}{j-s}\left[e^{(j-s)t}\right]_0^\infty .
\end{aligned}$$

Sei $z = j - s$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{(j-s)t} &= \lim_{t\to\infty} e^{zt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

falls $\mathrm{re}(z) < 0$ bzw. $\mathrm{re}(j - s) < 0$. Dies ist genau dann der Fall wenn $\mathrm{re}(s) > 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j-s}\left[e^{(j-s)t}\right]_0^\infty &= \frac{1}{j-s}(0 - e^{(j-s)0}) \\
&= \frac{1}{s-j}
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\int_0^\infty e^{-jt}e^{-st}dt = \frac{1}{s+j}$$

falls $\mathrm{re}(s) > 0$ und undefiniert sonst. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(t)e^{-st}dt &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{jt} + e^{-jt})e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{jt}e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-jt}e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right) \\
&= \frac{1}{2(s^2-j^2)}(s + j + s - j) \\
&= \frac{2s}{2(s^2+1)} \\
&= \frac{s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Sie dürfen dabei alle Gesetze der reellen Arithmetik verwenden — machen Sie aber deutlich an welcher Stelle Sie diese benutzen.

Lösung von Aufgabe 17. Zu zeigen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Folglich existieren $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
& a(\vec{x} + \vec{y}) \\
&= a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \\
&= a\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} && \text{(Def. Vektor Addition)} \\
&= \begin{pmatrix} a(x_1 + y_1) \\ \vdots \\ a(x_n + y_n) \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multiplikation)} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 + ay_1 \\ \vdots \\ ax_n + ay_n \end{pmatrix} && \text{(Reelles Distributivgesetz)} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 \\ \vdots \\ ay_n \end{pmatrix} && \text{(Def. Vektor Addition)} \\
&= a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} && \text{(Def. skalare Multipliation)} \\
&= a\vec{x} + a\vec{y}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie den Gauß Algorithmus wie im Skript durch. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.
- Stellen Sie die Lösungsmenge als Summe aus einem Ortsvektor und beliebigen Linearkombinationen von Richtungsvektoren dar.

Lösung von Aufgabe 18.

$$\begin{array}{ccc|c}
3 & 6 & 0 & 6 \\
2 & 4 & 3 & -5 \\
1 & 2 & 2 & -4 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 4 & 3 & -5 \\
1 & 2 & 2 & -4 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 3 & -9 \\
 & & 2 & -6 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 1 & -3 \\
 & & 2 & -6 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & 1 & -3 \\
 & & 0 & 0
\end{array}$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}
x_3 &= -3 \\
x_2 &= \text{beliebig} \\
x_1 &= 2 - 2x_2
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 2x_2 \\ x_2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 19. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und

$$M = \{\vec{x} \mid \vec{x} \circ \vec{u} = 0 \text{ und } \vec{x} \circ \vec{v} = 0\}.$$

Anschaulich ist M die Menge aller Vektoren, die senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind.

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplilation, d.h.

- Wenn $\vec{x} \in M$ und $\vec{y} \in M$ sind, dann ist auch $\vec{x} + \vec{y} \in M$.
- Wenn $\vec{x} \in M$ und $a \in \mathbb{R}$, dann ist auch $a\vec{x} \in M$.

Lösung von Aufgabe 19.

- Seien $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \circ \vec{u} &= \vec{0} \\
\vec{x} \circ \vec{v} &= \vec{0} \\
\vec{y} \circ \vec{u} &= \vec{0} \\
\vec{y} \circ \vec{v} &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Zu zeigen: $\vec{x} + \vec{y} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{u} &= \vec{0} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{v} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Mit den Rechengesetzen des Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{u} &= \vec{x} \circ \vec{u} + \vec{y} \circ \vec{u} \\ &= \vec{0} + \vec{0} \\ &= \vec{0}. \\ (\vec{x} + \vec{y}) \circ \vec{v} &= \vec{x} \circ \vec{v} + \vec{y} \circ \vec{v} \\ &= \vec{0} + \vec{0} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

- Sei $\vec{x} \in M$ und $a \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{u} &= \vec{0} \\ \vec{x} \circ \vec{v} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Zu zeigen: $a\vec{x} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} (a\vec{x}) \circ \vec{u} &= \vec{0} \\ (a\vec{x}) \circ \vec{v} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Mit den Rechengesetzen des Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned} (a\vec{x}) \circ \vec{u} &= a(\vec{x} \circ \vec{u}) \\ &= a0 \\ &= 0. \\ (a\vec{x}) \circ \vec{v} &= a(\vec{x} \circ \vec{v}) \\ &= a0 \\ &= 0. \end{aligned}$$