Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 10

Aufgabe 1. Ist die Funktion

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

linear? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 1. Die Funktion ist nicht linear. Es gilt z.B. für $x = 2$ und $y = -3$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= |x+y| = |-1| = 1 \\ f(x)+f(y) &= |x|+|y| = 2+3 = 5. \end{aligned}$$

Die erste Linearitätsbedingung ist damit nicht erfüllt.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Entscheiden Sie von beiden Linearitätsbedingungen, ob f sie erfüllt. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 2. f erfüllt beide Linearitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{y}) &= A(\vec{x}+\vec{y}) \\ &= A\vec{x}+A\vec{y} \\ &= f(\vec{x})+f(\vec{y}) \\ f(u\vec{x}) &= A(u\vec{x}) \\ &= uA\vec{x} \\ &= uf(\vec{x}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Lösung von Aufgabe 3. Durch Integration auf beiden Seiten erhält man

$$y'' + 2y' + y = K.$$

Lösen der homogenen DGL

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Die rechte Seite ist so einfach, dass man die allgemeine inhomogene Lösung direkt angeben kann:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + K, \qquad C_1, C_2, K \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$y' + y = e^x \cos(x).$$

Im Ergebnis dürfen keine komplexen Zahlen auftreten.

Lösung von Aufgabe 4. Umformen der rechten Seite.

$$\begin{aligned} e^x \cos(x) &= \mathrm{re}(e^x e^{jx}) \\ &= \mathrm{re}(e^{x(1+j)}) \end{aligned}$$

Lösung der DGL

$$y' + y = e^{x(1+j)}.$$

Ansatz.

$$\begin{aligned} y &= ce^{x(1+j)} \\ y' &= c(1+j)e^{x(1+j)}. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} ce^{x(1+j)}(2+j) &= e^{x(1+j)} \\ c(2+j) &= 1 \\ c &= \frac{1}{2+j} \\ &= \frac{2-j}{5}. \end{aligned}$$

Lösung der komplexen DGL

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{5}(2-j)e^{x(1+j)} \\ &= \frac{1}{5}e^x(2-j)e^{jx} \end{aligned}$$

Realteil hiervon ist die Lösung der gegebenen DGL.

$$y = \frac{1}{5}e^x(2\cos(x) + \sin(x)).$$

Aufgabe 5. Außer den in der Vorlesung vorgestellten Ansätzen für Störfunktionen bei linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gibt es auch einen Ansatz für rechte Seiten der Form

$$r(x) = p(x)e^{\mu x}$$

wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Der Ansatz ist dann

$$y(x) = q(x)e^{\mu x}$$

wobei $q(x)$ ein Polynom vom gleichen Grad ist wie $p(x)$. Ist μ eine s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann ist der Ansatz

$$y(x) = x^s q(x)e^{\mu x}.$$

Berechnen Sie hiermit die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

Lösung von Aufgabe 5. Allgemeine homogene Lösung. Ansatz

$$y' + y = 0$$

führt zum charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1. \end{aligned}$$

Allgemeine homogene Lösung ist

$$y_H(x) = Ce^{-x}.$$

Ansatz für die inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} y &= (ax^2 + bx + c)e^x \\ y' &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x &= (x^2 + 1)e^x \\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + 2c + b &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2a + 2b &= 0 \\ 2c + b &= 1. \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist damit

$$y_P(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Die allgemeien Lösung ist

$$y(x) = Ce^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Aufgabe 6. Ein ungedämpftes Feder-Masse-System erfüllt die DGL

$$my'' + Dy = 0.$$

Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω, mit der man dieses System anregen muss, um Resonanz zu erhalten. Berechnen Sie dann für dieses ω eine partikuläre Lösung der DGL

$$my'' + Dy = \cos(\omega x).$$

Lösung von Aufgabe 6. Resonanz tritt bei der Frequenz ω auf, für die $j\omega$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} m\lambda^2 + D &= 0 \\ \lambda^2 &= -\frac{D}{m} \\ \lambda &= \pm\sqrt{-\frac{D}{m}} \\ &= \pm j\sqrt{\frac{D}{m}}. \end{aligned}$$

Resonanz hat man folglich bei Anregungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Lösung der DGL

$$my'' + Dy = \cos(\omega x).$$

Ansatz im Resonanzfall

$$\begin{aligned} y &= x(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)) \\ y' &= a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) + x\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) \\ y'' &= \omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) + \omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) + x\omega^2(-a\cos(\omega x) - b\sin(\omega x)) \\ &= 2\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) - x\omega^2(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)) \\ &= 2\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) - \omega^2 y \\ &= 2\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) - \frac{D}{m}y. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} my'' + Dy &= 2m\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) - Dy + Dy \\ &= 2m\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$2m\omega(-a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)) = \cos(\omega x).$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} -2m\omega a &= 0 \\ 2m\omega b &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{1}{2m\omega} \\ &= \frac{1}{2m\sqrt{\frac{D}{m}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{mD}} \end{aligned}$$

Die Lösungsfunktion ist somit

$$y = \frac{x}{2\sqrt{mD}} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}x\right).$$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 9y = 2x^2 + x + 3$$

Lösung von Aufgabe 7. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + 9y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = 3j, \quad \lambda_2 = -3j.$$

Komplexe Lösungsfunktion

$$y(x) = e^{3jx}.$$

Relle Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = \cos(3x), \quad y_2(x) = \sin(3x).$$

Allgemeine homogene Lösung

$$y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2 x \\ y''(x) &= 2c_2. \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} 2c_2 + 9(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) &= 2x^2 + x + 3 \\ x^2(9c_2 - 2) + x(9c_1 - 1) + 9c_0 + 2c_2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 9c_2 - 2 &= 0 \\ 9c_1 - 1 &= 0 \\ 9c_0 + 2c_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} c_2 &= 2/9 \\ c_1 &= 1/9 \\ c_0 &= (3 - 4/9)/9 = 23/81. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{23}{81} + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' - 2\sin(x)\cos(x)y = e^{-\cos^2(x)}.$$

Lösung von Aufgabe 8. Es handelt sich um eine lineare DGL erster Ordnung. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y' - 2\sin(x)\cos(x)y = 0.$$

Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} y' &= 2\sin(x)\cos(x)y \\ \frac{1}{y}dy &= 2\sin(x)\cos(x)dx. \end{aligned}$$

Berechnung von

$$\int 2\sin(x)\cos(x)dx$$

durch Substitution.

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{1}{\cos(x)} du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int 2\sin(x)\cos(x)dx &= \int 2u\cos(x)\frac{1}{\cos(x}du \\ &= \int 2udu \\ &= u^2 + C \\ &= \sin^2(x) + C. \end{aligned}$$

Integration der DGL.

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \sin^2(x) + C \\ |y| &= e^{\sin^2(x)+C} \\ &= Ke^{\sin^2(x)}, \quad K \in R^+ \\ y &= \pm Ke^{\sin^2(x)} \\ &= Ke^{\sin^2(x)}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$\begin{aligned} y &= k(x)e^{\sin^2(x)} \\ y' &= k'(x)e^{\sin^2(x)} + 2\sin(x)\cos(x)k(x)e^{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} k'(x)e^{\sin^2(x)} + 2\sin(x)\cos(x)k(x)e^{\sin^2(x)} & \\ -2\sin(x)\cos(x)k(x)e^{\sin^2(x)} &= e^{-\cos^2(x)} \\ k'(x)e^{\sin^2(x)} &= e^{-\cos^2(x)} \\ k'(x) &= e^{-\cos^2(x)}e^{-\sin^2(x)} \\ k'(x) &= e^{-(\sin^2(x)+\cos^2(x))} \\ k'(x) &= e^{-1} \\ k(x) &= \frac{x}{e} + C. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz.

$$y(x) = \left(\frac{x}{e} + C\right) e^{\sin^2(x)}.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$1 + \frac{\cos(x+2)y^2}{y'\, e^{1/y}} = 0.$$

Lösung von Aufgabe 9. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+2)y^2}{e^{1/y}y'} &= -1 \\
\cos(x^2)y^2 &= -e^{1/y}y' \\
y' &= -\cos(x+2)e^{-1/y}y^2.
\end{aligned}$$

Die DGL ist somit separierbar.

$$\frac{1}{y^2}e^{1/y}dy = -\cos(x+2)dx.$$

Berechnen von

$$\int \frac{1}{y^2}e^{1/y}dy$$

durch Substitution

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{y} \\
\frac{du}{dy} &= -\frac{1}{y^2} \\
dy &= -y^2du
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2}e^{1/y}dy &= \int \frac{1}{y^2}e^u(-y^2du) \\
&= -\int e^u du \\
&= -e^u \\
&= -e^{1/y}.
\end{aligned}$$

Integral auf der rechten Seite.

$$\int -\cos(x+2)dx = -\sin(x+2).$$

Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
-e^{1/y} &= -\sin(x+2)+C \\
e^{1/y} &= \sin(x+2)+C \\
\frac{1}{y} &= \ln(\sin(x+2)+C) \\
y &= \frac{1}{\ln(\sin(x+2)+C)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$y'' + 4y' + 5y = \sin(x).$$

Lösung von Aufgabe 10. Für die rechte Seite gilt

$$\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

- Partikuläre Lösung für

$$y'' + 4y' + 5y = e^{jx}.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} y &= ce^{jx} \\ y' &= jce^{jx} \\ y'' &= -ce^{jx} \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} -ce^{jx} + 4jce^{jx} + 5ce^{jx} &= e^{jx} \\ -c + 4jc + 5c &= 1 \\ c(4+4j) &= 1 \\ c &= \frac{1}{4+4j}. \end{aligned}$$

Lösung

$$y_1 = \frac{1}{4+4j}e^{jx}.$$

- Partikuläre Lösung für

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-jx}.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} y &= ce^{-jx} \\ y' &= -jce^{-jx} \\ y'' &= -ce^{-jx} \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} -ce^{-jx} - 4jce^{-jx} + 5ce^{-jx} &= e^{-jx} \\ -c - 4jc + 5c &= 1 \\ c(4-4j) &= 1 \\ c &= \frac{1}{4-4j}. \end{aligned}$$

Lösung

$$y_2 = \frac{1}{4-4j}e^{-jx} = \overline{y_1}$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $\sin(x)$

$$\begin{aligned}
y_P &= \frac{1}{2j}(y_1 - y_2) \\
&= \frac{1}{2j}(y_1 - \overline{y_1}) \\
&= \operatorname{im}(y_1) \\
&= \operatorname{im}\left(\frac{1}{4+4j}e^{jx}\right) \\
&= \operatorname{im}\left(\frac{1}{8}(1-j)(\cos(x) + j\sin(x)\right) \\
&= \frac{1}{8}(\sin(x) - \cos(x)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Gegeben Sei die DGL

$$y' = \sqrt{x + y^2}$$

sowie der Wert $y(3) = 2$. Berechnen Sie näherungsweise $y(3 + \Delta x)$ für $\Delta x = 0.01$.

Lösung von Aufgabe 11. Aus der DGL erhält man

$$\begin{aligned}
y'(3) &= \sqrt{3 + y(3)^2} \\
&= \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y(3 + \Delta x) &\approx y(3) + y'(3)\Delta x \\
&= 2 + \sqrt{7}\Delta x \\
&\approx 2.026
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + xy\cos(x^2) = x\cos(x^2).$$

Lösung von Aufgabe 12. Umformen ergibt

$$y' = x\cos(x^2)(1 - y)$$

Es handelt sich um eine separierbare DGL erster Ordnung. Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-y}dy &= x\cos(x^2)dx \\
\frac{1}{y-1}dy &= -x\cos(x^2)dx
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned}
\ln|y-1| &= -\frac{1}{2}\sin(x^2) + C \\
|y-1| &= Ke^{-\sin(x^2)/2}, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\
y - 1 &= Ke^{-\sin(x^2)/2}, \qquad K \in \mathbb{R} \\
y &= 1 + Ke^{-\sin(x^2)/2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y = \cos^2(x).$$

Lösung von Aufgabe 13. Mit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

gilt

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \frac{1}{4}(e^{2jx} + 2 + e^{-2jx}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{2jx} + e^{-2jx}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{re}(e^{2jx})\right)
\end{aligned}$$

- Partikuläre Lösung von

  $$y'' + y = 1.$$

  Lösung mit Polynomansatz $y = a_0$ ergibt

  $$y_1 = 1.$$

- Partikuläre Lösung von

  $$y'' + y = e^{2jx}.$$

  Ansatz

  $$\begin{aligned}
  y(x) &= ce^{2jx} \\
  y'(x) &= 2jce^{2jx} \\
  y''(x) &= -4ce^{2jx}.
  \end{aligned}$$

  Einsetzen

  $$\begin{aligned}
  -4ce^{2jx} + ce^{2jx} &= e^{2jx} \\
  -4c + c &= 1 \\
  -3c &= 1 \\
  c &= -\frac{1}{3}
  \end{aligned}$$

  Lösung

  $$y_2 = -\frac{1}{3}e^{2jx}.$$

- Partikuläre Lösung von

  $$y'' + y = \mathrm{re}(e^{2jx}).$$

  Lösung

  $$\begin{aligned}
  y_3 &= \mathrm{re}(y_2) \\
  &= -\frac{1}{3}\cos(2x).
  \end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2x). \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = -y\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Lösung von Aufgabe 14. Trennung der Variablen.

$$-\frac{1}{y}dy = \left(x + \frac{1}{x}\right)dx.$$

Integration.

$$\begin{aligned} -\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C \\ e^{-\ln|y|} &= e^{x^2/2 + \ln|x| + C} \\ \frac{1}{|y|} &= e^{x^2/2}|x|K, \qquad K > 0 \\ |y| &= \frac{K}{e^{x^2/2}|x|} \\ y &= \frac{\pm K}{e^{x^2/2}|x|} \\ &= \frac{K}{e^{x^2/2}|x|}, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Die Funktion $f(x) = e^x$ hat die Eigenschaft, dass

$$f'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Gibt es weitere Funktionen mit dieser Eigenschaft?
- Finden Sie alle Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f''(x) = f(x).$$

- Finden Sie alle Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f'''(x) = f(x).$$

  Hinweis:

$$\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2, \qquad \cos(2\pi/3) = -1/2.$$

Lösung von Aufgabe 15.

- Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$f'(x) - f(x) = 0.$$

Da dies eine homogene, lineare DGL erster Ordnung ist, ist die Lösungsmenge ein eindimensionaler Vektorraum. Eine Basisfunktion ist $f(x) = e^x$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$f(x) = Ce^x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$f''(x) - f(x) = 0.$$

Mit dem Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

und damit die Basislösungen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x \\ f_2(x) &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist daher

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$f'''(x) - f(x) = 0.$$

Mit dem Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - 1 = 0.$$

Sei $\lambda = re^{j\varphi}$. Dann ist

$$r^3 e^{j3\varphi} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ 3\varphi &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= k\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Unterschiedliche Werte für λ erhält man nur für $k = 0, 1, 2$. Damit sind die 3 Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= e^{j2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + j\sin(2\pi/3) = = -1/2 + j\sqrt{3}/2 \\ \lambda_3 &= e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = \overline{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Man erhält somit eine reelle Basislösung

$$f_1(x) \quad = \quad e^x$$

und ein konjugiert komplexes Basislösungspaar

$$\begin{aligned} f_C(x) &= e^{(-1/2 \pm j\sqrt{3}/2)x} \\ &= e^{-x/2}\big(\cos(\sqrt{3}x/2) \pm j\sin(\sqrt{3}x/2)\big) \end{aligned}$$

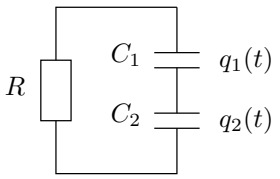
mit den beiden reellen Basislösungen

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \mathrm{re}(f_C(x)) \;=\; e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) \\ f_3(x) &= \mathrm{im}(f_C(x)) \;=\; e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$f(x) \quad = \quad C_1 e^x + e^{-x/2}\big(C_2\cos(\sqrt{3}x/2) + C_3\sin(\sqrt{3}x/2)\big)$$

Aufgabe 16. Zwei in Serie geschaltete Kondensatoren mit Kapazitäten C_1 und C_2 entladen sich über einen Widerstand R. Die Ladung der Kondensatoren sei $q_1(t)$ bzw. $q_2(t)$.



Da die Stromstärke überall gleich ist, gilt

$$q_1'(t) \quad = \quad q_2'(t) \qquad \text{für alle } t.$$

- Drücken Sie damit $q_2(t)$ in Abhängigkeit von $q_1(t)$ aus.
- Stellen Sie dann mit Hilfe der Maschenregel eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung für $q_1(t)$ auf und lösen Sie diese.
- Verifizieren Sie mit Ihren Lösungen für $q_1(t)$ und $q_2(t)$, dass die Summe der Spannungen an den Kondensatoren für $t \to \infty$ Null ergibt.
- Welche Bedingung muss für die Startladung der Kondensatoren gelten, damit

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) \quad = \quad 0?$$

Hinweis: Die Lösungsfunktionen lassen sich mit Hilfe der Ersatzkapazität

$$C \quad = \quad \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 16. Da

$$q_1'(t) = q_2'(t),$$

existiert eine Konstante Q so dass

$$q_2(t) = q_1(t) + Q$$

für alle t. Hierbei ist Q die Ladungsdifferenz der Kondensatoren, die unabhängig von der Zeit konstant ist. Aus der Maschenregel folgt

$$\begin{aligned} Rq_1'(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_2(t)}{C_2} &= 0 \\ Rq_1'(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_1(t)+Q}{C_2} &= 0 \\ Rq_1'(t) + q_1(t)\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) &= -\frac{Q}{C_2}. \end{aligned}$$

Lösung der homogenen DGL.

$$Rq_1'(t) + q_1(t)\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 0.$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= e^{\lambda t} \\ q_1'(t) &= \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} R\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) &= 0 \\ R\lambda + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = -\frac{1}{RC}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$q_1(t) = Ke^{-t/(RC)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre lösung der Inhomogenen DGL. Ansatz:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= a \\ q_1'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) &= -\frac{Q}{C_2} \\ a\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} &= -\frac{Q}{C_2} \\ a &= -Q\frac{C_1}{C_1 + C_2}. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= Ke^{-t/(RC)} - Q\frac{C_1}{C_1+C_2} \\
q_2(t) &= q_1(t) + Q \\
&= Ke^{-t/(RC)} - Q\frac{C_1}{C_1+C_2} + Q \\
&= Ke^{-t/(RC)} + Q\frac{-C_1}{C_1+C_2} + Q\frac{C_1+C_2}{C_1+C_2} \\
&= Ke^{-t/(RC)} + Q\frac{C_2}{C_1+C_2}.
\end{aligned}$$

Für $t \to \infty$ sind die Spannungen U_1 bzw. U_2 an den Kondensatoren

$$\begin{aligned}
U_1 &= \lim_{t\to\infty} \frac{q_1(t)}{C_1} = -Q\frac{1}{C_1+C_2} \\
U_2 &= \lim_{t\to\infty} \frac{q_2(t)}{C_2} = Q\frac{1}{C_1+C_2}
\end{aligned}$$

und daher $U_1 + U_2 = 0$.

Damit

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) = 0$$

gilt, muss $Q = 0$ sein, d.h. die Startladung der beiden Kondensatoren muss gleich sein.

Aufgabe 17. Die Sprungfunktion $\sigma \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

Tritt die Sprungfunktion in einem bestimmten Integral auf, lassen sich die Integrationsgrenzen einschränken und die Sprungfunktion im Integrand eliminieren.

- So ist z.B.

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau$$

  da $\sigma(\tau) = 0$ für negative τ.
- Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ soll

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

  vereinfacht werden. Zunächst wird untersucht, für welche τ das Argument der Sprungfunktion negativ ist. Die Ungleichung

  $$t - \tau < 0$$

wird umgeformt zu

$$\tau \quad > \quad t.$$

Folglich ist $\sigma(t-\tau) = 0$ für $\tau > t$ und die Obergrenze des Integrals kann auf t abgesenkt werden. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau.$$

- Schwieriger ist die Situation, wenn die Integrationsgrenzen nicht im Unendlichen liegen. Vereinfacht werden soll

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Zunächst ist klar, dass nur über $\tau \geq 0$ integriert wird.

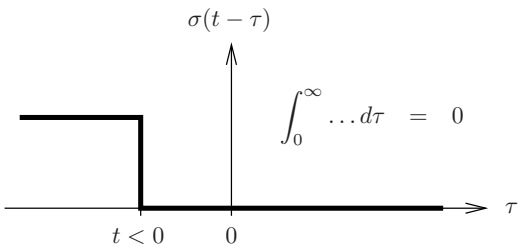
  - Ist t negativ, dann ist auch $t-\tau$ negativ und $\sigma(t-\tau) = 0$ im gesamten Integrationsbereich. In diesem Fall ist

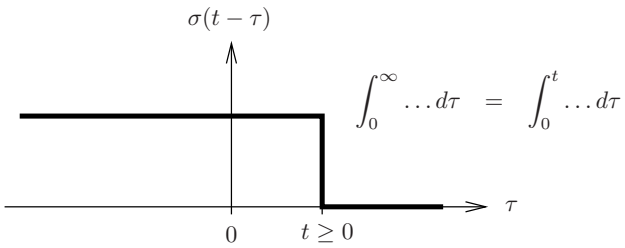
$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad = \quad 0.$$

  - Ist $t \geq 0$ kann das Integral mit der gleichen Argumentation wie im vorigen Beispiel eingeschränkt werden und es gilt

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad = \quad \int_{0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Wenn man sich die Funktion $\sigma(t-\tau)$ für festes t in Abhängigkeit von τ anschaut, wird dies deutlich.





Beide Fälle kann man mit der Sprungfunktion zusammenfassen zu

$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad = \quad \sigma(t) \int_{0}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Vereinfachen Sie in gleicher Weise die folgenden Integrale.

$$\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t+\tau) f(\tau) d\tau$$
$$\int_{0}^{\infty} \sigma(t+1-\tau) f(\tau) d\tau$$
$$\int_{1}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ \int_0^t f(\tau) d\tau & \text{falls } t \geq 0 \end{cases} \\
&= \sigma(t) \int_0^t f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t+\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-t}^{\infty} f(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \sigma(t+1-\tau) f(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t+1 < 0 \\ \int_0^{t+1} f(\tau) d\tau & \text{falls } t+1 \geq 0 \end{cases} \\
&= \sigma(t+1) \int_0^{t+1} f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 1 \\ \int_1^t f(\tau) d\tau & \text{falls } t \geq 1 \end{cases} \\
&= \sigma(t-1) \int_1^t f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau) f(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) f(\tau) d\tau \\
&= \sigma(t) \int_0^t f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$F_c(t) = \int_c^t f(\tau) d\tau$$

Zeigen Sie, dass $F_c(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

Lösung von Aufgabe 18. Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F_c(t) &= \int_c^t f(\tau)d\tau \\ &= [F(\tau)]_c^t \\ &= F(t) - F(c). \end{aligned}$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} F_c'(t) &= (F(t) - F(c))' \\ &= F'(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Damit ist $F_c(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$.