

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 14

Aufgabe 1. Sei $g_\varepsilon(t)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\begin{aligned}g_\varepsilon(t) &\geq 0 \text{ für alle } t \\g_\varepsilon(t) &= 0 \text{ für } t \notin [0, \varepsilon] \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt &= 1.\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\f_1(t) &= \sigma(-t) \\f_2(t) &= 1 - \sigma(t).\end{aligned}$$

Dann ist

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{für alle } t \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass der Unterschied an der Stelle $t = 0$ durch Glättung “weggebügelt” wird:

- Berechnen Sie $f_1(0)$ und $f_2(0)$.
- Berechnen Sie

$$(\sigma * g_\varepsilon)(0), (f_1 * g_\varepsilon)(0), \text{ und } (f_2 * g_\varepsilon)(0)$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}f_1(0) &= \sigma(-0) = \sigma(0) = 1. \\f_2(0) &= 1 - \sigma(0) = 1 - 1 = 0 \\(\sigma * g_\varepsilon)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(0 - \tau)g_\varepsilon(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^0 g_\varepsilon(\tau)d\tau \\&= 0 \\(f_1 * g_\varepsilon)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-\tau)g_\varepsilon(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)g_\varepsilon(\tau)d\tau \\&= \int_0^{\infty} g_\varepsilon(\tau)d\tau \\&= 1 \\(f_2 * g_\varepsilon)(0) &= ((1 - \sigma) * g_\varepsilon)(0) \\&= (1 * g_\varepsilon)(0) - (\sigma * g_\varepsilon)(0) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(\tau)d\tau - 0 \\&= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Rechteckimpuls und

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

ein 2-periodischer Impulszug. (Die Summationsvariable k läuft über alle ganzen Zahlen.) Berechnen Sie

$$h(t) = (f * g)(t)$$

und beschreiben Sie, wie $h(t)$ aussieht.

Lösung von Aufgabe 2. Die Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls bewirkt eine Verschiebung. Mit

$$\delta_{2k}(t) = \delta(t - 2k)$$

gilt somit

$$f * \delta_{2k} = f_{2k}.$$

Mit der Linearität der Faltung gilt

$$\begin{aligned}
 f * g &= f * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \delta_{2k} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{2k}.
 \end{aligned}$$

Da f ein Rechteckimpuls ist, besteht $f * g$ somit aus unendlich vielen Rechteckimpulsen im Abstand 2. Wenn man das Faltungsintegral berechnet, kommt man mit Hilfe der Ausblendeigenschaft zum gleichen Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= (f * g)(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 2k)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\delta(\tau - 2k)d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\delta(\tau - 2k)d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - 2k)\delta(\tau - 2k)d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - 2k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 2k)d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - 2k).
 \end{aligned}$$

Da $f(t - 2k)$ gleich ist wie $f(t)$ um $2k$ verschoben, besteht $h(t)$ aus einer unendlichen Summe von Kopien von $f(t)$, die jeweils um $2k$ verschoben sind. Da sich die Kopien nicht überlappen, ist $h(t)$ eine periodische Rechteckfunktion, d.h.

$$h(t) = f(t) \quad \text{für } 0 \leq t < 1$$

und $h(t + 2) = h(t)$ für alle t .

Aufgabe 3. Das System S sei definiert durch

$$[S(f)](t) = f(t) + 3.$$

So ist z.B. für das Inputsignal $f(t) = \sin(t)$ das Outputsignal $h(t) = \sin(t) + 3$.

- Ist dieses System linear?
- Ist dieses System zeitinvariant?
- Gibt es eine Funktion g so dass $S(f) = f * g$?

Geben Sie jeweils eine ausführliche Begründung.

Lösung von Aufgabe 3.

- Das System ist nicht linear:

$$\begin{aligned} [S(f+g)](t) &= (f(t) + g(t)) + 3 \\ [S(f)](t) + [S(g)](t) &= f(t) + 3 + g(t) + 3. \end{aligned}$$

- Das System ist zeitinvariant.

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(t) + 3 \\ &= f(t - \hat{t}) + 3 \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= f(t - \hat{t}) + 3 \end{aligned}$$

- Da das System nicht linear ist, kann es auch nicht durch eine Faltung realisiert werden.

Aufgabe 4. Sei

$$[S(f)](t) = \int_{-t}^t f(\tau) d\tau.$$

- Ist S linear?
- Ist S zeitinvariant?

Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 4.

- S ist linear.

$$\begin{aligned} [S(f+g)](t) &= \int_{-t}^t (f+g)(\tau) d\tau \\ &= \int_{-t}^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \\ &= \int_{-t}^t f(\tau) d\tau + \int_{-t}^t g(\tau) d\tau \\ &= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\ &= [S(f) + S(g)](t) \\ [S(uf)](t) &= \int_{-t}^t (uf)(\tau) d\tau \\ &= u \int_{-t}^t f(\tau) d\tau \\ &= u [S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t) \end{aligned}$$

- S ist nicht zeitinvariant. Aus

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

folgt

$$\begin{aligned} f_{\hat{t}}(\tau) &= f(\tau - \hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= \int_{-t}^t f_{\hat{t}}(\tau) d\tau \\ &= \int_{-t}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau. \end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned} u &= \tau - \hat{t} \\ \frac{du}{d\tau} &= 1 \\ d\tau &= du \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-t}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau &= \int_{-t-\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(u) du \\ &= \int_{-t-\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= \int_{-(t-\hat{t})}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-t+\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Untergrenzen der Integrale stimmen somit nicht überein.

Aufgabe 5. Auf einer Straße von A nach B steht eine Messstelle für Schadstoffe. Aufgrund einer besonders schlaun Umweltschutzverordnung müssen Dieselfahrzeuge diese Messstelle weitläufig umfahren. Die Fahrzeit für den direkten Weg von A nach B sei 10 Sekunden, die Fahrzeit über den Umweg sei 50 Sekunden. Vereinfachend wird angenommen, dass alle Autos gleich schnell fahren. Weiterhin fährt die Hälfte aller Fahrzeuge mit Diesel. Sei $f(t)$ die Stromstärke bei A und $h(t)$ die Stromstärke bei B .

- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$h(t) = (f * g)(t)$$

für alle t .

- Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = \sin^2(\pi t) + 1.$$

Berechnen Sie $h(t)$ für

$$f(t) = c,$$

d.h. die Stromstärke bei A ist konstant.

Lösung von Aufgabe 5.

- Aus

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}f(t-10) + \frac{1}{2}f(t-50) \\ &= \frac{1}{2}(f * \delta)(t-10) + \frac{1}{2}(f * \delta)(t-50) \\ &= \frac{1}{2}(f * \delta_{10})(t) + \frac{1}{2}(f * \delta_{50})(t) \\ &= \left(f * \frac{\delta_{10} + \delta_{50}}{2} \right)(t) \end{aligned}$$

folgt

$$g(t) = \frac{\delta_{10} + \delta_{50}}{2}.$$

- Für

$$f(t) = \sin^2(\pi t) + 1$$

ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\sin^2(\pi(t-10)) + 1 + \sin^2(\pi(t-50)) + 1}{2} \\ &= \frac{\sin^2(\pi t - 10\pi) + \sin^2(\pi t - 50\pi)}{2} + 1 \\ &= \frac{\sin^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)}{2} + 1 \\ &= \sin^2(\pi t) + 1 \\ &= f(t). \end{aligned}$$

- Für $f(t) = c$ ist auch $h(t) = c$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderschaltung zweier LTI Systeme wieder ein LTI System ist.

Lösung von Aufgabe 6. Seien S_1 und S_2 zwei LTI Systeme mit Impulsantworten g_1 und g_2 . Da sich jedes LTI System durch eine Faltung mit seiner Impulsantwort beschreiben lässt, gilt

$$\begin{aligned} S_1(f) &= g_1 * f \\ S_2(f) &= g_2 * f. \end{aligned}$$

Für die Hintereinanderschaltung der Systeme gilt somit

$$\begin{aligned} S_1(S_2(f)) &= g_1 * (g_2 * f) \\ &= \underbrace{(g_1 * g_2)}_g * f \\ &= g * f. \end{aligned}$$

Das resultierende System lässt sich somit durch eine Faltung mit einer Funktion g beschreiben und ist folglich LTI.

Aufgabe 7. LTI Systeme verhalten sich besonders einfach, wenn das Eingangssignal eine harmonische Schwingung ist. In diesem Fall ist auch das Ausgangssignal eine harmonische Schwingung mit gleicher Kreisfrequenz. In dieser Aufgabe soll dies anhand einer einfachen, komplexen Schwingung gezeigt werden: Sei

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

und S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann

$$S(f) = zf$$

wobei z eine Konstante ist, d.h. nicht von t abhängt.

Die komplexe Schwingung $f(t) = e^{j\omega t}$ wird durch das System S also nur um $|z|$ verstärkt und um $\angle z$ phasenverschoben. Berechnen Sie z anhand der Impulsantwort g des Systems S .

Da z von ω abhängt, ist z eine Funktion von ω . Diese Funktion $G(\omega)$ heißt Übertragungsfunktion des LTI Systems. Später werden wir zeigen, dass $G(\omega)$ die Fourier Transformierte der Impulsantwort $g(t)$ ist.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= (f * g)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau \\ &= e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau}_z. \end{aligned}$$

Mit

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}g(\tau)d\tau.$$

gilt somit

$$S(f) = zf.$$

Aufgabe 8. Sei S ein System, das ein Inputsignal f in ein Outputsignal h transformiert, wobei

$$h(t) = f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 8. Man kann die Aufgabe auf zwei Weisen lösen.

- Zeige, dass es eine Funktion g gibt so dass

$$h = f * g.$$

Mit

$$\begin{aligned} f(t) &= (\delta * f)(t) \\ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= (\sigma * f)(t) \end{aligned}$$

gilt aufgrund der Linearität der Faltung

$$\begin{aligned} h(t) &= (\delta * f)(t) + (\sigma * f)(t) \\ &= ((\delta + \sigma) * f)(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$S(f) = (\delta + \sigma) * f.$$

Das System S lässt sich somit durch Faltung mit der Impulsantwort $g = \delta + \sigma$ beschreiben und ist daher LTI.

- Zeige die Linearität und Zeitinvarianz

$$\begin{aligned} S(f + g) &= S(f) + S(g) \\ S(uf) &= uS(f) \\ S(f_{\hat{t}}) &= S(f)_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

Linearität.

$$\begin{aligned} [S(f+g)](t) &= (f+g)(t) + \int_{-\infty}^t (f+g)(\tau) d\tau \\ &= f(t) + g(t) + \int_{-\infty}^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \\ &= f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau + g(t) + \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \\ &= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\ &= [S(f) + S(g)](t) \\ [S(uf)](t) &= (uf)(t) + \int_{-\infty}^t (uf)(\tau) d\tau \\ &= uf(t) + \int_{-\infty}^t uf(\tau) d\tau \\ &= u \left(f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) \\ &= u [S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t). \end{aligned}$$

Zeitinvarianz.

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(t) + \int_{-\infty}^t f_{\hat{t}}(\tau) d\tau \\ &= f(t - \hat{t}) + \int_{-\infty}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} u &= \tau - \hat{t} \\ du &= d\tau \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(t - \hat{t}) + \int_{-\infty}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau &= f(t - \hat{t}) + \int_{-\infty}^{t - \hat{t}} f(u) du \\ &= f(t - \hat{t}) + \int_{-\infty}^{t - \hat{t}} f(\tau) d\tau \\ &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= [S(f)_{\hat{t}}](t). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Sei

$$[S(f)](t) = f(t^2).$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 9. S ist linear aber nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
 [S(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)(t^2) \\
 &= f_1(t^2) + f_2(t^2) \\
 &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\
 &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\
 [S(af)](t) &= (af)(t^2) \\
 &= af(t^2) \\
 &= a[S(f)](t) \\
 &= [aS(f)](t) \\
 [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(t^2) \\
 &= f(t^2 - \hat{t}) \\
 [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\
 &= f((t - \hat{t})^2).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Sei S ein LTI System mit

$$S(f) = h$$

wobei h die Lösung der DGL

$$h'(t) + 3h(t) = f(t)$$

mit dem Startwert $h(-\infty) = 0$ ist.

Berechnen Sie die Impulsantwort dieses Systems.

Lösung von Aufgabe 10. Die Impulsantwort ist die Lösung der DGL

$$h'(t) + 3h(t) = \delta(t)$$

mit $h(-\infty) = 0$.

Lösung der homogenen DGL mit Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}
 h' + 3h &= 0 \\
 h' &= -3h \\
 \frac{1}{h}dh &= -3dt \\
 \ln|h| &= -3t + C \\
 |h| &= Ke^{-3t} \quad K \in \mathbb{R}^+ \\
 h &= Ke^{-3t} \quad K \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned}
 h(t) &= k(t)e^{-3t} \\
 h'(t) &= k'(t)e^{-3t} - 3k(t)e^{-3t}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen.

$$\begin{aligned}
 k'(t)e^{-3t} - 3k(t)e^{-3t} + 3k(t)e^{-3t} &= \delta(t) \\
 k'(t)e^{-3t} &= \delta(t) \\
 k'(t) &= \delta(t)e^{3t} \\
 &= \delta(t) \\
 k(t) &= \sigma(t) + C.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$h(t) = (\sigma(t) + C)e^{-3t}.$$

Mit der Randbedingung $h(-\infty) = 0$ folgt

$$h(t) = \sigma(t)e^{-3t}.$$

Aufgabe 11. Gegeben ist ein LTI System S mit Impulsantwort

$$g(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Berechnen Sie $S(f)$ für $f(t) = \cos(t)$.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{aligned}
 [S(f)](t) &= (f * g)(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cos(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} \operatorname{re}\left(e^{j(t-\tau)}\right)d\tau \\
 &= \operatorname{re}\left(\int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{j(t-\tau)} d\tau\right) \\
 &= \operatorname{re}\left(\int_0^{\infty} e^{-\tau+jt-j\tau} d\tau\right) \\
 &= \operatorname{re}\left(e^{jt} \int_0^{\infty} e^{\tau(-1-j)} d\tau\right) \\
 &= \operatorname{re}\left(e^{jt} \frac{1}{-1-j} \left[e^{\tau(-1-j)}\right]_0^{\infty}\right) \\
 &= \operatorname{re}\left(e^{jt} \frac{1}{1+j}\right) \\
 &= \operatorname{re}\left(e^{jt} \frac{1-j}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{re}((\cos(t) + j \sin(t))(1-j)) \\
 &= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 12. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) = tf(t).$$

Entscheiden Sie, ob S linear bzw. zeitinvariant ist und geben Sie jeweils eine Begründung. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie zeigen müssen.

Lösung von Aufgabe 12. Linearität. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} S(f + g) &= S(f) + S(g) \\ S(uf) &= uS(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S(f + g)](t) &= t(f + g)(t) \\ &= t(f(t) + g(t)) \\ &= tf(t) + tg(t) \\ &= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\ &= [S(f) + S(g)](t) \\ [S(uf)](t) &= t(uf)(t) \\ &= tuf(t) \\ &= utf(t) \\ &= u[S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t) \end{aligned}$$

Zeitinvarianz. Zu zeigen ist

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}.$$

Dies ist hier nicht der Fall:

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= tf_{\hat{t}}(t) \\ &= tf(t - \hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= (t - \hat{t})f(t - \hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Das LTI System S ist definiert durch

$$\begin{aligned} S(f) &= f_{-1} * \sigma * \sigma \quad \text{wobei} \\ f_{-1}(t) &= f(t - 1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ von S und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Insbesondere dürfen keine Faltungen oder Integrale darin auftreten.

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned} (\sigma * \sigma)(t) &= \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau \\ &= \sigma(t) \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \\ &= t\sigma(t). \end{aligned}$$

Die Faltung mit $\delta(t-1)$ bewirkt eine Verschiebung. Folglich ist

$$\begin{aligned} g(t) &= (\delta_{-1} * \sigma * \sigma)(t) \\ &= (t-1)\sigma(t-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Sei S ein kausales LTI System und

$$f(t) = \sigma(t)(at + b)$$

mit Konstanten a, b . Zeigen Sie, dass dann

$$[S(f)](t) = \sigma(t)(ut + v)$$

für bestimmte Konstanten u, v und stellen Sie Formeln für die Berechnung dieser Konstanten auf.

Lösung von Aufgabe 14. Sei g die Impulsantwort von S . Da S kausal ist, gilt $g(\tau) = 0$ für $\tau < 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} [S(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau)\sigma(t-\tau)(a(t-\tau) + b)d\tau \\ &= \begin{cases} \int_0^t g(\tau)(at - a\tau + b)d\tau & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \\ &= \sigma(t) \int_0^t g(\tau)(at - a\tau + b)d\tau \\ &= \sigma(t) \left(\int_0^t g(\tau)atd\tau + \int_0^t g(\tau)(-a\tau + b)d\tau \right) \\ &= \sigma(t) \left(t \int_0^t ag(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)(-a\tau + b)d\tau \right) \\ &= \sigma(t)(ut + v) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t ag(\tau)d\tau \\ v &= \int_0^t g(\tau)(-a\tau + b)d\tau. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Von einem LTI System S sei bekannt, dass

$$[S(f)](t) = 3 \sin(t + 1/2) \quad \text{für } f(t) = \sin(t).$$

Berechnen Sie $[S(f)](t)$ für

- 1.) $f(t) = \sin(t - 1)$
- 2.) $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$
- 3.) $f(t) = (u * v)(t)$ mit $u(t) = \sin(t)$ und $v(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 1)$.

Lösung von Aufgabe 15. Sei g die Impulsantwort von S . Dann ist

$$S(f) = f * g.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} S(f_i) &= f_i * g = (f * g)_i = S(f)_i \\ S(f') &= f' * g = (f * g)' = S(f)' \\ S(u * v) &= (u * v) * g = (u * g) * v = S(u) * v. \end{aligned}$$

- Sei $f(t) = \sin(t - 1)$ und $h(t) = \sin(t)$. Dann ist $f = h_1$ und

$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= [S(h_1)](t) = [S(h)_1](t) = [S(h)](t - 1) \\ &= 3 \sin(t - 1 + 1/2) = 3 \sin(t - 1/2). \end{aligned}$$

- Sei $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$ und $h(t) = \sin(t)$. Dann ist $f = h + h'$ und

$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= [S(h + h')](t) = [S(h) + S(h')](t) \\ &= [S(h)](t) + [S(h)]'(t) = 3 \sin(t + 1/2) + 3 \cos(t + 1/2). \end{aligned}$$

- Sei $f(t) = (u * v)(t)$ mit $u(t) = \sin(t)$ und $v(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 1)$.
Dann ist

$$\begin{aligned} [S(f)](t) &= [S(u * v)](t) = (S(u) * v)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 3 \sin(t + 1/2 - \tau)(\sigma(\tau) - \sigma(\tau - 1))d\tau \\ &= 3 \int_0^1 \sin(t + 1/2 - \tau)d\tau \\ &= -3 \int_0^1 \sin(\tau - t - 1/2)d\tau \\ &= 3 [\cos(\tau - t - 1/2)]_0^1 d\tau \\ &= 3(\cos(1 - t - 1/2) - \cos(-t - 1/2)) \\ &= 3 \cos(t - 1/2) - 3 \cos(t + 1/2). \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) = f(3t).$$

Entscheiden Sie ob S linear und zeitinvariant ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Schreiben Sie zunächst hin, was Sie zeigen müssen.

Lösung von Aufgabe 16. S ist linear. Zu zeigen:

$$\begin{aligned}S(f + g) &= S(f) + S(g) \\S(uf) &= uS(f).\end{aligned}$$

Zwei Funktionen sind gleich wenn Sie die selben Funktionswerte für alle t haben.

$$\begin{aligned}[S(f + g)](t) &= (f + g)(3t) \\&= f(3t) + g(3t) \\&= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\&= [S(f) + S(g)](t) \\[S(uf)](t) &= (uf)(3t) \\&= uf(3t) \\&= u[S(f)](t) \\&= [uS(f)](t).\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant. Die Eigenschaft

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}$$

ist nicht erfüllt.

$$\begin{aligned}[S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(3t) \\&= f(3t - \hat{t}) \\[S(f)_{\hat{t}}](t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\&= f(3(t - \hat{t})) \\&= f(3t - 3\hat{t})\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Seien S_1, S_2 Systeme mit

$$\begin{aligned}[S_1(f)](t) &= e^{f(t)} \\[S_2(f)](t) &= f(e^t).\end{aligned}$$

Entscheiden Sie von beiden Systemen, ob sie linear bzw. zeitinvariant sind.

Lösung von Aufgabe 17.

- S_1 ist nicht linear, aber zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
[S_1(f_1 + f_2)](t) &= e^{(f_1+f_2)(t)} \\
&= e^{f_1(t)} e^{f_2(t)} \\
[S_1(f_1) + S_1(f_2)](t) &= [S_1(f_1)](t) + [S_1(f_2)](t) \\
&= e^{f_1(t)} + e^{f_2(t)} \\
[S_1(af)](t) &= e^{(af)(t)} \\
&= e^{af(t)} \\
[aS_1(f)](t) &= a[S_1(f)](t) \\
&= ae^{f(t)} \\
[S_1(f_{\hat{t}})](t) &= e^{f_{\hat{t}}(t)} \\
&= e^{f(t-\hat{t})} \\
&= [S_1(f)](t - \hat{t}) \\
&= [S_1(f)_{\hat{t}}](t).
\end{aligned}$$

- S_2 ist linear, aber nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
[S_2(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)(e^t) \\
&= f_1(e^t) + f_2(e^t) \\
&= [S_2(f_1)](t) + [S_2(f_2)](t) \\
&= [S_2(f_1) + S_2(f_2)](t) \\
[S_2(af)](t) &= (af)(e^t) \\
&= af(e^t) \\
&= a(S_2(f))(t) \\
&= (aS_2(f))(t) \\
(S(f_{\hat{t}}))(t) &= f_{\hat{t}}(e^t) \\
&= f(e^t - \hat{t}) \\
(S(f)_{\hat{t}})(t) &= S(f)(t - \hat{t}) \\
&= f(e^{t-\hat{t}})
\end{aligned}$$

Aufgabe 18. Sei g eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $f * g$ eine T -periodische Funktion ist für beliebiges f .

Wenn man sich f als akustisches Signal und g als Raumimpulsantwort vorstellt, ist anschaulich klar, dass wenn der Sender ein periodisches Signal abschickt, beim Empfänger ebenfalls ein periodisches Signal mit gleicher Periodendauer ankommen muss.

Lösung von Aufgabe 18. Sei g eine T -periodische Funktion, d.h.

$$g(t + T) = g(t) \quad \text{für alle } t.$$

Sei f eine beliebige Funktion. Zu zeigen

$$(f * g)(t + T) = (f * g)(t) \quad \text{für alle } t.$$

Es gilt

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

und folglich

$$(f * g)(t + T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t + T - \tau)d\tau.$$

Da g eine T -periodische Funktion ist, gilt

$$g(t + T - \tau) = g(t - \tau)$$

und folglich

$$\begin{aligned} (f * g)(t + T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Sei

$$f(t) = t$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktionen $(fp)(t) = f(t)p(t)$ und $((fp) * g)(t)$.

Lösung von Aufgabe 19.

