Heilbronn, den 21.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 11

Aufgabe 1. Die lineare Funktion $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist dadurch definiert, dass sie jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ am Koordinatenursprung spiegelt, siehe Bild 1. Bestimmen Sie die Matrix A so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch Matrix Vektor Multiplikation.

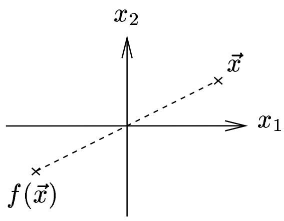


Abbildung 1: $f(\vec{x})$ ist die Spiegelung von $\vec{x}$ am Koordinatenursprung.

Lösung von Aufgabe 1. Zunächst berechnet man die Bilder der kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ von f.

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten der Matrix zu f sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren, d.h. mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

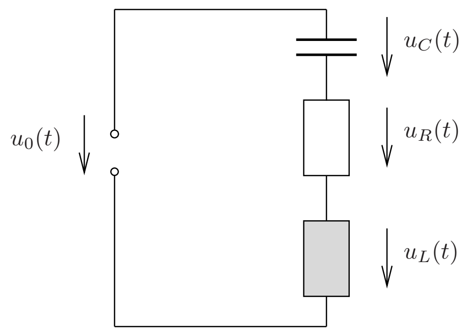
gilt

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Damit ist

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Für die Spannungen an den Bauteilen gilt

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= q(t)/C \\ u_L(t) &= Li'(t). \end{aligned}$$

wobei $q(t)$ die Ladung des Kondensators ist. Weiterhin gilt $i(t) = q'(t)$. Die Eingangsspannung sei

$$u_0(t) = \cos(\omega t).$$

Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für $q(t)$ in Abhängigkeit von ω. Warum tritt bei diesem System nie Resonanz auf?

Lösung von Aufgabe 2. Mit der Maschenregel gilt

$$q/C + Rq' + Lq'' = \cos(\omega t).$$

Reeller Ansatz

$$\begin{aligned} q &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ q' &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\ q'' &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \\ + \;& R(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) \\ + \;& L(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)) \\ = \;& \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)(A/C + B\omega R - A\omega^2 L) + \sin(\omega t)(B/C - A\omega R - B\omega^2 L) &= \cos(\omega t) \\ A/C + B\omega R - A\omega^2 L &= 1 \\ B/C - A\omega R - B\omega^2 L &= 0 \end{aligned}$$

Lösen

$$\begin{aligned} A(1/C - \omega^2 L) + B\omega R &= 1 \\ B(1/C - \omega^2 L) - A\omega R &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$A = B(1/C - \omega^2 L)/(\omega R).$$

Einsetzen in erste Gleichung gibt

$$\begin{aligned}
B((1/C - \omega^2 L)^2/(\omega R) + \omega R) &= 1 \\
B((1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2) &= \omega R \\
B &= \frac{\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2} \\
A &= \frac{1/C - \omega^2 L}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}.
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man die Aufgabe auch mit dem komplexen Ansatz

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

lösen können. Für die rechte Seite

$$r_1(t) = e^{j\omega t}$$

ist der Ansatz

$$\begin{aligned}
q_1 &= a e^{j\omega t} \\
q_1' &= a j\omega e^{j\omega t} \\
q_1'' &= -a\omega^2 e^{j\omega t}.
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
1/C a e^{j\omega t} + R a j\omega e^{j\omega t} - L a\omega^2 e^{j\omega t} &= e^{j\omega t} \\
a(1/C + j\omega R - \omega^2 L) &= 1 \\
a &= \frac{1}{1/C + j\omega R - \omega^2 L} \\
&= \frac{1/C - \omega^2 L - j\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}.
\end{aligned}$$

Lösung für rechte Seite $r_1(t)$ ist somit

$$q_1 = a e^{j\omega t}.$$

Für die rechte Seite

$$r_2(t) = e^{-j\omega t}$$

erhält man analog die Lösung

$$q_2 = \overline{q_1}.$$

Damit ist die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\
&= \mathrm{re}(q_1) \\
&= \mathrm{re}\left(\frac{1/C - \omega^2 L - j\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\right) \\
&= \frac{1/C - \omega^2 L}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega R}{(1/C - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Damit Resonanz auftritt, muss $j\omega$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$L\lambda^2 + R\lambda + 1/C$$

sein. Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

Da $R \neq 0$ haben diese einen Realteil. Da ω reell ist, ist $j\omega$ rein imaginär und damit kann $j\omega$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein.

Aufgabe 3. Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* der DGL

$$y'' + y = \sin(x+1).$$

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} \sin(x+1) &= \operatorname{im}(e^{j(x+1)}) \\ &= \operatorname{im}(e^j e^{jx}). \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung mit rechter Seite e^{jx}. Da j Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor. Ansatz daher

$$\begin{aligned} y &= cxe^{jx} \\ y' &= ce^{jx} + cxje^{jx} \\ y'' &= cje^{jx} + cje^{jx} - cxe^{jx} \\ &= c2je^{jx} - cxe^{jx}. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} c2je^{jx} - cxe^{jx} + cxe^{jx} &= e^{jx} \\ c2je^{jx} &= e^{jx} \\ c2j &= 1 \\ c &= \frac{1}{2j} \\ &= -\frac{j}{2}. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung ist damit

$$y = -\frac{j}{2}xe^{jx}.$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $e^j e^{jx}$ ist somit

$$y = -\frac{j}{2}e^j xe^{jx}.$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $\mathrm{im}(e^j e^{jx})$ ist somit

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{im}(-\frac{j}{2}e^j x e^{jx}) \\ &= -\frac{1}{2}x\,\mathrm{im}(je^{j(x+1)}) \\ &= -\frac{1}{2}x\,\mathrm{im}(j(\cos(x+1) + j\sin(x+1))) \\ &= -\frac{1}{2}x\cos(x+1). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie *eine partikuläre* Lösung der DGL

$$y'' + y = e^{-x}\sin(2x).$$

Im Ergebnis dürfen keine komplexen Zahlen auftreten.

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin(2x) &= \mathrm{im}\big(e^{-x}e^{2jx}\big) \\ &= \mathrm{im}\Big(e^{(-1+2j)x}\Big). \end{aligned}$$

Sei

$$\mu = -1 + 2j.$$

Partikuläre Lösung der komplexen DGL

$$y'' + y = e^{\mu x}.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} y &= ce^{\mu x} \\ y' &= c\mu e^{\mu x} \\ y'' &= c\mu^2 e^{\mu x}. \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned} c\mu^2 e^{\mu x} + ce^{\mu x} &= e^{\mu x} \\ c\mu^2 + c &= 1 \\ c &= \frac{1}{\mu^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(-1+2j)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1 - 4j - 4 + 1} \\ &= \frac{1}{-2(1+2j)} \\ &= \frac{1-2j}{-10} \\ &= \frac{-1+2j}{10}. \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der komplexen DGL ist somit

$$\begin{aligned} y_C &= ce^{\mu x} \\ &= \frac{-1+2j}{10} e^{(-1+2j)x} \\ &= \frac{e^{-x}}{10}(-1+2j)(\cos(2x)+j\sin(2x)). \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung der gegebenen DGL ist daher

$$\begin{aligned} y_P &= \operatorname{im}(y_C) \\ &= \frac{e^{-x}}{10}(-\sin(2x)+2\cos(2x)). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = -\frac{(xy)^2}{e^{1/y}}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Die DGL ist separierbar.

$$\begin{aligned} -\frac{e^{1/y}}{y^2} dy &= x^2 dx \\ -\int \frac{e^{1/y}}{y^2} dy &= \int x^2 dx. \end{aligned}$$

Integration auf der linken Seite mit Substitution.

$$u = \frac{1}{y}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}, \quad dy = -y^2 du.$$

Damit sind die Integrale

$$\begin{aligned} -\int \frac{e^{1/y}}{y^2} dy &= -\int \frac{e^u}{y^2}(-y^2) du \\ &= \int e^u du \\ &= e^u \\ &= e^{1/y} \\ \int x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{1/y} &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ \frac{1}{y} &= \ln\left(\frac{x^3}{3} + C\right) \\ y &= \frac{1}{\ln\left(\frac{x^3}{3}+C\right)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$(2y+1)y' = x\cos(x).$$

Lösung von Aufgabe 6. Die DGL ist separierbar. Trennung der Variablen ergibt

$$(2y+1)dy = x\cos(x)dx.$$

Integration.

$$\begin{aligned}\int(2y+1)dy &= y^2+y\\ \int x\cos(x)dx &= x\sin(x)-\int\sin(x)dx = x\sin(x)+\cos(x).\end{aligned}$$

Lösen

$$\begin{aligned}y^2+y &= x\sin(x)+\cos(x)+C\\ y^2+y-(x\sin(x)+\cos(x)+C) &= 0\\ y_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1+4(x\sin(x)+\cos(x)+C)}}{2}.\end{aligned}$$

Eine reelle Lösungsfunktion existiert nur wenn

$$1+4(x\sin(x)+\cos(x)+C) \geq 0.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'-\left(\frac{1}{x}+1\right)y = e^x$$

für $x>0$.

Lösung von Aufgabe 7. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

$$\begin{aligned}y'-\left(\frac{1}{x}+1\right)y &= 0\\ y' &= \left(\frac{1}{x}+1\right)y\\ \frac{1}{y}dy &= \left(\frac{1}{x}+1\right)dx\\ \int\frac{1}{y}dy &= \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx\\ \ln|y| &= \ln(x)+x+C \qquad \text{da } x>0\\ |y| &= e^{\ln(x)+x+C} = e^C xe^x = Kxe^x, \qquad K>0\\ y &= Kxe^x, \qquad K\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$\begin{aligned} y &= k(x)xe^x \\ y' &= k'(x)xe^x + k(x)(e^x + xe^x). \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned} k'(x)xe^x + k(x)(e^x + xe^x) - \left(\frac{1}{x} + 1\right)k(x)xe^x &= e^x \\ k'(x)xe^x &= e^x \\ k'(x)x &= 1 \\ k'(x) &= \frac{1}{x} \\ k(x) &= \ln(x) + C \end{aligned}$$

da $x > 0$. Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = (\ln(x) + C)xe^x.$$

Aufgabe 8. Sei y_P eine partikuläre Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = r(x),$$

wobei alle Koeffizienten a_i reell sind und $r(x)$ eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{y_P(x)}$ eine Lösung der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = \overline{r(x)}$$

ist.

Lösung von Aufgabe 8. Sei

$$y_P(x) = y_{\mathrm{re}}(x) + jy_{\mathrm{im}}(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{y_P^{(i)}(x)} &= \overline{(y_{\mathrm{re}}(x) + jy_{\mathrm{im}}(x))^{(i)}} \\ &= \overline{y_{\mathrm{re}}^{(i)}(x) + jy_{\mathrm{im}}^{(i)}(x)} \quad \text{Summenregel der Ableitung} \\ &= y_{\mathrm{re}}^{(i)}(x) - jy_{\mathrm{im}}^{(i)}(x) \\ &= (y_{\mathrm{re}}(x) - jy_{\mathrm{im}}(x))^{(i)} \quad \text{Summenregel der Ableitung} \\ &= \overline{y_P(x)}^{(i)}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\overline{y_P(x)}$ in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{y_P(x)}^{(i)} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{y_P^{(i)}(x)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i y_P^{(i)}(x)} \quad \text{da } a\overline{z} = \overline{az} \text{ wenn } a \text{ reell} \\
&= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i y_P^{(i)}(x)} \quad \text{da } \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2} \\
&= \overline{r(x)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy' + y = \ln(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^+$.

Lösung von Aufgabe 9. Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$xy' + y = 0$$

durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} &= -y \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Stammfunktion auf beiden Seiten:

$$\ln(|y|) = -\ln(|x|) + C.$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
|y| &= e^{-\ln(|x|)+C} \\
&= e^{-\ln(|x|)}e^{C} \\
&= \frac{1}{e^{\ln(|x|)}}K, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
&= \frac{K}{|x|}
\end{aligned}$$

Da in der Aufgabenstellung eine Lösung für $x \in \mathbb{R}^+$ gesucht wird, ist $|x| = x$. Damit ist die allgemeine homogene Lösung

$$y_H = \frac{K}{x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man den Ansatz

$$\begin{aligned}
y &= \frac{k(x)}{x} \\
y' &= \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned}\frac{k'(x)x - k(x)}{x} + \frac{k(x)}{x} &= \ln(x)\\ k'(x) &= \ln(x)\\ k(x) &= x\ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{x\ln(x) - x + C}{x}\\ &= \ln(x) - 1 + \frac{C}{x}.\end{aligned}$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{x}$$

für $x > 0$.

Lösung von Aufgabe 10. Es handelt sich um eine lineare DGL. Lösen der homogenen DGL:

$$\begin{aligned}y' + \frac{1}{x}y &= 0\\ y' &= -\frac{1}{x}y\\ \frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{x}dx\\ \ln|y| &= -\ln|x| + C\\ |y| &= e^{-\ln|x|+C} = e^{-\ln|x|}e^{C} = K\frac{1}{e^{\ln|x|}}\\ &= K\frac{1}{|x|}, \qquad K \in \mathbb{R}^+\\ y &= \pm K\frac{1}{|x|}\end{aligned}$$

Da $x > 0$ erhält man die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y = K\frac{1}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Ansatz für die inhomogene DGL durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}y &= k(x)\frac{1}{x}\\ y' &= k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Einsetze in inhomogene DGL

$$\begin{aligned} k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}k(x)\frac{1}{x} &= \sqrt{x} \\ k'(x)\frac{1}{x} &= x^{1/2} \\ k'(x) &= x^{3/2} \\ k(x) &= \frac{2}{5}x^{5/2} + C \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = k(x)\frac{1}{x} = \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C\right)x^{-1} = \frac{2}{5}x^{3/2} + C\frac{1}{x}.$$

Aufgabe 11. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle t gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Die Existenz der Integrale darf vorausgesetzt werden.

Lösung von Aufgabe 11. Umformen von

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

durch Substitution

$$\begin{aligned} \mu &= t - \tau \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= -1 \\ d\tau &= -d\mu \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\mu)g(\mu)(-d\mu) &= -\int_{\infty}^{-\infty} g(\mu)f(t-\mu)d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\mu)g(\mu)d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei

$$f(t) = at + b$$

eine Gerade und

$$g(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $\varepsilon > 0$. Berechen Sie $(f * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a(t-\tau)+b)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (at+b-a\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (at+b)g(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} a\tau g(\tau)d\tau \\
&= (at+b)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau}_{1} - a\int_{-\infty}^{\infty} \tau g(\tau)d\tau \\
&= at+b-\frac{a}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} \tau d\tau \\
&= at+b-\frac{a}{2\varepsilon}\left[\tau^2\right]_0^{\varepsilon} \\
&= at+b-\frac{a}{2\varepsilon}\varepsilon^2 \\
&= at+b-\frac{a}{2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f, g ist definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion cf ist definiert durch

$$cf \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (cf)(t) = cf(t).$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$(cf) * g = c(f * g).$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned}
(cf) * g &= \int_{-\infty}^{\infty} (cf)(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} cf(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= c(f * g).
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie $(\sigma * \sigma)(t)$.

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{aligned}(\sigma * \sigma)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)d\tau \\ &= \sigma(t)\int_{0}^{t} 1d\tau \\ &= \sigma(t)\left[\tau\right]_0^t \\ &= \sigma(t)t.\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei

$$\begin{aligned}f(t) &= \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \\ g(t) &= \cos(t).\end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{1} \tau\cos(t-\tau)d\tau \\ &= -\left[\tau\sin(t-\tau)\right]_0^1 - \int_0^1 -\sin(t-\tau)d\tau \\ &= -(\sin(t-1)) + \int_0^1 \sin(t-\tau)d\tau \\ &= -\sin(t-1) + \left[\cos(t-\tau)\right]_0^1 \\ &= -\sin(t-1) + \cos(t-1) - \cos(t)\end{aligned}$$

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass wenn

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Sei

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} e^t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 16. Sei

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Für $\tau > t$ ist $t - \tau < 0$ und damit $g(t-\tau) = 0$. Folglich kann die Obergrenze des Integrals auf t abgesenkt werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Da $f(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ können Bereiche, wo $\tau < 0$ ist, aus dem Integral eliminiert werden.

- Für $t < 0$ ist dies der gesamte Integrationsbereich und das Integral ist Null. Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0.$$

- Für $t \geq 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

In beiden Fällen ist somit

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Für die gegebenen Funktionen f, g gilt somit

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} \sigma(\tau)e^{\tau}\ \sigma(t-\tau)e^{t-\tau}d\tau \\
&= \int_{0}^{t} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)e^{t}d\tau \\
&= e^{t}\int_{0}^{t} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Für $t < 0$ ist τ im gesamten Integrationsbereich negativ und $\sigma(\tau) = 0$. In diesem Fall ist das Integral Null.

Für $t \geq 0$ ist im gesamten Integrationsbereich $\sigma(\tau) = \sigma(t-\tau) = 1$. Damit ist

$$\begin{aligned}
e^{t}\int_{0}^{t} \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau &= \sigma(t)e^{t}\int_{0}^{t} 1d\tau \\
&= \sigma(t)te^{t}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
g(t) &= 1 - t^2.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^1 g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^1 (1-(t-\tau)^2)d\tau \\ &= \int_0^1 (1-t^2+2t\tau-\tau^2)d\tau \\ &= \left[\tau - t^2\tau + t\tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3\right]_0^1 \\ &= 1-t^2+t-{}^1\!/_3 \\ &= -t^2+t+{}^2\!/_3.\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei $f(t)$ die Stromstärke des Neckars in Horkheim und $h(t)$ die Stromstärke in Heilbronn in Liter pro Sekunde. Die Strömungsgeschwindigkeit im Neckar ist in der Mitte höher als am Rand so dass sich das Wasser unterwegs verteilt. Von einem Liter Wasser, das Horkheim verlässt, kommt ein in Anteil $G(t)$ in weniger als t Sekunden in Heilbronn an.

- Angenommen ein Teil des Wassers verdunstet unterwegs. Wie zeigt sich das in der Funktion $G(t)$?
- Berechnen Sie $h(t)$ in Abhängigkeit von $f(t)$ und $G(t)$. Leiten Sie das Ergebnis schrittweise her.
- Kann man nach diesem Schema auch $f(t)$ in Abhängigkeit von $h(t)$ berechnen?

Lösung von Aufgabe 18. Wenn ein Teil des Wassers unterwegs verdunstet, d.h. nie ankommt, bedeutet das

$$\lim_{t\to\infty} G(t) \quad < \quad 1.$$

Die Formel für $h(t)$ kann man auf zwei Weisen herleiten.

- Herleitung mit Differentialen. Die Stromstärke zum Zeitpunkt τ in Horkheim ist $f(\tau)$. In einem infinitesimal kurzem Zeitintervall der Dauer $d\tau$ um τ herum fließen somit $f(\tau)d\tau$ Liter. (Da $d\tau$ infinitesimal kurz ist, ändert sich die Stromstärke in diesem Intervall nicht.) Von diesem Wasser kommt der Teil bis zum Zeitpunkt t in Heilbronn an, der weniger als $t-\tau$ Sekunden unterwegs ist, d.h. $G(t-\tau)f(\tau)d\tau$ Liter. Um die gesamte Wassermenge zu erhalten, die bis zum Zeitpunkt t in Heilbronn eingetroffen ist, muss dies über alle Zeitpunkte τ summiert bzw. integriert werden. Man erhält damit

$$\begin{aligned}H(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= (G*f)(t)\end{aligned}$$

Liter. Die Stromstärke ist die zeitliche Ableitung der Wassermenge, d.h.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}H(t) \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}G(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= (f*g)(t) \end{aligned}$$

Liter pro Sekunde.

- Herleitung mit Diskretisierung. Sei

$$\tau_i = i\Delta\tau, \qquad i \in \mathbb{Z}$$

für ein kleines $\Delta\tau$. Die Menge Wasser, die in $[\tau_i, \tau_i + \Delta\tau]$ Horkheim verlassen hat, ist

$$\int_{\tau_i}^{\tau_i+\Delta\tau} f(x)dx = F(\tau_i + \Delta\tau) - F(\tau_i).$$

Da $\Delta\tau$ klein ist, kann näherungsweise angenommen werden, dass dieses Wasser nicht verteilt über $[\tau_i, \tau_i + \Delta\tau]$ geflossen ist sondern zum Zeit*punkt* τ_i. Der Anteil dieses Wassers, der bis zum Zeitpunkt t in Heilbronn eingetroffen ist, d.h. weniger als $t-\tau_i$ Sekunden unterwegs war, ist

$$\begin{aligned} G(t-\tau_i)(F(\tau_i+\Delta\tau) - F(\tau_i)) &= G(t-\tau_i)\frac{F(\tau_i+\Delta\tau) - F(\tau_i)}{\Delta\tau}\Delta\tau \\ &= G(t-\tau_i)f(\tau_i)\Delta\tau \end{aligned}$$

für infinitesimal kleines $\Delta\tau$. Die Gesamtmenge Wasser, die bis zum Zeitpunkt t in Heilbronn eingetroffen ist, ist

$$H(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t-\tau_i)f(\tau_i)\Delta\tau.$$

Die Stromstärke ist somit

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}H(t) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(t-\tau_i)f(\tau_i)\Delta\tau. \end{aligned}$$

Interpretiert man diese Summe als Summe von Rechtecken der Breite $\Delta\tau$ und Höhe $g(t-\tau_i)f(\tau_i)$, ergibt sich beim Grenzübergang die Fläche unter der Funktion $g(t-\tau)f(\tau)$. Damit ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= (f*g)(t). \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man auch $f(t)$ in Abhängigkeit von $h(t)$ berechnen. Die Verweildauern $G(t)$ sind dann allerdings für negative t nicht Null, d.h. es liegt ein nichtkausales System vor.