Heilbronn, den 8.6.2026 Prof. Dr. V. Stahl SS 26

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen

Blatt 13

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y = \cos(x).$$

Lösung von Aufgabe 1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + y = 0.$$

Charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Lösungen

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j.$$

Komplexe Lösungsfunktion

$$y(x) = e^{jx}.$$

Reelle Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos(x) \\ y_2(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Allgemeine homogenen Lösung

$$y_H = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Für die rechte Seite gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right).$$

- Partikuläre Lösung für

  $$y'' + y = e^{jx}.$$

  Da j eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, liegt Resonanz vor. Ansatz

  $$\begin{aligned} y(x) &= cxe^{jx} \\ y'(x) &= ce^{jx}(1 + jx) \\ y''(x) &= ce^{jx}(2j - x) \end{aligned}$$

  Einsetzen in DGL

  $$\begin{aligned} ce^{jx}(2j - x) + cxe^{jx} &= e^{jx} \\ c(2j - x) + cx &= 1 \\ c &= \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}. \end{aligned}$$

  Lösung

  $$y_1(x) = -\frac{j}{2}xe^{jx}.$$

- Partikuläre Lösung für
$$y'' + y = e^{-jx}.$$
Da $-j$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, liegt Resonanz vor. Ansatz
$$\begin{aligned} y(x) &= cxe^{-jx} \\ y'(x) &= ce^{-jx}(1 - jx) \\ y''(x) &= ce^{-jx}(-2j - x) \end{aligned}$$
Einsetzen in DGL
$$\begin{aligned} ce^{-jx}(-2j - x) + cxe^{-jx} &= e^{-jx} \\ c(-2j - x) + cx &= 1 \\ c &= \frac{1}{-2j} = \frac{j}{2}. \end{aligned}$$
Lösung
$$y_2(x) = \frac{j}{2}xe^{-jx} = \overline{y_1}.$$

Partikuläre Lösung für rechte Seite $\cos(x)$
$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + \overline{y_1}) \\ &= \mathrm{re}(y_1) \\ &= \mathrm{re}\left(-\frac{j}{2}xe^{jx}\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2}\sin(x)\right) \\ &= \frac{x\sin(x)}{2}. \end{aligned}$$
Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL
$$y = \frac{x\sin(x)}{2} + C_1\cos(x) + C_2\sin(x).$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$$y' + (1 + \cos(x))(y - 1) = 0.$$

Lösung von Aufgabe 2. Die DGL ist separierbar:
$$\begin{aligned} y' &= -(1 + \cos(x))(y - 1) \\ \frac{1}{y-1}dy &= -(1 + \cos(x))dx \\ \ln|y - 1| &= -(x + \sin(x)) + C \\ |y - 1| &= Ke^{-(x+\sin(x))}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\ y - 1 &= Ke^{-(x+\sin(x))}, \quad K \in \mathbb{R} \\ y &= Ke^{-(x+\sin(x))} + 1. \end{aligned}$$

Alternativ hätte man die Aufgabe auch mit Variation der Konstanten lösen können:

$$y' + (1+\cos(x))y \quad = \quad 1+\cos(x).$$

Dies ist eine lineare, inhomogene DGL.

- Lösen der homogenen DGL

  $$y' + (1+\cos(x))y \quad = \quad 0$$

  durch Trennung der Variablen.

  $$\begin{aligned} y' &= -(1+\cos(x))y \\ \frac{1}{y}dy &= -(1+\cos(x))dx \\ \ln|y| &= -(x+\sin(x)) + C \\ |y| &= e^{-(x+\sin(x))}K, \qquad K \in \mathbb{R}^+ \\ y &= \pm K e^{-(x+\sin(x))} \\ &= K e^{-(x+\sin(x))}, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Variation der Konstanten. Ansatz

  $$\begin{aligned} y &= k(x)e^{-(x+\sin(x))} \\ y' &= k'(x)e^{-(x+\sin(x))} + k(x)(-(1+\cos(x))e^{-(x+\sin(x))}. \end{aligned}$$

  Einsetzen in die inhomogene DGL.

  $$\begin{aligned} y' + (1+\cos(x))y &= 1+\cos(x) \\ \underbrace{k'(x)e^{-(x+\sin(x))} + k(x)(-(1+\cos(x))e^{-(x+\sin(x))}}_{y'} &+ \\ (1+\cos(x))\underbrace{k(x)e^{-(x+\sin(x))}}_{y} &= 1+\cos(x) \\ k'(x)e^{-(x+\sin(x))} &= 1+\cos(x) \\ k'(x) &= (1+\cos(x))e^{x+\sin(x)} \\ k(x) &= e^{x+\sin(x)} + C \end{aligned}$$

  Lösung

  $$\begin{aligned} y &= \underbrace{\left(e^{x+\sin(x)} + C\right)}_{k(x)} e^{-(x+\sin(x))} \\ &= 1 + Ce^{-(x+\sin(x))}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} \cos(t) & \text{falls } -\pi/2 \le t \le \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

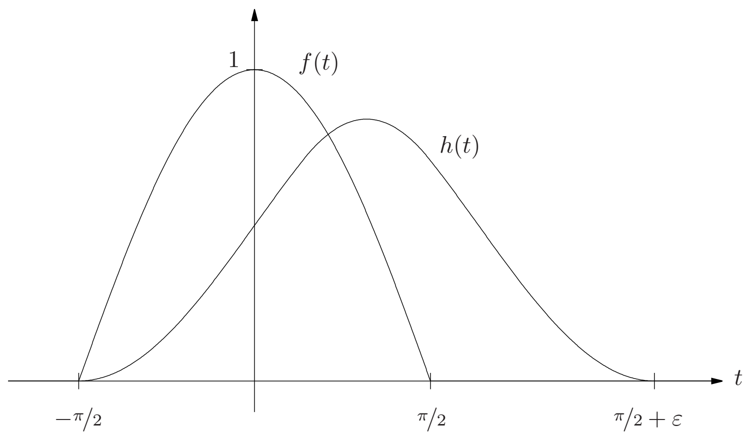
und

$$g_\varepsilon(t) \quad = \quad \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{falls } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktionen $f(t)$ und $h(t) = (f * g_\varepsilon)(t)$ in einem gemeinsamem Koordinatensystem für $\varepsilon = 2$.

Geben Sie alle Stellen an, an denen f bzw. h unstetig bzw. nicht differenzierbar sind.

Lösung von Aufgabe 3. f ist überall stetig und nur bei $t = \pm\pi/2$ nicht differenzierbar. h ist überall stetig und differenzierbar.



Aufgabe 4. Berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung von

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } -1 \leq t < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Drücken Sie das Ergebnis nicht mit einer Fallunterscheidung sondern unter Verwendung von Sprungfunktionen aus.

Hinweis: Skizzieren Sie die Funktion zunächst!

Lösung von Aufgabe 4. Mit

$$\operatorname{rect}(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$$

lässt sich $f(t)$ darstellen durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \operatorname{rect}(t) + t\operatorname{rect}(t) \\ &= 1 + \operatorname{rect}(t)(t-1). \end{aligned}$$

Aus

$$\operatorname{rect}'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

folgt

$$\begin{aligned} f'(t) &= \operatorname{rect}'(t)(t-1) + \operatorname{rect}(t) \\ &= (\delta(t+1) - \delta(t-1))(t-1) + \sigma(t+1) - \sigma(t-1) \\ &= \delta(t+1)(-2) - \delta(t-1)0 + \sigma(t+1) - \sigma(t-1) \\ &= -2\delta(t+1) + \sigma(t+1) - \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausale Funktionen, d.h.

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{für alle } t < 0.$$

- Zeigen Sie, dass $f * g$ eine kausale Funktion ist.
- Zeigen Sie, dass $(f * g)(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 5.

- Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kausal.

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.\end{aligned}$$

  Für $t < 0$ integriert man über negative τ und in diesem Bereich ist $f(\tau) = 0$. Daher ist

$$(f * g)(t) = 0 \qquad \text{für alle } t < 0.$$

- Für $t = 0$ erstreckt sich das Integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

  nur über einen Punkt $\tau = 0$. Da $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionswerte endlich und somit ist die Fläche Null, d.h.

$$(f * g)(0) = 0.$$

Aufgabe 6. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $g_\varepsilon(t)$ eine stetige Funktion mit

$$g_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{für } t \notin [0, \varepsilon]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Weiter sei $f(t)$ stetig bei $t = 0$. Begründen Sie anschaulich, weshalb dann

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\varepsilon(t)dt = f(0).$$

Lösung von Aufgabe 6. Da $g_\varepsilon(t) = 0$ für $t \notin [0, \varepsilon]$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\varepsilon(t)dt = \int_0^{\varepsilon} f(t)g_\varepsilon(t)dt.$$

Für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ ist $f(t)$ im Integrationsbereich beliebig nah an $f(0)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_\varepsilon(t)dt &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\varepsilon} f(t)g_\varepsilon(t)dt \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(0) \int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)dt \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(0) \\ &= f(0).\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t > 0 \\ t & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und

$$g_\varepsilon(t) \quad = \quad \begin{cases} {}^1\!/\!_\varepsilon & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f hat an der Stelle $t = 0$ einen Knick und ist dort nicht differenzierbar.

- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$.
- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)'(t)$ und

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (f * g_\varepsilon)'(t).$$

- Stellen Sie die Funktion $f(t)$ ohne Fallunterscheidung durch Verwendung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ dar und berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung von $f(t)$.

Hinweis: Es hilft, wenn Sie die beiden Funktionen zuerst skizzieren und sich veranschaulichen, wie f durch Faltung mit g_ε geglättet wird.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- Falls $t > \varepsilon$ ist im gesamten Integrationsbereich $t - \tau > 0$ und damit $f(t-\tau) = 0$. In diesem Fall ist

$$(f * g_\varepsilon)(t) \quad = \quad 0.$$

- Falls $t \leq 0$ ist im gesamten Integrationsbereich $t - \tau \leq 0$ und damit $f(t-\tau) = t - \tau$. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(t\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) \\ &= t - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

- Falls $0 < t \leq \varepsilon$ muss das Integral in zwei Teilintegrale zerlegt werden. Es gilt

$$\int_0^\varepsilon f(t-\tau) d\tau \quad = \quad \int_0^t f(t-\tau) d\tau + \int_t^\varepsilon f(t-\tau) d\tau.$$

Im ersten Teilintegral ist $0 \leq \tau \leq t$. Folglich ist $t - \tau \geq 0$ und $f(t-\tau) = 0$. Im zweiten Teilintegral ist $t \leq \tau \leq \varepsilon$. Folglich ist $t - \tau \leq 0$ und $f(t-\tau) = t - \tau$. Damit ist

$$\begin{aligned}
(f * g_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^\varepsilon (t-\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_t^\varepsilon \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(t\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - t^2 + \frac{1}{2}t^2\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}t^2 + t\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \\
&= -\frac{1}{2\varepsilon}\left(t^2 - 2t\varepsilon + \varepsilon^2\right) \\
&= -\frac{1}{2\varepsilon}(t-\varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist somit

$$(f * g_\varepsilon)(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t > \varepsilon \\ t - \varepsilon/2 & \text{falls } t \leq 0 \\ -(t-\varepsilon)^2/(2\varepsilon) & \text{falls } 0 < t \leq \varepsilon \end{cases}$$

Obwohl die Funktion durch Fallunterscheidung definiert ist, hat sie keine Sprungstellen bei $t = 0$ oder $t = \varepsilon$ und ist überall differenzierbar. Es gilt

$$(f * g_\varepsilon)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t > \varepsilon \\ 1 & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 - t/\varepsilon & \text{falls } 0 < t \leq \varepsilon \end{cases}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(f * g_\varepsilon)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t > 0 \\ 1 & \text{falls } t \leq 0\,. \end{cases}$$

Die Funktion $\sigma(-t)$ ist 0 für $t > 0$ und 1 für $t \leq 0$. Damit ist

$$f(t) = \sigma(-t)t.$$

Mit der Produktregel ist die verallgemeinerte Ableitung

$$f'(t) = -\delta(-t)t + \sigma(-t).$$

Mit der Ausblendeigenschaft vereinfacht sich dies zu

$$f'(t) = \sigma(-t),$$

was der oben berechneten Ableitung der geglätteten Funktion und Grenzwert $\varepsilon \to 0$ entspricht.

Aufgabe 8. Sei

$$f(t) = \sigma(t)(\sin(t) + 1).$$

Berechnen Sie $f'(t)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berechnen Sie dann

$$\int_{-\infty}^{t} f'(\tau) d\tau.$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \delta(t)(\sin(t)+1)+\sigma(t)\cos(t) \\ &= \delta(t)(\sin(0)+1)+\sigma(t)\cos(t) \\ &= \delta(t)+\sigma(t)\cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} (\delta(\tau)+\sigma(\tau)\cos(\tau))d\tau &= \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\cos(\tau)d\tau \\ &= \sigma(t)+\sigma(t)\int_{0}^{t} \cos(\tau)d\tau \\ &= \sigma(t)+\sigma(t)\left[\sin(\tau)\right]_0^t \\ &= \sigma(t)+\sigma(t)(\sin(t)-\sin(0)) \\ &= \sigma(t)(\sin(t)+1). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \delta(t-a) \\ g(t) &= \delta(t-b). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$ und formen Sie so lange um, bis

$$\delta(t-a-b)$$

herauskommt.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-a)\delta(t-\tau-b)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-a)\delta(t-a-b)d\tau \\ &= \delta(t-a-b)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-a)d\tau \\ &= \delta(t-a-b). \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Die Funktion p sei definiert durch

$$p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}$$

bzw.

$$p(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

für alle t. Die Funktion $p(t)$ besteht somit aus einer Folge von Dirac Impulsen an den Stellen $t = kT$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion f gilt

$$f * p \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kT}$$

bzw.

$$(f * p)(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Linearität der Faltung. Insbesondere gilt für die Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls

$$f * \delta_{\hat{t}} \quad = \quad f_{\hat{t}}$$

bzw.

$$(f * \delta_{\hat{t}})(t) \quad = \quad f(t - \hat{t}),$$

d.h. die Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls bewirkt eine Verschiebung.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned} f * p &= f * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \delta_{kT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kT}. \end{aligned}$$

Wertet man beide Seiten an der Stelle t aus, erhält man

$$\begin{aligned} (f * p)(t) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kT} \right)(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kT}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT). \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass

$$(f')_{\hat{t}} \quad = \quad (f_{\hat{t}})'.$$

Es ist also egal, ob man erst ableitet und dann verschiebt, oder erst verschiebt und dann ableitet.

Führen Sie den Beweis auf zwei Arten:

- Unter Verwendung der Definition der Ableitung

$$f'(t) \quad = \quad \frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}.$$

- Unter Verwendung der Verschiebungsfunktion

$$g(t) \quad = \quad t-\hat{t},$$

  mit der sich $f_{\hat{t}}$ als Komposition darstellen lässt:

$$\begin{aligned} f_{\hat{t}}(t) \quad &= \quad f(t-\hat{t}) \\ &= \quad f(g(t)) \text{ bzw.} \\ f_{\hat{t}} \quad &= \quad f \circ g \end{aligned}$$

  und Verwendung der Kettenregel der Ableitung.

Lösung von Aufgabe 11.

- Verwendung der Definition der Ableitung.

$$\begin{aligned} \left[(f')_{\hat{t}}\right](t) \quad &= \quad (f')(t-\hat{t}) \\ &= \quad \frac{f(t-\hat{t}+dt)-f(t-\hat{t})}{dt} \\ \left[(f_{\hat{t}})'\right](t) \quad &= \quad \frac{f_{\hat{t}}(t+dt)-f_{\hat{t}}(t)}{dt} \\ &= \quad \frac{f(t-\hat{t}+dt)-f(t-\hat{t})}{dt}. \end{aligned}$$

- Verwendung der Kettenregel. Mit

$$\begin{aligned} g(t) \quad &= \quad t-\hat{t} \\ g'(t) \quad &= \quad 1 \end{aligned}$$

  folgt

$$\begin{aligned} \left[(f')_{\hat{t}}\right](t) \quad &= \quad f'(t-\hat{t}) \\ \left[(f_{\hat{t}})'\right](t) \quad &= \quad \left[(f \circ g)'\right](t) \\ &= \quad g'(t)f'(g(t)) \\ &= \quad f'(g(t)) \\ &= \quad f'(t-\hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Zeigen Sie folgende beide Gleichungen für alle t und $\hat{t}$.

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t-\hat{t}) &= f(\hat{t})\delta(t-\hat{t}) \\ (f*\delta_{\hat{t}})(t) &= f_{\hat{t}}(t). \end{aligned}$$

Sie dürfen dabei voraussetzen, dass f stetig ist. Der Index $\hat{t}$ bedeutet Verschiebung um $\hat{t}$.

Lösung von Aufgabe 12. Die erste Gleichung ist die Ausblendeigenschaft. Man zeigt sie durch Fallunterscheidung.

- Falls $t=\hat{t}$ steht auf beiden Seiten $f(\hat{t})\delta(0)$.
- Falls $t\neq\hat{t}$ sind beide Seiten aufgrund des Faktors $\delta(t-\hat{t})$ gleich Null.

Die zweite Gleichung folgt aus der Zeitinvarianz der Faltung.

$$f*\delta_{\hat{t}} \quad = \quad (f*\delta)_{\hat{t}} \quad = \quad f_{\hat{t}}.$$

Aufgabe 13. Sei

$$f(t) \quad = \quad at+b$$

eine Gerade und $g(t)$ eine Funktion mit

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \text{ für } t\notin[0,\varepsilon] \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt &= 1 \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon>0$. Zeigen Sie, dass dann $(f*g)(t)$ ebenfalls eine Gerade ist mit gleicher Steigung wie f.

Lösung von Aufgabe 13. Sei $G(t)$ eine Stammfunktion von $g(t)$.

$$\begin{aligned} (f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a(t-\tau)+b)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (at+b-a\tau)g(\tau)d\tau \\ &= (at+b)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau}_{1} - \underbrace{a\int_0^{\varepsilon}\tau g(\tau)d\tau}_{C} \\ &= at+b-C \end{aligned}$$

wobei

$$C \quad = \quad a\int_0^{\varepsilon}\tau g(\tau)d\tau$$

eine von t unabhängige Konstante ist. Damit ist $(f*g)(t)$ eine Gerade mit gleicher Steigung a wie $f(t)$, die um C nach unten verschoben ist.

Aufgabe 14. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t-1)\,(t-1)^2 \\ g(t) &= \sigma(t-2)\,|t-2|. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$.

Lösung von Aufgabe 14. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \sigma(t)\,t^2 \\ \tilde{g}(t) &= \sigma(t)\,|t|. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(t) &= \tilde{f}(t-1) = \tilde{f}_1(t) \\ g(t) &= \tilde{g}(t-2) = \tilde{g}_2(t). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f * g &= \tilde{f}_1 * \tilde{g}_2 \\ &= (\tilde{f} * \tilde{g})_3. \end{aligned}$$

Da $\tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = 0$ für $t < 0$ ist

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \tilde{g})(t) &= \sigma(t) \int_0^t \tilde{f}(\tau)\tilde{g}(t-\tau)d\tau \\ &= \sigma(t) \int_0^t \tau^2 |t-\tau| d\tau. \end{aligned}$$

Für $t < 0$ ist der Funktionswert Null. Für $t \geq 0$ ist im Integral $t - \tau$ nie negativ da $0 \leq \tau \leq t$. Folglich kann man die Betragsstriche weglassen und erhält

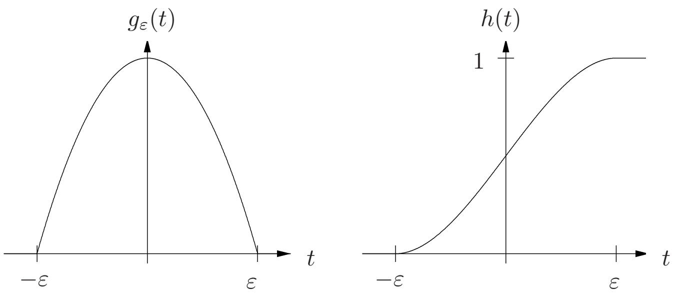
$$\begin{aligned} \sigma(t) \int_0^t \tau^2 (t-\tau) d\tau &= \sigma(t) \int_0^t (t\tau^2 - \tau^3) d\tau \\ &= \sigma(t) \left[\frac{1}{3} t\tau^3 - \frac{1}{4}\tau^4 \right]_0^t \\ &= \sigma(t) \left(\frac{1}{3} t^4 - \frac{1}{4} t^4 \right) \\ &= \frac{1}{12} \sigma(t) t^4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= (\tilde{f} * \tilde{g})(t-3) \\ &= \frac{1}{12} \sigma(t-3)(t-3)^4. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4\varepsilon^3}(t^2 - \varepsilon^2) & \text{für } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



- Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt \quad = \quad 1.$$

- Berechnen Sie

$$h \quad = \quad \sigma * g_\varepsilon.$$

- Für $t \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ gilt $h(t) = \sigma(t)$. Die Faltung mit $g_\varepsilon(t)$ bewirkt eine Glättung des Sprungs so dass $h(t)$ differenzierbar ist. Berechnen Sie $h'(t)$ und erklären Sie, weshalb $h'(t)$ zwar auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist aber nicht differenzierbar.

Lösung von Aufgabe 15.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt &= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(t^2-\varepsilon^2)dt \\
&= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left[\frac{t^3}{3} - t\varepsilon^2\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\
&= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left(\frac{\varepsilon^3}{3} - \varepsilon^3 - \left(-\frac{\varepsilon^3}{3} + \varepsilon^3\right)\right) \\
&= -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right) \\
&= -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - 2\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= (\sigma * g_\varepsilon)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{t} g_\varepsilon(t)dt.
\end{aligned}$$

Damit ist $h(t) = 0$ für $t < -\varepsilon$ und $h(t) = 1$ für $t > \varepsilon$. Für $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\varepsilon}^{t} g_\varepsilon(t)dt \\
&= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left[\frac{t^3}{3} - t\varepsilon^2\right]_{-\varepsilon}^{t} \\
&= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left(\frac{t^3}{3} - t\varepsilon^2 - \left(-\frac{\varepsilon^3}{3} + \varepsilon^3\right)\right) \\
&= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\left(\frac{t^3}{3} - t\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{3} - \varepsilon^3\right) \\
&= -\frac{1}{4\varepsilon^3}t^3 + \frac{3}{4\varepsilon}t - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{4\varepsilon^3}t^3 + \frac{3}{4\varepsilon}t + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon \\ 1 & \text{für } t > \varepsilon \\ -\frac{1}{4\varepsilon^3}t^3 + \frac{3}{4\varepsilon}t + \frac{1}{2} & \text{für } -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon. \end{cases}$$

$$h'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon \text{ oder } t > \varepsilon \\ -\frac{3}{4\varepsilon^3}t^2 + \frac{3}{4\varepsilon} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $h'(t)$ ist für $\hat{t} \neq \pm\varepsilon$ stetig und differenzierbar. Für $t = \pm\varepsilon$ gilt

$$\lim_{t \to \hat{t}} h'(t) = 0 = h'(\hat{t}).$$

Somit ist $h(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Andererseits hat $h'(t)$ einen Knick bei $t = \pm\varepsilon$ und ist dort nicht differenzierbar. Für $t \neq \pm\varepsilon$ gilt

$$h''(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon \text{ oder } t > \varepsilon \\ -\frac{3}{2\varepsilon^3}t & \text{für } -\varepsilon < t < \varepsilon. \end{cases}$$

Für $t = \varepsilon$ ist die Sekantensteigung von $h'(t)$ zwischen ε und $\varepsilon + \Delta t$

$$\begin{aligned}
\frac{h'(\varepsilon + \Delta t) - h'(\varepsilon)}{\Delta t} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \Delta t > 0 \\ \left(-\frac{3}{4\varepsilon^3}(\varepsilon + \Delta t)^2 + \frac{3}{4\varepsilon}\right)\frac{1}{\Delta t} & \text{falls } \Delta t < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } \Delta t > 0 \\ -\frac{3}{4\varepsilon^3}(2\varepsilon + \Delta t) & \text{falls } \Delta t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0}} \frac{h'(\varepsilon + \Delta t) - h'(\varepsilon)}{\Delta t} &= 0 \\
\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t < 0}} \frac{h'(\varepsilon + \Delta t) - h'(\varepsilon)}{\Delta t} &= -\frac{3}{2\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert bei $\Delta t = 0$ unterschiedlich sind, existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h'(\varepsilon + \Delta t) - h'(\varepsilon)}{\Delta t}$$

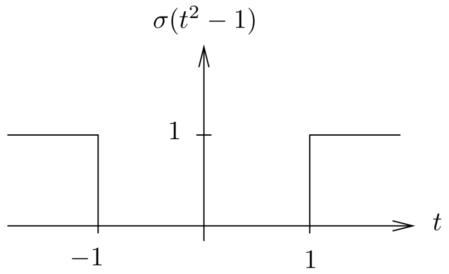
nicht und $h'(t)$ ist an der Stelle $t = \varepsilon$ nicht differenzierbar. Der Beweis, dass $h'(t)$ bei $t = -\varepsilon$ nicht differenzierbar ist, ist analog.

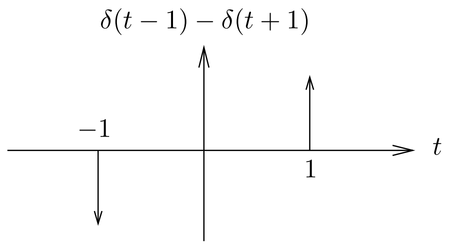
Aufgabe 16. Berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t^2 - 1).$$

Beachten Sie, dass die Ableitungsregeln der normalen Ableitung nicht auf die verallgemeinerte Ableitung übertragbar sind. Bestimmen Sie daher die verallgemeinerte Ableitung von $f(t)$ anhand einer Skizze.

Lösung von Aufgabe 16.





Da

$$t^2 - 1 \quad \geq \quad 0$$

genau dann wenn $t \geq 1$ oder $t \leq -1$ gilt

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 1 \text{ oder } t \leq -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \quad \sigma(t-1) + 1 - \sigma(t+1). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(t) \quad = \quad \delta(t-1) - \delta(t+1).$$

Aufgabe 17. Ein Ball fällt im Gravitationsfeld der Erde senkrecht nach unten und schlägt zum Zeitpunkt $t = 0$ am Boden auf. Da es sich um einen idealen, elastischen Stoß handelt, ändert sich seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt instantan von 3m/s auf −3m/s.

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ des Balls im Intervall $\left[-\hat{t}, \hat{t}\right]$, wobei $\hat{t}$ so klein ist, dass der Ball in diesem Zeitraum nur einmal zum Zeitpunkt $t = 0$ aufschlägt. Verwenden Sie eine Fallunterscheidung für $t < 0$ und $t > 0$.
- Verwenden Sie die Sprungfunktion $\sigma(t)$ um einen Term für $v(t)$ ohne Fallunterscheidung zu erhalten.
- Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t)$ des Balls im Intervall $\left[-\hat{t}, \hat{t}\right]$ unter Verwendung von $\delta(t)$.

Lösung von Aufgabe 17. Für $t \neq 0$ gilt

$$v(t) \quad = \quad v_0 + gt.$$

Da der Ball zum Zeitpunkt $t = 0$ seine Geschwindigkeit von 3 auf −3m/s wechselt, gilt

$$\begin{aligned} v(t) \quad &= \quad \begin{cases} 3 + gt & \text{für } t < 0 \\ -3 + gt & \text{für } t > 0 \end{cases} \\ &= \quad 3 + gt - 6\sigma(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a(t) \quad &= \quad v'(t) \\ &= \quad g - 6\delta(t). \end{aligned}$$