Heilbronn, den 12.12.2025 Prof. Dr. V. Stahl WS 25/26

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 12

Aufgabe 1. Nennen Sie eine lineare Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht bijektiv ist.

Lösung von Aufgabe 1. Da sich jede lineare Funktion durch eine Matrix darstellen lässt, hat f die Form

$$f(x) = ax$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit f nicht bijektiv ist, muss $a = 0$ sein. Somit ist

$$f(x) = 0.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$jz = \left(\frac{1+j}{z}\right)^5.$$

Lösung von Aufgabe 2. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
jz &= \left(\frac{1+j}{z}\right)^5 \\
jz^6 &= (1+j)^5 \\
jz^6 &= \left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^5 \\
e^{j\pi/2}z^6 &= 2^{5/2}e^{j5\pi/4} \\
z^6 &= 2^{5/2}e^{j(5\pi/4-\pi/2)} \\
r^6e^{j6\varphi} &= 2^{5/2}e^{j3\pi/4}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
r &= 2^{5/12} \\
6\varphi &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\
\varphi &= \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{3}, k = 0,1,2,3,4,5 \\
z &= 2^{5/12}e^{j\pi(1/8+k/3)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2e^{\sqrt{x}}}.$$

Lösung von Aufgabe 3. Es handelt sich um eine lineare DGL erster Ordnung. Lösung der homogenen DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{y}{2\sqrt{x}} \\
\frac{1}{y}dy &= -\frac{1}{2}x^{-1/2}dx \\
\ln|y| &= -x^{1/2} + C \\
&= -\sqrt{x} + C \\
|y| &= e^{-\sqrt{x}+C} \\
&= Ke^{-\sqrt{x}}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
y &= Ke^{-\sqrt{x}}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz:

$$\begin{aligned}
y &= k(x)e^{-\sqrt{x}} \\
y' &= k'(x)e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{-\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in Ansatz

$$\begin{aligned}
k'(x)e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x)e^{-\sqrt{x}} &= \frac{x}{2e^{\sqrt{x}}} \\
k'(x)e^{-\sqrt{x}} &= \frac{x}{2e^{\sqrt{x}}} \\
k'(x) &= \frac{x}{2} \\
k(x) &= \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\frac{x^2}{4} + C\right)e^{-\sqrt{x}} \\
&= \frac{x^2 + C}{4e^{\sqrt{x}}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f, g ist definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion cf ist definiert durch

$$cf \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (cf)(t) = cf(t).$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$(cf) * g = c(f * g).$$

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned}(cf) * g &= \int_{-\infty}^{\infty} (cf)(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} cf(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= c(f * g).\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausale Funktionen, d.h.

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für alle } t < 0.$$

- Zeigen Sie, dass $f * g$ eine kausale Funktion ist.
- Zeigen Sie, dass $(f * g)(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 5.

- Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausal.

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

  Für $t < 0$ integriert man über negative τ und in diesem Bereich ist $f(\tau) = 0$. Daher ist

$$(f * g)(t) = 0 \qquad \text{für alle } t < 0.$$

- Für $t = 0$ erstreckt sich das Integral

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

  nur über einen Punkt $\tau = 0$. Da $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionswerte endlich und somit ist die Fläche Null, d.h.

$$(f * g)(0) = 0.$$

Aufgabe 6. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t) \\ g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$. Berechnen Sie anschließend

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * g_\varepsilon)(t).$$

Lösung von Aufgabe 6.

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau) f(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \sin(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\cos(t-\tau)\right]_0^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\cos(t-\varepsilon)-\cos(t))\end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$(f * g_\varepsilon)(t) = -\frac{\cos(t)-\cos(t-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Dieser Ausruck entspricht der negierten Sekantensteigung von $\cos(t)$ zwischen $t-\varepsilon$ und t. Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ ergibt somit die Tangentensteigung an der Stelle t bzw. die Ableitung. Folglich ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(f * g_\varepsilon)(t) = -\cos'(t) = \sin(t).$$

Aufgabe 7. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)\sqrt{t} \\ g(t) &= \sigma(t-1)t \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} \sqrt{\tau}\sigma(t-\tau-1)(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} \sqrt{\tau}\sigma(t-1-\tau)(t-\tau) d\tau \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{t-1} \sqrt{\tau}(t-\tau) d\tau & \text{falls } t-1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sigma(t-1) \int_{0}^{t-1} \left(\tau^{1/2} t - \tau^{3/2}\right) d\tau \\
&= \sigma(t-1) \left[\frac{2}{3}\tau^{3/2} t - \frac{2}{5}\tau^{5/2}\right]_{0}^{t-1} \\
&= \sigma(t-1)\left(\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} t - \frac{2}{5}(t-1)^{5/2}\right) \\
&= \sigma(t-1)\left(\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} t - \frac{2}{5}(t-1)^{3/2}(t-1)\right) \\
&= \sigma(t-1)(t-1)^{3/2}\left(\frac{2}{3} t - \frac{2}{5}(t-1)\right) \\
&= \sigma(t-1)(t-1)^{3/2}\left(\frac{4}{15} t + \frac{2}{5}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Sei $a < b$ und

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sigma(t)\sin(t) \\
g(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sigma(t-a) - \sigma(t-b).
\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$ und $(f * g)'(t)$.

Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Faltung um die Berechnung zu vereinfachen!

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned}
(f * \sigma)(t) &= \sigma(t) \int_{0}^{t} \sin(\tau) d\tau \\
&= -\sigma(t) \left[\cos(\tau)\right]_{0}^{t} \\
&= -\sigma(t)(\cos(t) - 1) \\
&= \sigma(t)(1 - \cos(t)).
\end{aligned}$$

Mit der Zeitinvarianz erhält man

$$\begin{aligned}
(f * \sigma_a)(t) &= \sigma(t-a)(1-\cos(t-a)) \\
(f * \sigma_b)(t) &= \sigma(t-b)(1-\cos(t-b)).
\end{aligned}$$

Mit der Linearität der Faltung erhält man

$$\begin{aligned} f * g &= f * (\sigma_a - \sigma_b) \\ &= f * \sigma_a - f * \sigma_b \\ &= (f * \sigma)_a - (f * \sigma)_b. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= (f * \sigma_a)(t) - (f * \sigma_b)(t) \\ &= \sigma(t-a)(1-\cos(t-a)) - \sigma(t-b)(1-\cos(t-b)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < a \\ 1 - \cos(t-a) & \text{falls } t \geq a \text{ und } t < b \\ \cos(t-b) - \cos(t-a) & \text{falls } t \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Ableitung gilt

$$(f * g)' = f * g'.$$

Mit

$$g'(t) = \delta(t-a) - \delta(t-b) = \delta_a(t) - \delta_b(t),$$

dem neutralen Element und der Zeitinvarianz der Faltung erhält man

$$\begin{aligned} (f * g')(t) &= (f * \delta_a)(t) - (f * \delta_b)(t) \\ &= f_a(t) - f_b(t) \\ &= \sigma(t-a)\sin(t-a) - \sigma(t-b)\sin(t-b). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Sei $f(t)$ eine Funktion mit gegebener Stammfunktion $F(t)$. Berechnen Sie hiermit

$$(\sigma - \sigma_{\hat{t}}) * f.$$

Der Index $\hat{t}$ bedeutet hierbei die Verschiebung, d.h.

$$\sigma_{\hat{t}}(t) = \sigma(t - \hat{t}).$$

Hinweis: Skizzieren Sie zunächst die Funktion $\sigma(t) - \sigma_{\hat{t}}(t)$ für $\hat{t} \geq 0$ bzw. $\hat{t} \leq 0$.

Lösung von Aufgabe 9.

- Für $\hat{t} \geq 0$ ist

$$\sigma(t) - \sigma(t - \hat{t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \hat{t} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(\tau) - \sigma(\tau - \hat{t})) f(t-\tau) d\tau = \int_0^{\hat{t}} f(t-\tau) d\tau.$$

- Für $\hat{t} \leq 0$ ist

$$\sigma(t) - \sigma(t - \hat{t}) \quad = \quad \begin{cases} -1 & \text{für } \hat{t} \leq t < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(\tau) - \sigma(\tau - \hat{t})) f(t - \tau) d\tau &= \int_{\hat{t}}^{0} (-1) f(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{\hat{t}} f(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

In beiden Fällen kommt man somit zum gleichen Ergebnis

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\hat{t}} f(t - \tau) d\tau &= -\left[F(t - \tau)\right]_0^{\hat{t}} \\ &= -(F(t - \hat{t}) - F(t)) \\ &= F(t) - F(t - \hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.

- Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) t \\ g(t) &= e^t. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$.

- Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= t \\ g(t) &= \sigma(t) e^t. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(f * g)(t) = -\infty$ für alle t.

Lösung von Aufgabe 10. •

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) \tau e^{t - \tau} d\tau \\ &= e^t \int_{0}^{\infty} \tau e^{-\tau} d\tau \\ &= e^t \left(\left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau \right) \\ &= e^t \left[-e^{-\tau}\right]_0^{\infty} \\ &= e^t \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau\sigma(t-\tau)e^{t-\tau}d\tau \\
&= e^t \int_{-\infty}^{t} \tau e^{-\tau}d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} e^t \int_{-T}^{t} \tau e^{-\tau}d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} e^t \left(\left[-\tau e^{-\tau}\right]_{-T}^{t} + \int_{-T}^{t} e^{-\tau}d\tau \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} e^t \left(-te^{-t} - Te^{T} - \left[e^{-\tau}\right]_{-T}^{t} \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} e^t \left(-te^{-t} - Te^{T} - e^{-t} + e^{T} \right) \\
&= -t - 1 + e^t \lim_{T\to\infty} e^{T}(1-T) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sigma(t)\, t \\
g(t) &= \sigma(t)\, e^t.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f*g)'(t)$.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \delta(t)\, t + \sigma(t) \quad = \quad \sigma(t) \\
(f*g)'(t) &= (f'*g)(t) \\
&= (\sigma * g)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\, e^{\tau}d\tau \\
&= \sigma(t) \int_{0}^{t} e^{\tau}d\tau \\
&= \sigma(t) \left[e^{\tau}\right]_0^t \\
&= \sigma(t)(e^t - 1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= t^2 \\
g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon^2}t & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt \quad = \quad 1.$$

- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$.
- Berechnen Sie

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (f * g_\varepsilon)(t).$$

Lösung von Aufgabe 12.

-

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt &= \int_0^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon^2}t\right)dt \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon (\varepsilon - t)dt \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\left[\varepsilon t - t^2/2\right]_0^\varepsilon \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon^2/2) \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\varepsilon^2/2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g_\varepsilon(\tau)d\tau \\
&= \int_0^\varepsilon (t-\tau)^2\left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon^2}\tau\right)d\tau \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (t^2 - 2t\tau + \tau^2)(1 - \tau/\varepsilon)d\tau \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (t^2 - 2t\tau + \tau^2 - t^2\tau/\varepsilon + 2t\tau^2/\varepsilon - \tau^3/\varepsilon)d\tau \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\left[t^2\tau - t\tau^2 + \tau^3/3 - t^2\tau^2/(2\varepsilon) + 2t\tau^3/(3\varepsilon) - \tau^4/(4\varepsilon)\right]_0^\varepsilon \\
&= \frac{2}{\varepsilon}(t^2\varepsilon - t\varepsilon^2 + \varepsilon^3/3 - t^2\varepsilon/2 + 2t\varepsilon^2/3 - \varepsilon^3/4) \\
&= t^2 - 2t\varepsilon/3 + \varepsilon^2/6.
\end{aligned}$$

-

$$\lim_{\varepsilon\to 0} t^2 - 2t\varepsilon/3 + \varepsilon^2/6 \quad = \quad t^2.$$

Aufgabe 13. Anders als in der Vorlesung hätte man den Dirac Impuls auch definieren können als neutrales Element der Faltung, d.h. als Lösung der Gleichung

$$f * \delta \quad = \quad f.$$

Diese Gleichung hat analog zu $x^2 = -1$ keine Lösung in der Menge der reellen Funktionen. Entsprechend zu j ist δ somit "etwas Neues". Die Faltung wird nun so erweitert, dass alle Gesetze, die in der Vorlesung gezeigt wurden, auch für δ gelten. Ansonsten sei nichts über den δ-Impuls bekannt.

- Zeigen Sie, dass hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau &= \sigma(t) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau &= 1 \\
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau &= 1 \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0 \ .
\end{aligned}$$

  Hinweis: Nutzen Sie aus, dass

$$(\sigma * f)(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

  für alle f und somit insbesondere auch für $f = \delta$.

- Zeigen Sie allgemein, dass

$$\left(\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \right)' = f(t).$$

  (Differenzierbarkeit dürfen Sie voraussetzen.) Zeigen Sie, dass hieraus und mit den o.g. Gleichungen übertragen auf $f = \delta$ folgt, dass

$$\sigma' = \delta.$$

Lösung von Aufgabe 13.

-

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau &= (\sigma * \delta)(t) \\
&= \sigma(t) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau &= \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \\
&= \lim_{t \to \infty} \sigma(t) \\
&= 1 \\
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(\tau) d\tau \\
&= \sigma(\varepsilon) - \sigma(-\varepsilon) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

- Sei F eine Stammfunktion von f Und

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{G(t+dt)-G(t)}{dt} \\
&= \frac{1}{dt}\left(\int_{-\infty}^{t+dt} f(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{1}{dt}\int_{t}^{t+dt} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{dt}\left[F(\tau)\right]_t^{t+dt} \\
&= \frac{F(t+dt)-F(t)}{dt} \\
&= F'(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}
$$

Im ersten Teil wurde gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t).$$

Folglich ist $\sigma(t)$ eine Stammfunktion von $\delta(t)$ und laut Definition von Stammfunktionen

$$\sigma' = \delta.$$

Aufgabe 14. Die T-periodische Fortsetzung $h(t)$ einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT).$$

- Zeigen Sie, dass $h(t)$ eine T-periodische Funktion ist, d.h.

  $$h(t+T) = h(t)$$

  für alle t.
- Der T-periodische Impulszug $p(t)$ ist definiert durch

  $$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT).$$

  Zeigen Sie unter Verwendung der Ausblendeigenschaft, dass

  $$h(t) = (f * p)(t).$$

  Faltung mit dem Impulszug bewirkt somit periodische Fortsetzung.

Lösung von Aufgabe 14.

- $h(t)$ ist T-periodisch:

$$\begin{aligned}
h(t+T) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+T-kT) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-(k-1)T) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT) \\
&= h(t).
\end{aligned}$$

- Faltung mit dem Impulszug bewirkt periodische Fortsetzung.

$$\begin{aligned}
(f*p)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)p(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-kT)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-kT-\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-kT)\delta(t-kT-\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT) \\
&= h(t)
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sigma(t)\cos(t) \\
g(t) &= \sigma(t)\sin(t).
\end{aligned}$$

Berechnen Sie $f*g$. Hinweis: Lösen Sie das Integral mit komplexen Zahlen.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)\cos(t-\tau)\sigma(\tau)\sin(\tau)d\tau \\
&= \sigma(t)\int_{0}^{t} \cos(t-\tau)\sin(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Zunächst wird der Integrand vereinfacht.

$$\begin{aligned}
\cos(t-\tau)\sin(\tau) &= \frac{1}{2}(e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)})\frac{1}{2j}(e^{j\tau}-e^{-j\tau}) \\
&= \frac{1}{4j}(e^{jt}-e^{-jt}+e^{j(t-2\tau)}-e^{-j(t-2\tau)}) \\
&= \frac{1}{4j}(2j\sin(t)+2j\sin(t-2\tau)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(t)-\sin(t-2\tau)).
\end{aligned}$$

Integrieren der Summanden über τ.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sin(t)d\tau &= \sin(t)[\tau]_0^t \\
&= t\sin(t) \\
\int_0^t \sin(t-2\tau)d\tau &= \left[-\cos(t-2\tau)\frac{1}{-2}\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(t-2\tau)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}(\cos(t-2t)-\cos(t)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(-t)-\cos(t)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(t)-\cos(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$(f*g)(t) = \sigma(t)\frac{1}{2}t\sin(t).$$

Aufgabe 16. Seien f, g Funktionen mit

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0 \text{ für } t \notin [a_1, b_1] \\
g(t) &= 0 \text{ für } t \notin [a_2, b_2].
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$(f*g)(t) = 0 \text{ für } t \notin [a_1+a_2, b_1+b_2].$$

Lösung von Aufgabe 16. Aus der Annahme folgt, dass

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

- **Fall $t > b_1 + b_2$.** Im Integrationsbereich ist $\tau \leq b_1$ und damit $t-\tau > b_2$. Folglich ist

  $$g(t-\tau) = 0$$

  im gesamten Integrationsbereich.

- **Fall $t < a_1 + a_2$.** Im Integrationsbereich ist $\tau \geq a_1$ und damit $t - \tau < a_2$. Folglich ist

  $$g(t-\tau) = 0$$

  im gesamten Integrationsbereich.

Wenn daher $t \notin [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ ist der Integrand im gesamten Integrationsbereich Null und somit

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0.$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung von

$$f(t) = \sigma(t-1)\sin(t).$$

Prüfuen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Stammfunktion

$$\int_{-\infty}^{t} f'(u)du$$

von $f'(t)$ berechnen und mit $f(t)$ vergleichen.

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t-1)\sin(t) + \sigma(t-1)\cos(t) \\ &= \delta(t-1)\sin(1) + \sigma(t-1)\cos(t). \end{aligned}$$

Probe durch Integration.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} f'(u)du &= \int_{-\infty}^{t} (\delta(u-1)\sin(1) + \sigma(u-1)\cos(u))du \\ &= \sin(1)\int_{-\infty}^{t} \delta(u-1)du + \int_{-\infty}^{t} \sigma(u-1)\cos(u)du. \end{aligned}$$

Falls $t \leq 1$ erhält man

$$\begin{aligned} \sin(1)\int_{-\infty}^{t} \delta(u-1)du &= 0 \\ \int_{-\infty}^{t} \sigma(u-1)\cos(u)du &= 0. \end{aligned}$$

Falls $t > 1$ erhält man

$$\begin{aligned} \sin(1)\int_{-\infty}^{t} \delta(u-1)du &= \sin(1) \\ \int_{-\infty}^{t} \sigma(u-1)\cos(u)du &= \int_{1}^{t} \cos(u)du \\ &= [\sin(u)]_1^t \\ &= \sin(t) - \sin(1). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{t} f'(u)du = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \le 1 \\ \sin(1) + \sin(t) - \sin(1) & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$
$$= \sigma(t-1)\sin(t).$$

Aufgabe 18. Sei

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$$
$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} {}^1\!/\!_\varepsilon & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. Achten Sie darauf, dass man nicht über Unstetigkeitsstellen wegintegrieren darf. Das Ergebnis ist aber trotzdem eine überall stetige Funktion.
- Zeigen Sie dann, dass

  $$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

  Hinweis

  $$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\sqrt{t+\varepsilon} - \sqrt{t}}{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\sqrt{t}.$$

Lösung von Aufgabe 18.

$$(f * g_\varepsilon)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g_\varepsilon(\tau) d\tau$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t-\tau)d\tau.$$

- Für $t < 0$ und $\tau \in [0, \varepsilon]$ ist

  $$|t-\tau| = \tau - t$$
  $$f(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau - t}}$$
  $$= [\tau - t]^{-1/2}$$
  $$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (\tau - t)^{-1/2} d\tau$$
  $$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{1/2}(\tau - t)^{1/2}\right]_0^\varepsilon$$
  $$= \frac{2}{\varepsilon}\left[\sqrt{\tau - t}\right]_0^\varepsilon$$
  $$= \frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon - t} - \sqrt{-t}).$$

- Für $t > \varepsilon$ und $\tau \in [0, \varepsilon]$ ist

$$\begin{aligned}
|t-\tau| &= t-\tau \\
f(t-\tau) &= \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \\
&= [t-\tau]^{-1/2} \\
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t-\tau)d\tau &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (t-\tau)^{-1/2}d\tau \\
&= -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{1/2}(t-\tau)^{1/2}\right]_0^\varepsilon \\
&= -\frac{2}{\varepsilon}\left[\sqrt{t-\tau}\right]_0^\varepsilon \\
&= -\frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{t-\varepsilon}-\sqrt{t}) \\
&= \frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{t}-\sqrt{t-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

- Für $0 \le t \le \varepsilon$ und $\tau \in [0, \varepsilon]$ liegt eine Unstetigkeitsstelle von f im Integrationsbereich. Das Integral muss daher aufgespalten werden. Substitution

$$u = t-\tau, \quad d\tau = -du, \quad \tau = t-u.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t-\tau)d\tau &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t-\varepsilon} f(u)du \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} f(u)du \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_{t-\varepsilon}^{-a} |u|^{-1/2}du + \int_a^t |u|^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_{t-\varepsilon}^{-a} (-u)^{-1/2}du + \int_a^t u^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left[-\frac{1}{1/2}(-u)^{1/2}\right]_{t-\varepsilon}^{-a} + \left[\frac{1}{1/2}u^{1/2}\right]_a^t \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} -\left[\sqrt{-u}\right]_{t-\varepsilon}^{-a} + \left[\sqrt{u}\right]_a^t \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} -(\sqrt{a}-\sqrt{\varepsilon-t})+\sqrt{t}-\sqrt{a} \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} -\sqrt{a}+\sqrt{\varepsilon-t}+\sqrt{t}-\sqrt{a} \\
&= \frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon-t}+\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$(f * g_\varepsilon)(t) = \begin{cases} 2/\varepsilon(\sqrt{\varepsilon-t}-\sqrt{-t}) & \text{für } t<0 \\ 2/\varepsilon(\sqrt{t}-\sqrt{t-\varepsilon}) & \text{für } t>\varepsilon \\ 2/\varepsilon(\sqrt{\varepsilon-t}+\sqrt{t}) & \text{für } 0\le t\le\varepsilon. \end{cases}$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

- Fall $t < 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} {}^2/_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon - t} - \sqrt{-t}) &= 2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{-t+\varepsilon} - \sqrt{-t}}{\varepsilon} \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{-(t-\varepsilon)} - \sqrt{-t}}{\varepsilon} \\
&= -2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{-t} - \sqrt{-(t-\varepsilon)}}{\varepsilon} \\
&= -2\frac{d}{dt}\sqrt{-t} \\
&= -2\frac{d}{dt}(-t)^{1/2} \\
&= -2{}^1/_2(-t)^{-1/2}(-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|t|}}.
\end{aligned}$$

- Fall $t > \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} {}^2/_\varepsilon(\sqrt{t} - \sqrt{t-\varepsilon}) &= 2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-\varepsilon}}{\varepsilon} \\
&= 2\frac{d}{dt}\sqrt{t} \\
&= 2\frac{d}{dt}t^{1/2} \\
&= 2{}^1/_2 t^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|t|}}.
\end{aligned}$$

- Fall $0 \leq t \leq \varepsilon$. Für $\varepsilon \to 0$ reduziert sich dies auf den Fall $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} {}^2/_\varepsilon\sqrt{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Damit gilt in allen Fällen

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$