

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 15

Aufgabe 1. Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ heißt lineare Hülle von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, geschrieben

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, weshalb

$$\vec{b} \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3).$$

Hinweis: Sie müssen hierfür lediglich zeigen, dass die Gleichung

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3.$$

keine Lösung hat.

Lösung von Aufgabe 1. Die Gleichung

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$$

führt zu einem LGS

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{array}$$

Da die letzte Gleichung keine Lösung hat, ist das LGS unlösbar.

Aufgabe 2. Sei f eine zweistellige, lineare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die einstellige Funktion g mit

$$g(x) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

linear ist.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}g(x+y) &= f\left(\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\&= f\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\&= f\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\&= g(x) + g(y) \\g(ux) &= f\left(\begin{pmatrix} ux \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\&= f\left(u\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\&= uf\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\&= ug(x).\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix Darstellung von f , d.h. eine Matrix A so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle \vec{x} .

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Matrix Darstellung von f ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{e\sqrt{x}} \quad \text{für } x > 0.$$

Lösung von Aufgabe 4. Homogene DGL.

$$\begin{aligned}y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} &= 0 \\y' &= -\frac{y}{2\sqrt{x}} \\ \frac{1}{y} dy &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Integration der rechten Seite

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx &= \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^{1/2}}{1/2} \\ &= \sqrt{x}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\ln(|y|) &= -\sqrt{x} + C \\ |y| &= e^{-\sqrt{x}} e^C \\ &= K e^{-\sqrt{x}}, \quad K \in \mathbb{R}^+ \\ y &= K e^{-\sqrt{x}}, \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$y = k(x)e^{-\sqrt{x}}.$$

Ableiten

$$\begin{aligned}y' &= k'(x)e^{-\sqrt{x}} + k(x)e^{-\sqrt{x}}(-1/2)x^{-1/2} \\ &= k'(x)e^{-\sqrt{x}} - k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL.

$$\begin{aligned}k'(x)e^{-\sqrt{x}} - k(x)\frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} + \frac{k(x)e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \\ k'(x)e^{-\sqrt{x}} &= \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \\ k'(x) &= 1 \\ k(x) &= x + C.\end{aligned}$$

Damit ist

$$y(x) = (x + C)e^{-\sqrt{x}}.$$

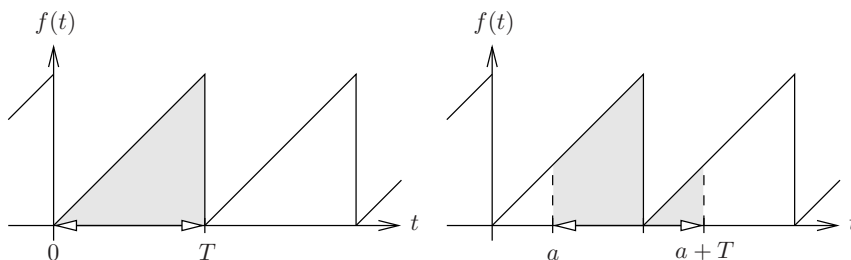
Aufgabe 5. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle t . Zeigen Sie, dass für beliebiges a gilt

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter $f(t)$ in einer Periode unabhängig davon ist, wo die Periode beginnt. In folgendem Bild wird dies am Beispiel einer Sägezahnfunktion dargestellt.



Hinweis:

- Zerlegen Sie das Integral in zwei Teilintegrale:

$$\int_a^{a+T} \dots = \int_a^0 \dots + \int_0^{a+T} \dots$$

- Führen Sie im ersten Integral eine Substitution $u = t + T$ durch. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen zu

$$\int_{a+T}^T \dots$$

- Im Integrand dieses Integrals nutzen Sie nun die Periodizität von f , indem Sie $f(u - T)$ durch $f(u)$ ersetzen. Die Integrationsvariable u ersetzen Sie danach wieder durch t .
- Da die Integranden der beiden Integrale nun wieder gleich sind, können Sie die Integrale zu einem Integral zusammensetzen. Sie müssen hierzu lediglich die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^T \dots + \int_0^{a+T} \dots &= \int_0^{a+T} \dots + \int_{a+T}^T \dots \\ &= \int_0^T \dots \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 5.

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^{a+T} f(t) dt.$$

Substitution im ersten Integral.

$$\begin{aligned} u &= t + T \\ \frac{du}{dt} &= 1 \\ du &= dt \\ t &= u - T. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_{a+T}^T f(u - T) du + \int_0^{a+T} f(t) dt.$$

Da $f(t)$ eine T -periodische Funktion ist, gilt

$$f(u - T) = f(u).$$

Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_{a+T}^T f(u) du + \int_0^{a+T} f(t) dt.$$

Die Integrationsvariable darf beliebig umbenannt werden. Ersetzt man im ersten Integral u wieder durch t , erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_{a+T}^T f(t) dt + \int_0^{a+T} f(t) dt \\ &= \int_0^{a+T} f(t) dt + \int_{a+T}^T f(t) dt \\ &= \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei S ein System, das definiert ist durch

$$[S(f)](t) = f(-t) \quad \text{für alle } t.$$

Das System kehrt somit das Inputsignal auf der Zeitachse um. Entscheiden Sie, ob das System linear und zeitinvariant ist. Beweisen Sie Ihre Antworten.

Lösung von Aufgabe 6. Es gilt

$$[S(f)](t) = f(-t).$$

Das System ist linear.

$$\begin{aligned} [S(f_1 + f_2)](t) &= (f_1 + f_2)(-t) \\ &= f_1(-t) + f_2(-t) \\ &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\ &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\ [S(uf)](t) &= (uf)(-t) \\ &= uf(-t) \\ &= u[S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t) \end{aligned}$$

Das System ist nicht zeitinvariant. Mit

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

gilt

$$\begin{aligned} [S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}(-t) \\ &= f(-t - \hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= f(-(t - \hat{t})) \\ &= f(-t + \hat{t}). \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Seien $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = g(t) = 0 \text{ falls } t < 0.$$

Begründen Sie, weshalb in diesem Fall gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Um die Faltung von f und g zu berechnen, muss in diesem Fall also nicht von $-\infty$ bis ∞ integriert werden sondern nur von 0 bis t .

Lösung von Aufgabe 7. Da $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Aus $g(t) = 0$ für $t < 0$ folgt

$$g(t - \tau) = 0 \text{ für } \tau > t.$$

Damit gilt

$$\int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Aufgabe 8. Der Index \hat{t} an einer Funktion f bedeutet Verschiebung um \hat{t} , d.h.

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t}).$$

Schreiben Sie folgende Funktionen ohne Index \hat{t} :

$$\begin{aligned} (f_{\hat{t}} \circ g)(t) \\ (f \circ g_{\hat{t}})(t) \\ (f_{\hat{t}} \circ g_{\hat{t}})(t) \\ (f \circ g)_{\hat{t}}(t) \end{aligned}$$

Welche dieser Funktionen sind gleich? Hinweis. Im ersten Beispiel rechnet man

$$\begin{aligned} (f_{\hat{t}} \circ g)(t) &= f_{\hat{t}}(g(t)) \\ &= f(g(t) - \hat{t}). \end{aligned}$$

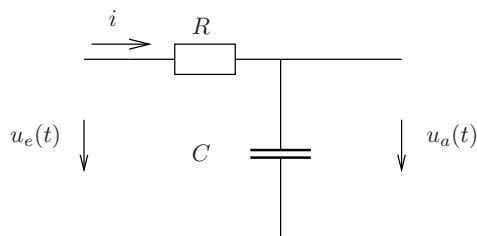
Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{aligned} (f_{\hat{t}} \circ g)(t) &= f_{\hat{t}}(g(t)) \\ &= f(g(t) - \hat{t}) \\ (f \circ g_{\hat{t}})(t) &= f(g_{\hat{t}}(t)) \\ &= f(g(t - \hat{t})) \\ (f_{\hat{t}} \circ g_{\hat{t}})(t) &= f_{\hat{t}}(g_{\hat{t}}(t)) \\ &= f_{\hat{t}}(g(t - \hat{t})) \\ &= f(g(t - \hat{t}) - \hat{t}) \\ (f \circ g)_{\hat{t}}(t) &= (f \circ g)(t - \hat{t}) \\ &= f(g(t - \hat{t})). \end{aligned}$$

Es gilt

$$f \circ g_{\hat{t}} = (f \circ g)_{\hat{t}}.$$

Aufgabe 9. Gegeben sei folgende Schaltung:



Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung $u_a(t)$ aus der Eingangsspannung $u_e(t)$ durch eine Faltung berechnet werden kann, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass

$$u_a(t) = (u_e * g)(t).$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- Leiten Sie zunächst aus den Gesetzen der Elektrotechnik die Differentialgleichung

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{u_e(t)}{R}.$$

für die Ladung $q(t)$ des Kondensators her. Benutzen Sie hierfür

$$i(t) = q'(t)$$

und die Maschenregel

$$Ri(t) + u_a(t) = u_e(t).$$

- Die DGL ist linear mit konstanten Koeffizienten und inhomogen. Da $u_e(t)$ eine beliebige Funktion sein kann, müssen Sie die DGL mit Variation der Konstanten $k(t)$ lösen.
- Zeigen Sie, dass

$$\int_{t_0}^t k'(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $k'(t)$ ist für beliebiges t_0 . Zeigen Sie, dass hiermit für die allgemeine Lösung der DGL gilt

$$q(t) = \int_{t_0}^t \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

- Um zu einer eindeutigen Lösung für $q(t)$ zu kommen, sei nun angenommen, dass der Kondensator zum Zeitpunkt $t = -\infty$ entladen ist. Zeigen Sie, dass damit gilt

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_e(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Leiten Sie hieraus die o.g. Funktion $g(t)$ ab so dass

$$u_a = u_e * g.$$

- Sei nun

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $u_a(t)$ durch Faltung. Stellen Sie dabei die Cosinus Funktion als Realteil einer komplexen e -Funktion dar. Das Integral kann vereinfacht werden, wenn man ausnutzt, dass

$$\int \operatorname{re}(f(\tau))d\tau = \operatorname{re}\left(\int f(\tau)d\tau\right).$$

Überlegen Sie sich, wie die Funktion vereinfacht werden kann, wenn t groß ist, d.h. wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis, mit dem was Sie erhalten würden, wenn Sie das Problem mit komplexer Wechselstromrechnung gelöst hätten. Erklären Sie, weshalb die Schaltung als Tiefpass bezeichnet wird.

Lösung von Aufgabe 9.

- Aus

$$u_a(t) = \frac{q(t)}{C}$$

und den gegebenen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) &= u_e(t) \text{ bzw.} \\ q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) &= \frac{u_e(t)}{R}. \end{aligned}$$

- Lösen der homogenen DGL

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = 0.$$

Ansatz $q(t) = e^{\lambda t}$ ergibt

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{RC}e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda + \frac{1}{RC} &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{RC} \end{aligned}$$

und damit

$$q(t) = ke^{-t/RC}$$

für beliebiges k . Variation der Konstanten ergibt

$$\begin{aligned} q(t) &= k(t)e^{-t/RC} \\ q'(t) &= k'(t)e^{-t/RC} - \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL ergibt

$$\begin{aligned} k'(t)e^{-t/RC} - \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}k(t)e^{-t/RC} &= \frac{u_e(t)}{R} \\ k'(t)e^{-t/RC} &= \frac{u_e(t)}{R} \\ k'(t) &= \frac{u_e(t)}{R}e^{t/RC}. \end{aligned}$$

- Zu zeigen ist, dass

$$\left(\int_{t_0}^t k'(\tau) d\tau \right)' = k'(t)$$

für beliebiges t_0 . Sei $k(t)$ eine Stammfunktion von $k'(t)$. Dann ist

$$\int_{t_0}^t k'(\tau) d\tau = k(t) - k(t_0).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^t k'(\tau) d\tau \right)' &= (k(t) - k(t_0))' \\ &= k'(t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{t_0}^t \frac{u_e(\tau)}{R} e^{\tau/RC} d\tau e^{-t/RC} \\ &= \int_{t_0}^t \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau. \end{aligned}$$

- Da $q(-\infty) = 0$, folgt

$$\int_{t_0}^{-\infty} \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = 0$$

und damit

$$q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{u_e(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Da

$$u_a(t) = \frac{q(t)}{C}$$

folgt

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_e(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Damit auch die Obergrenze ∞ gesetzt werden kann, muss sichergestellt werden, dass der Integrand Null wird, sobald $\tau > t$ ist. Dies erreicht man durch einen Faktor $\sigma(t - \tau)$ und erhält

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau) \sigma(t - \tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Damit ist

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

wobei

$$g(t - \tau) = \frac{1}{RC} \sigma(t - \tau) e^{-(t-\tau)/RC}$$

bzw.

$$g(t) = \frac{1}{RC} \sigma(t) e^{-t/RC}.$$

• Sei

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u_a(t) &= (u_e * g)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\tau) \frac{1}{RC} \sigma(t - \tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \\ &= \frac{1}{RC} \int_0^t \cos(\omega \tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \\ &= \frac{1}{RC} \operatorname{re} \left(\int_0^t e^{j\omega \tau} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{RC} \operatorname{re} \left(e^{-t/RC} \int_0^t e^{(j\omega + 1/RC)\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{RC} \operatorname{re} \left(e^{-t/RC} \frac{1}{j\omega + 1/RC} [e^{(j\omega + 1/RC)\tau}]_0^t \right) \\ &= \operatorname{re} \left(e^{-t/RC} \frac{1}{jRC\omega + 1} (e^{(j\omega + 1/RC)t} - 1) \right) \\ &= \operatorname{re} \left(e^{-t/RC} \frac{1}{jRC\omega + 1} (e^{j\omega t} e^{t/RC} - 1) \right) \\ &= \operatorname{re} \left(\frac{1}{jRC\omega + 1} (e^{j\omega t} - e^{-t/RC}) \right) \\ &= \frac{1}{(RC\omega)^2 + 1} \operatorname{re} \left((-jRC\omega + 1)(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t) - e^{-t/RC}) \right) \\ &= \frac{1}{(RC\omega)^2 + 1} \left(\cos(\omega t) - e^{-t/RC} + RC\omega \sin(\omega t) \right) \end{aligned}$$

Für große Werte von t ist

$$e^{-t/RC} \approx 0$$

und damit ist näherungsweise

$$u_a(t) = \frac{1}{(RC\omega)^2 + 1} (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t)).$$

Dieses Ergebnis hätte man auch mit komplexer Wechselstromrechnung erhalten, da hier das System bereits im eingeschwungenen Zustand betrachtet wird:

$$\begin{aligned} u_e(t) &= e^{j\omega t} \\ R_C &= \frac{1}{j\omega C} \\ i(t) &= \frac{u_e(t)}{R + R_C} \\ u_a(t) &= R_C i(t) \\ &= u_e(t) \frac{R_C}{R + R_C} \\ &= \frac{e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega} \\ &= \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))(1 - jRC\omega) \end{aligned}$$

Der Realteil hiervon ist

$$u_a(t) = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t))$$

Für tiefe Frequenzen, d.h. ω sehr klein gilt $RC\omega \approx 0$ und damit

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \cos(\omega t) \\ &= u_e(t). \end{aligned}$$

Für hohe Frequenzen, d.h. ω groß gilt

$$u_a(t) \approx 0.$$

Aufgabe 10. Sei $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion

$$f(t) = |t|$$

hat bei $t = 0$ einen Knick, der durch Faltung mit $g_\varepsilon(t)$ geglättet werden soll.

Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für $t \geq \varepsilon$, für $t \leq 0$ und für $0 < t < \varepsilon$. Überzeugen Sie sich anhand einer Skizze, dass $f * g_\varepsilon$ differenzierbar ist.

Lösung von Aufgabe 10. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g_\varepsilon(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}f(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |t - \tau|d\tau.\end{aligned}$$

- Fall $t \geq \varepsilon$. Im Integrationsbereich ist $t - \tau \geq 0$ und es gilt

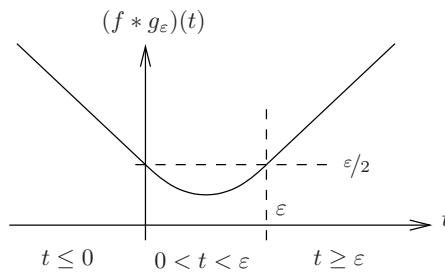
$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |t - \tau|d\tau &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (t - \tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(t\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \\ &= t - \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

- Fall $t \leq 0$. Im Integrationsbereich ist $t - \tau \leq 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |t - \tau|d\tau &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\tau - t)d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\tau^2}{2} - t\tau \right]_0^\varepsilon \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - t\varepsilon \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} - t.\end{aligned}$$

- Fall $0 < t < \varepsilon$. Das Integral wird in zwei Teilintegrale zerlegt, wobei im ersten $t - \tau > 0$ und im zweiten $t - \tau < 0$ ist.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |t - \tau|d\tau &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t |t - \tau|d\tau + \int_t^\varepsilon |t - \tau|d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t (t - \tau)d\tau + \int_t^\varepsilon (\tau - t)d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\left[\frac{t\tau - \tau^2}{2} \right]_0^t + \left[\frac{\tau^2}{2} - t\tau \right]_t^\varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(t^2 - \frac{t^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} - t\varepsilon - \frac{t^2}{2} + t^2 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(t^2 - t\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \\ &= \frac{t^2}{\varepsilon} - t + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$



Aufgabe 11. Die Stromstärke am Ein- bzw. Ausgang eines Wasserrohrs sei $f(t)$ bzw. $h(t)$. Das Rohr ist ein lineares, zeitinvariantes System, d.h.

$$h(t) = (f * g)(t)$$

wobei $g(t)$ die Impulsantwort ist. Angenommen, das Rohr ist verlustfrei, d.h. das gesamte Wasser, das in das Rohr hineinfließt, kommt auch am anderen Ende irgendwann wieder heraus. Welche Eigenschaft folgt daraus für die Impulsantwort?

Lösung von Aufgabe 11. Die ins Rohr geflossene Wassermenge ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

Da kein Wasser verloren geht, muss dies gleich der Wassermenge am Ausgang sein, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt.$$

Für den Spezialfall $f(t) = \delta(t)$ gilt damit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt.$$

Die Fläche unter der Impulsantwort muss folglich 1 sein.

Aufgabe 12. Sei

$$[S(f)](t) = \int_{-t}^t f(\tau) d\tau.$$

- Ist S linear?
- Ist S zeitinvariant?

Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 12.

- S ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)](t) &= \int_{-t}^t (f+g)(\tau) d\tau \\
&= \int_{-t}^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&= \int_{-t}^t f(\tau) d\tau + \int_{-t}^t g(\tau) d\tau \\
&= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\
&= [S(f) + S(g)](t) \\
[S(uf)](t) &= \int_{-t}^t (uf)(\tau) d\tau \\
&= u \int_{-t}^t f(\tau) d\tau \\
&= u [S(f)](t) \\
&= [uS(f)](t)
\end{aligned}$$

- S ist nicht zeitinvariant. Aus

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

folgt

$$\begin{aligned}
f_{\hat{t}}(\tau) &= f(\tau - \hat{t}) \\
[S(f)_{\hat{t}}](t) &= [S(f)](t - \hat{t})
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
[S(f_{\hat{t}})](t) &= \int_{-t}^t f_{\hat{t}}(\tau) d\tau \\
&= \int_{-t}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau.
\end{aligned}$$

Substitution

$$\begin{aligned}
u &= \tau - \hat{t} \\
\frac{du}{d\tau} &= 1 \\
d\tau &= du
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-t}^t f(\tau - \hat{t}) d\tau &= \int_{-t-\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(u) du \\
&= \int_{-t-\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\ &= \int_{-(t-\hat{t})}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-t+\hat{t}}^{t-\hat{t}} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Untergrenzen der Integrale stimmen somit nicht überein.

Aufgabe 13. Sei $S(f) = h$ wobei h die Lösung eines der folgenden Anfangswertprobleme mit rechter Seite f ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(0) = 5.$$

Zeigen Sie, dass S nicht linear ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(0) = 0.$$

Zeigen Sie, dass S linear aber nicht zeitinvariant ist.

- Sei

$$h' + ah = f, \quad h(-\infty) = 0.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Lösung von Aufgabe 13. Sei

$$\begin{aligned} S(f) &= h \\ S(f_1) &= h_1 \\ S(f_2) &= h_2. \end{aligned}$$

Linearität und Zeitinvarianz bedeutet

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ &= h_1 + h_2 \\ S(uf) &= uS(f) \\ &= uh \\ S(f_{\hat{t}}) &= S(f)_{\hat{t}} \\ &= h_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

- Aus der Annahme $S(f) = h$ folgt

$$h' + ah = f, \quad h(0) = 5.$$

Wäre die Bedingung $S(uf) = uh$ erfüllt, würde gelten

$$(uh)' + a(uh) = uf, \quad (uh)(0) = 5.$$

Da aber $h(0) = 5$ ist, ist $(uh)(0) = 5u \neq 5$.

- Aus der Annahme folgt

$$\begin{aligned} h' + ah &= f, & h(0) &= 0 \\ h_1' + ah_1 &= f_1, & h_1(0) &= 0 \\ h_2' + ah_2 &= f_2, & h_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= h_1 + h_2 \\ S(uf) &= uh \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (h_1 + h_2)' + a(h_1 + h_2) &= f_1 + f_2, & (h_1 + h_2)(0) &= 0 \\ (uh)' + a(uh) &= uf, & (uh)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus den Ableitungsregeln. Zeitinvarianz würde heißen

$$S(f_{\hat{t}}) = h_{\hat{t}}$$

bzw.

$$h_{\hat{t}}' + ah_{\hat{t}} = f_{\hat{t}}, \quad h_{\hat{t}}(0) = 0.$$

Da $h_{\hat{t}}(0) = h(-\hat{t})$ ist, ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt.

- Die Linearität zeigt man wie im vorigen Beispiel. Zeitinvarianz bedeutet hier

$$(h_{\hat{t}})' + ah_{\hat{t}} = f_{\hat{t}}, \quad h_{\hat{t}}(-\infty) = 0.$$

Da $S(f) = h$ gilt

$$h'(t) + ah(t) = f(t)$$

für alle t . Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} h'(t - \hat{t}) + ah(t - \hat{t}) &= f(t - \hat{t}) \\ h(t - \hat{t})' + ah(t - \hat{t}) &= f(t - \hat{t}) \\ (h_{\hat{t}})'(t) + ah_{\hat{t}}(t) &= f(t - \hat{t}) \\ (h_{\hat{t}})' + ah_{\hat{t}} &= f_{\hat{t}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} h_{\hat{t}}(-\infty) &= h(-\infty - \hat{t}) \\ &= h(-\infty) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Sei

$$S(f) = f(1) + f(2).$$

Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 14. S ist linear.

$$\begin{aligned}S(f+g) &= (f+g)(1) + (f+g)(2) \\ &= f(1) + f(2) + g(1) + g(2) \\ &= S(f) + S(g) \\ S(af) &= (af)(1) + (af)(2) \\ &= af(1) + af(2) \\ &= a(f(1) + f(2)) \\ &= aS(f).\end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}[S(f_{\hat{t}})](t) &= [f_{\hat{t}}(1) + f_{\hat{t}}(2)](t) \\ &= [f_{\hat{t}}(1)](t) + [f_{\hat{t}}(2)](t) \\ &= f(1 - \hat{t}) + f(2 - \hat{t}) \\ [S(f)]_{\hat{t}}(t) &= S(f)(t - \hat{t}) \\ &= (f(1) + f(2))(t - \hat{t}) \\ &= f(1) + f(2).\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei S das System, das jeder Funktion ihr Taylor Polynom vom Grad n zum Entwicklungspunkt a zuordnet, d.h.

$$[S(f)](t) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(t-a)^i.$$

Ist S linear bzw. zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 15. S ist linear.

$$\begin{aligned}
 [S(f_1 + f_2)](t) &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (f_1 + f_2)^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (f_1^{(i)}(a) + f_2^{(i)}(a))(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f_1^{(i)}(a)(t-a)^i + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f_2^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f_1^{(i)}(a)(t-a)^i + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f_2^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\
 &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\
 [S(uf)](t) &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (uf)^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} u f^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= u \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= u [S(f)](t) \\
 &= [uS(f)](t)
 \end{aligned}$$

S ist nicht zeitinvariant.

$$\begin{aligned}
 [S(f_{\hat{t}})](t) &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (f_{\hat{t}})^{(i)}(a)(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(f^{(i)} \right)_{\hat{t}}(a)(t-a)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a - \hat{t})(t-a)^i \\
 [S(f)_{\hat{t}}](t) &= [S(f)](t - \hat{t}) \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(t - \hat{t} - a)^i
 \end{aligned}$$

Aufgabe 16. Sei

$$[S(f)](t) = f''(t-1).$$

Ist S linear und zeitinvariant? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 16. S ist linear. Es gilt

$$\begin{aligned}
 S(f+g) &= S(f) + S(g) \\
 S(uf) &= uS(f).
 \end{aligned}$$

Begründung.

$$\begin{aligned}[S(f+g)](t) &= (f+g)''(t-1) \\ &= f''(t-1) + g''(t-1) \\ &= [S(f)](t) + [S(g)](t) \\ &= [S(f) + S(g)](t) \\ [S(uf)](t) &= (uf)''(t-1) \\ &= uf''(t-1) \\ &= u[S(f)](t) \\ &= [uS(f)](t).\end{aligned}$$

S ist zeitinvariant. Es gilt

$$S(f_{\hat{t}}) = S(f)_{\hat{t}}.$$

Begründung. Aus

$$f_{\hat{t}}(t) = f(t - \hat{t})$$

folgt durch zweimaliges Ableiten auf beiden Seiten

$$f_{\hat{t}}''(t) = f''(t - \hat{t}).$$

Ersetzt man noch auf beiden Seiten t durch $t - 1$ erhält man

$$f_{\hat{t}}''(t-1) = f''(t-1-\hat{t}).$$

Aus

$$[S(f)](t) = f''(t-1)$$

folgt durch Ersetzen von t durch $t - \hat{t}$ auf beiden Seiten

$$[S(f)](t - \hat{t}) = f''(t - \hat{t} - 1).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}[S(f_{\hat{t}})](t) &= f_{\hat{t}}''(t-1) \\ &= f''(t-1-\hat{t}) \\ &= f''((t-\hat{t})-1) \\ &= [S(f)](t-\hat{t}) \\ &= [S(f)_{\hat{t}}](t).\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Sei f eine beliebige Funktion. Berechnen Sie die Funktion h , die die DGL

$$h'(t) + h(t) = f(t)$$

für alle t mit Startwert $h(0) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die allgemeine Lösung der homogenen DGL und durch Variation der Konstanten die gesuchte partikuläre Lösung. Da $f(t)$ nicht gegeben ist, kann man das dabei entstehende Integral nicht lösen und muss es im Funktionsterm von h stehen lassen.

Lösung von Aufgabe 17. Die homogene DGL ist

$$h'(t) + h(t) = 0.$$

Ansatz

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{\lambda t} \\ h'(t) &= \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine homogene Lösung

$$h(t) = Ke^{-t}.$$

Ansatz für die Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} h(t) &= k(t)e^{-t} \\ h'(t) &= k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene DGL

$$\begin{aligned} k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t} + k(t)e^{-t} &= f(t) \\ k'(t)e^{-t} &= f(t) \\ k'(t) &= f(t)e^t \\ k(t) &= \int_C^t f(\tau)e^\tau d\tau \end{aligned}$$

wobei C beliebig ist. Damit ist

$$\begin{aligned} h(t) &= k(t)e^{-t} \\ &= \int_C^t f(\tau)e^{\tau-t} d\tau. \end{aligned}$$

Die Startbedingung $h(0) = 0$ ist erfüllt falls $C = 0$. Damit ist

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)e^{\tau-t} d\tau.$$

Aufgabe 18. Wie Sie wissen, ist eine Funktion $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, genau dann wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Der Übergang von linearen Funktionen zu linearen System (nicht notwendig zeitinvarianten), ist reine Kosmetik. Sei $\vec{y} = f(\vec{x})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{y} &= A\vec{x} \quad \text{bzw.} \\ y_i &= \sum_j a_{ij}x_j. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun die diskreten Indizes i, j durch kontinuierliche Variablen t, τ und die Summe durch ein Integral, erhält man

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

Ersetzt man nun noch x durch f , y durch h und a durch g hat man

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

Per Analogie erhält man damit folgende Aussage:

Ein System S ist linear, genau dann wenn es eine zweistellige Funktion $g(t, \tau)$ gibt so dass

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad \text{für alle } t.$$

Der Beweis hierfür ist nahezu identisch mit dem Beweis über LTI Systeme, der in der Vorlesung gezeigt wurde. Sie können ihn also fast wörtlich abschreiben und müssen nur den letzten Schritt, bei dem es um Zeitinvarianz ging, weglassen.

- Zeigen Sie, dass für jede Funktion $g(t, \tau)$ das System S mit

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

linear ist, d.h.

$$\begin{aligned} S(f_1 + f_2) &= S(f_1) + S(f_2) \\ S(af) &= aS(f). \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass für jedes lineare System S gilt

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(\delta(t - \tau))}_{g(t, \tau)} f(\tau)d\tau.$$

Die o.g. zweistellige Funktion $g(t, \tau)$ ist also die Antwort des Systems auf einen um τ verschobenen Dirac Impuls.

Wenn Sie diese Aufgabe hinkriegen, sind Sie bereits gut auf die Fourier- und Laplace Transformation vorbereitet. Beide Transformationen sind Spezialfälle solcher linearer Systeme, wobei die Funktion $g(t, \tau)$ eine einfache e -Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 18.

- Sei $g(t, \tau)$ eine zweistellige Funktion und

$$[S(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f(\tau)d\tau.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 [S(f_1 + f_2)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))(f_1 + f_2)(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))(f_1(\tau) + f_2(\tau)) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f_2(\tau) d\tau \\
 &= [S(f_1)](t) + [S(f_2)](t) \\
 &= [S(f_1) + S(f_2)](t) \\
 [S(af)](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))(af)(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))af(\tau) d\tau \\
 &= a \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f(\tau) d\tau \\
 &= a [S(f)](t) \\
 &= [aS(f)](t).
 \end{aligned}$$

- Sei S linear. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 [S(f)](t) &= [S(f * \delta)](t) \\
 &= S\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)f(\tau) d\tau\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\delta(t - \tau))f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^2 \\
 g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}t\right) & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Fläche unter g_ε eins ist.

Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (f * g_\varepsilon)(t) = f(t).$$

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\varepsilon}(\tau) d\tau &= \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \tau\right) d\tau \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(\tau - \frac{1}{2\varepsilon} \tau^2\right)_0^{\varepsilon} \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon} \varepsilon^2\right) \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f * g_{\varepsilon})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g_{\varepsilon}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\varepsilon} f(t - \tau) g_{\varepsilon}(\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \tau\right) (t - \tau)^2 d\tau \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - \tau)(t^2 - 2t\tau + \tau^2) d\tau \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} (t^2 \varepsilon - 2t\varepsilon\tau + \varepsilon\tau^2 - t^2\tau + 2t\tau^2 - \tau^3) d\tau \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \left[t^2 \varepsilon \tau - t\varepsilon\tau^2 + \frac{1}{3} \varepsilon \tau^3 - \frac{1}{2} t^2 \tau^2 + \frac{2}{3} t\tau^3 - \frac{1}{4} \tau^4 \right]_0^{\varepsilon} \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \left(t^2 \varepsilon^2 - t\varepsilon^3 + \frac{1}{3} \varepsilon^4 - \frac{1}{2} t^2 \varepsilon^2 + \frac{2}{3} t\varepsilon^3 - \frac{1}{4} \varepsilon^4 \right) \\ &= 2t^2 - 2t\varepsilon + \frac{2}{3} \varepsilon^2 - t^2 + \frac{4}{3} t\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \\ &= t^2 - \frac{2}{3} t\varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * g_{\varepsilon})(t) = t^2.$$

Aufgabe 20.

- Zeigen Sie, dass das Produkt zweier T -periodischer Funktionen wieder eine T -periodische Funktion ist.
- Sei f eine beliebige Funktion und g eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann $f \circ g$ eine T -periodische Funktion ist.

Hinweis: Eine Funktion f heißt T -periodisch wenn

$$f(t + T) = f(t) \text{ für alle } t.$$

Lösung von Aufgabe 20.

- Seien f, g zwei T -periodische Funktionen und $h(t) = f(t)g(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(t+T) &= f(t+T)g(t+T) \\ &= f(t)g(t) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

- Sei g eine T -periodische Funktion und $h(t) = f(g(t))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(t+T) &= f(g(t+T)) \\ &= f(g(t)) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)e^{-t} \\ g(t) &= \cos(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f * g$.

Lösung von Aufgabe 21.

- Lösen des Faltungsintegrals

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cos(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \left(e^{j(t-\tau)} + e^{-j(t-\tau)} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(e^{\tau(-1-j)+jt} + e^{\tau(-1+j)-jt} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-1-j} e^{\tau(-1-j)+jt} + \frac{1}{-1+j} e^{\tau(-1+j)-jt} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{jt}(1-j) + e^{-jt}(1+j)) \\ &= \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{4} - j \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{4} \\ &= \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{4} + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{4j} \\ &= \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}. \end{aligned}$$

- Lösen mit Fourier Transformation. Für die Fourier Transformierten

erhält man

$$\begin{aligned}
 \cos(t) & \circ\text{---}\bullet \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) \\
 \sigma(t)e^{-t} & \circ\text{---}\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-t}e^{-j\omega t} dt \\
 & = \int_0^{\infty} e^{-t(1+j\omega)} dt \\
 & = -\frac{1}{1+j\omega} \left[e^{-t(1+j\omega)} \right]_0^{\infty} \\
 & = -\frac{1}{1+j\omega}(-1) \\
 & = \frac{1}{1+j\omega}.
 \end{aligned}$$

Multiplikation im Frequenzbereich.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+j\omega} \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) & = \frac{\pi}{1+j\omega} \delta(\omega - 1) + \frac{\pi}{1+j\omega} \delta(\omega + 1) \\
 & = \frac{\pi}{1+j} \delta(\omega - 1) + \frac{\pi}{1-j} \delta(\omega + 1).
 \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde die Ausblendeigenschaft verwendet.

Zur Rücktransformation verwendet man die Korrespondenz

$$\begin{aligned}
 e^{j\hat{\omega}t} & \circ\text{---}\bullet 2\pi\delta(\omega - \hat{\omega}) \text{ bzw.} \\
 \delta(\omega - 1) & \bullet\text{---}\circ \frac{1}{2\pi} e^{jt} \\
 \delta(\omega + 1) & \bullet\text{---}\circ \frac{1}{2\pi} e^{-jt}.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) & = \frac{\pi}{1+j} \frac{1}{2\pi} e^{jt} + \frac{\pi}{1-j} \frac{1}{2\pi} e^{-jt} \\
 & = \frac{1}{2} \frac{1-j}{2} e^{jt} + \frac{1}{2} \frac{1+j}{2} e^{-jt} \\
 & = \frac{1}{4} ((1-j)e^{jt} + (1+j)e^{-jt}) \\
 & = \frac{1}{2} \operatorname{re}((1-j)e^{jt}) \\
 & = \frac{1}{2} \operatorname{re}((1-j)(\cos(t) + j \sin(t))) \\
 & = \frac{1}{2} (\cos(t) + \sin(t))
 \end{aligned}$$

Aufgabe 22. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der $T = 2$ -periodischen Funktion f , die definiert ist durch

$$f(t) = e^{|t|} \text{ für } -1 < t \leq 1$$

und $f(t+2) = f(t)$ für alle t . Vereinfachen Sie den Term für z_k so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 22. Aus $T = 2$ folgt $\omega = \pi$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{|t|} e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-t} e^{-jk\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^t e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{(-1-jk\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1-jk\omega)t} dt \\
 &= -\frac{1}{2+2jk\omega} [e^{(-1-jk\omega)t}]_{-1}^0 + \frac{1}{2-2jk\omega} [e^{(1-jk\omega)t}]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2+2jk\omega} (1 - e^{1+jk\omega}) + \frac{1}{2-2jk\omega} (e^{1-jk\omega} - 1) \\
 &= \frac{1}{2+2jk\pi} (ee^{jk\pi} - 1) + \frac{1}{2-2jk\pi} (ee^{-jk\pi} - 1)
 \end{aligned}$$

Da für ganzzahlige k gilt

$$e^{jk\pi} = e^{-jk\pi}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+jk\pi} + \frac{1}{1-jk\pi} \right) (ee^{jk\pi} - 1) \\
 &= \frac{1}{1+k^2\pi^2} (ee^{jk\pi} - 1).
 \end{aligned}$$

Da

$$e^{jk\pi} \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt für gerade k

$$z_k = \frac{e - 1}{1 + k^2\pi^2}$$

und für ungerade k

$$z_k = \frac{-e - 1}{1 + k^2\pi^2}.$$

In einer Formel lässt sich das ausdrücken durch

$$z_k = \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2}.$$

Aufgabe 23. Sei T eine Konstante und $g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\int_t^{t+T} g(\tau) d\tau = 0$$

für alle t . Zeigen Sie, dass dann jede Stammfunktion von g eine T -periodische Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 23. Sei G eine Stammfunktion von g . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T} g(\tau) d\tau &= [G(\tau)]_t^{t+T} \\ &= G(t+T) - G(t).\end{aligned}$$

Damit ist

$$G(t+T) - G(t) = 0$$

für alle t und folglich

$$G(t+T) = G(t),$$

d.h. G ist eine T -periodische Funktion.

Aufgabe 24. Wenn man zwei Töne mit sehr ähnlicher Frequenz gleichzeitig spielt, entsteht eine sog. Schwebung. Dabei hört man nur einen Ton, der langsam lauter und leiser wird. Dieses Phänomen nutzt man z.B. um Instrumente zu stimmen. Auf der Webseite zu Mathe 2 finden Sie eine Demo, mit der Sie sich das anhören können.

Für eine kleine Zahl ε seien die Frequenzen der beiden Töne $\omega + \varepsilon$ und $\omega - \varepsilon$. Zeigen Sie, dass dann für die Überlagerung der Schwingungen gilt

$$\operatorname{re} \left(e^{j(\omega+\varepsilon)t} + e^{j(\omega-\varepsilon)t} \right) = 2\operatorname{re} \left(e^{j\omega t} \right) \cos(\varepsilon t).$$

Dabei ist $2\operatorname{re}(e^{j\omega t})$ der Ton, den man hört. Die Multiplikation mit der langsamen Schwingung $\cos(\varepsilon t)$ führt zu dem Schwebungseffekt.

Lösung von Aufgabe 24.

$$\begin{aligned}\operatorname{re} \left(e^{j(\omega+\varepsilon)t} + e^{j(\omega-\varepsilon)t} \right) &= \operatorname{re} \left(e^{j\omega t} e^{j\varepsilon t} + e^{j\omega t} e^{-j\varepsilon t} \right) \\ &= \operatorname{re} \left(e^{j\omega t} (e^{j\varepsilon t} + e^{-j\varepsilon t}) \right) \\ &= \operatorname{re} \left(e^{j\omega t} (e^{j\varepsilon t} + \overline{e^{j\varepsilon t}}) \right) \\ &= \operatorname{re} \left(e^{j\omega t} 2 \cos(\varepsilon t) \right) \\ &= 2\operatorname{re} \left(e^{j\omega t} \right) \cos(\varepsilon t).\end{aligned}$$

Aufgabe 25. Sei f eine T -periodische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch f' eine T -periodische Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 25. Sei f eine T -periodische Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned}f(t+T) &= f(t) \\ f(t+T+dt) &= f(t+dt).\end{aligned}$$

Aus der Definition der Ableitung

$$f'(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

folgt

$$\begin{aligned}f'(t+T) &= \frac{f(t+T+dt) - f(t+T)}{dt} \\ &= \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \\ &= f'(t).\end{aligned}$$

Aufgabe 26. Eine Menge M heißt abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation wenn für alle $x, y \in M$ und alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}x + y &\in M \\ ux &\in M.\end{aligned}$$

- Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zwei Matrizen und

$$M = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = B\vec{x}\}.$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation.

- An welcher Stelle traten Mengen von Funktionen, die abgeschlossen sind unter Addition und skalarer Multiplikation bei der Lösung von DGL auf?
- Zeigen Sie, dass die Menge aller T -periodischer Funktionen abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation.

Lösung von Aufgabe 26.

- Abgeschlossenheit unter Addition. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned}A\vec{x} &= B\vec{x} \\ A\vec{y} &= B\vec{y}.\end{aligned}$$

Zu zeigen: $\vec{x} + \vec{y} \in M$, d.h.

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = B(\vec{x} + \vec{y}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}A(\vec{x} + \vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ &= B\vec{x} + B\vec{y} \\ &= B(\vec{x} + \vec{y}).\end{aligned}$$

Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation. Sei $\vec{x} \in M$, d.h.

$$A\vec{x} = B\vec{x}.$$

Zu zeigen: $u\vec{x} \in M$ für beliebiges $u \in \mathbb{R}$, d.h.

$$A(u\vec{x}) = B(u\vec{x}).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}A(u\vec{x}) &= u(A\vec{x}) \\ &= u(B\vec{x}) \\ &= B(u\vec{x}).\end{aligned}$$

- Die Lösungsmenge einer linearen homogenen DGL ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation.
- Seien f, g zwei T -periodische Funktionen, d.h.

$$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \\ g(t+T) &= g(t) \end{aligned}$$

für alle t . Dann ist

$$\begin{aligned} (f+g)(t+T) &= f(t+T) + g(t+T) \\ &= f(t) + g(t) \\ &= (f+g)(t) \\ (uf)(t+T) &= uf(t+T) \\ &= uf(t) \\ &= (uf)(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 27. Zeigen Sie, dass für jedes $k, n \in \mathbb{Z}$ und $a, T \in \mathbb{R}$ mit $\omega = 2\pi/T$ gilt

$$\int_a^{a+T} e^{j(k-n)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq n \\ T & \text{falls } k = n. \end{cases}$$

Hinweis:

$$e^{2\pi j(k-n)} = 1.$$

Schauen Sie sich dann nochmal die Herleitung zur Berechnung der Fourier Koeffizienten z_k einer T -periodischen Funktion $f(t)$ an. Zeigen Sie durch eine kleine Modifikation dieser Herleitung, dass z_k für beliebiges a auch nach der Formel

$$z_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

berechnet werden kann. Gehen Sie hierzu von der komplexen Fourier Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}$$

aus und führen Sie die selbe Umformung durch wie gezeigt.

Lösung von Aufgabe 27. Für $k \neq n$ gilt

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} e^{j(k-n)\omega t} dt &= \frac{1}{j(k-n)\omega} \left[e^{j(k-n)\omega t} \right]_a^{a+T} \\ &= \frac{1}{j(k-n)\omega} \left(e^{j(k-n)\omega(a+T)} - e^{j(k-n)\omega a} \right) \\ &= \frac{1}{j(k-n)\omega} e^{j(k-n)\omega a} \left(e^{j(k-n)\omega T} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{j(k-n)\omega} e^{j(k-n)\omega a} \left(\underbrace{e^{2\pi j(k-n)}}_{=1} - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $k = n$ gilt

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} e^{j(k-n)\omega t} dt &= \int_a^{a+T} 1 dt \\ &= [t]_a^{a+T} \\ &= a + T - a \\ &= T. \end{aligned}$$

Aus

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}$$

folgt durch Multiplikation mit $e^{-jn\omega t}$ auf beiden Seiten

$$f(t)e^{-jn\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j(k-n)\omega t}.$$

Integriert man auf beiden Seiten über t von a bis $a + T$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t)e^{-jn\omega t} dt &= \int_a^{a+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{j(k-n)\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \int_a^{a+T} e^{j(k-n)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Wie oben gezeigt ist das Integral für alle $k \neq n$ Null und T für $k = n$.
Damit ist

$$\int_a^{a+T} f(t)e^{-jn\omega t} dt = z_n T$$

und

$$z_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)e^{-jn\omega t} dt.$$

Da dies für alle n gilt, kann man n wieder durch k ersetzen und erhält

$$z_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)e^{-jk\omega t} dt.$$

Aufgabe 28. Die Funktion

$$f(t) = |\sin(t)|$$

ist T periodisch für $T = \pi$. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k für $f(t)$. Sie können die Integrale ohne Rechner lösen mit Hilfe der Gleichung

$$\sin(t) = \operatorname{im}(e^{jt}) = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt}).$$

Lösung von Aufgabe 28. Sei

$$\omega = 2\pi/T = 2.$$

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| e^{-j2kt} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) e^{-j2kt} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2j} \int_0^\pi (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-j2kt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^\pi (e^{-j(2k-1)t} - e^{-j(2k+1)t}) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{1}{-j(2k-1)} e^{-j(2k-1)t} - \frac{1}{-j(2k+1)} e^{-j(2k+1)t} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2k-1} e^{-j(2k-1)t} - \frac{1}{2k+1} e^{-j(2k+1)t} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-j(2k-1)\pi} - 1}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)\pi} - 1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j\pi} - 1}{2k-1} - \frac{e^{-j\pi} - 1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1 - 1}{2k-1} - \frac{-1 - 1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-2}{2k-1} + \frac{2}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{-1}{\pi(2k-1)} + \frac{1}{\pi(2k+1)} \\
 &= \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 29. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der T -periodischen Funktion f , für die gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -T/2 < t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

und $f(t+T) = f(t)$ für alle t . Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Hinweis: Sie müssen eine Fallunterscheidung machen ob k gerade oder ungerade ist.

Lösung von Aufgabe 29. Sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-jk\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $k = 0$ erhält man

$$z_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \frac{1}{2}.$$

Für $k \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{-jk\omega T} [e^{-jk\omega t}]_0^{T/2} \\ &= \frac{j}{k\omega T} (e^{-jk\omega T/2} - 1) \quad \omega = 2\pi/T \\ &= \frac{j}{2\pi k} (e^{-jk\pi} - 1) \\ &= \frac{j}{2\pi k} (\cos(k\pi) - \underbrace{j \sin(k\pi)}_{=0} - 1) \\ &= \frac{j}{2\pi k} (\cos(k\pi) - 1). \end{aligned}$$

Um weiter vereinfachen zu können, benötigt man eine Fallunterscheidung ob k gerade oder ungerade ist:

- k gerade.

$$\begin{aligned} \frac{j}{2\pi k} (\cos(k\pi) - 1) &= \frac{j}{2\pi k} (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- k ungerade.

$$\begin{aligned} \frac{j}{2\pi k} (\cos(k\pi) - 1) &= \frac{j}{2\pi k} (-1 - 1) \\ &= -\frac{j}{\pi k} \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man somit

$$z_k = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -j/(\pi k) & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 30. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der $T = 2$ -periodischen Funktion f , die definiert ist durch

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{falls } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und $f(t + 2) = f(t)$ für alle t . Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Sie benötigen hierfür Produktintegration.

Lösung von Aufgabe 30. Mit $T = 2$ und

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

gilt

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jk\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (t+1) e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale werden wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (t+1) e^{-jk\pi t} dt &= \frac{1}{-jk\pi} [(t+1) e^{-jk\pi t}]_{-1}^0 - \frac{1}{-jk\pi} \int_{-1}^0 e^{-jk\pi t} dt \\ &= \frac{1}{-jk\pi} - \frac{1}{(-jk\pi)^2} [e^{-jk\pi t}]_{-1}^0 \\ &= \frac{j}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} (1 - e^{jk\pi}) \\ \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt &= \frac{1}{-jk\pi} [e^{-jk\pi t}]_0^1 \\ &= \frac{j e^{-jk\pi} - j}{k\pi}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{j}{k\pi} + \frac{1 - e^{jk\pi}}{k^2\pi^2} + \frac{j e^{-jk\pi} - j}{k\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{j e^{-jk\pi}}{k\pi} + \frac{1 - e^{jk\pi}}{k^2\pi^2} \right) \\ &= \frac{j e^{-jk\pi}}{2k\pi} + \frac{1 - e^{jk\pi}}{2k^2\pi^2} \\ &= \begin{cases} \frac{j}{2k\pi} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{-j}{2k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist eine Ausnahmebehandlung erforderlich, da durch k dividiert wurde:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jk\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 (t+1) dt + \int_0^1 1 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Sie können sich das Ergebnis anschauen mit folgenden Mupad Befehlen:

```
zk:=(I*exp(-I*k*PI))/(2*k*PI) +
      (1-exp(I*k*PI))/(2*k^2*PI^2):
f:=sum(zk*exp(I*k*PI*t),k=-30..-1)+
      sum(zk*exp(I*k*PI*t),k= 1..30)+3/4:
plot(f,t=-2..2);
```

Mit Matlab geht's wie folgt:

```
syms k zk f t;
zk = (j*exp(-j*k*pi)) / (2*k*pi) + (1-exp(j*k*pi)) / 2*k*k*pi*pi);
f = 2*real(symsum(zk*exp(j*k*pi*t),k,1,30)) + 3/4;
ezplot(f, [-2,2]);
```

Aufgabe 31. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion und A_k, φ_k so dass

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sei weiterhin

$$g(t) = \frac{2}{T}(\sigma(-t) - \sigma(-t - T)) \cos(k\omega t).$$

Überlegen Sie sich, dass die Differenz der beiden Sprungfunktionen ein Rechteckimpuls von $-T$ bis 0 ist. Zeigen Sie, dass für $k > 0$ gilt

$$(f * g)(t) = A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Diese Aussage bedeutet, dass durch Faltung mit g die k -te Oberschwingung aus f herausgefiltert wird. Später werden wir zeigen, dass jeder frequenzselektive Filter durch Faltung realisiert werden kann und somit LTI ist. Hinweis:

- Beginnen Sie mit dem Faltungsintegral.
- Nutzen Sie die Sprungfunktionen um den Integrationsbereich auf eine Periode einzugrenzen.
- Nutzen Sie die Periodizität von f und \cos um den Integrationsbereich auf $[0, T]$ zu verschieben.
- Formen Sie den Integrand mit komplexen e -Funktionen um bis der komplexe Fourier Koeffizient z_k als Teilterm erscheint.
- Zum Schluss müssen Sie nur noch die Definition der komplexen Fourier Koeffizienten

$$z_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}$$

einsetzen.

Lösung von Aufgabe 31.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(\sigma(-(t - \tau)) - \sigma(-(t - \tau) - T)) \cos(k\omega(t - \tau))d\tau \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(\sigma(\tau - t) - \sigma(\tau - (t + T))) \cos(k\omega(t - \tau))d\tau
 \end{aligned}$$

Da

$$\sigma(\tau - t) - \sigma(\tau - (t + T)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau \in [t, t + T[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$(f * g)(t) = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) \cos(k\omega(t - \tau))d\tau.$$

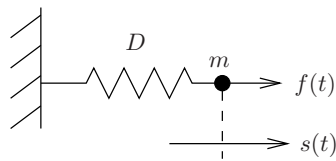
Berechnet wird die Fläche unter der Funktion

$$f(\tau) \cos(k\omega(t - \tau))$$

für $\tau \in [t, t + T]$, d.h. über ein Intervall der Länge T . Da diese Funktion T -periodisch ist, kann man den Integrationsbereich beliebig verschieben. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cos(k\omega(t - \tau))d\tau \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{1}{2}(e^{jk\omega(t-\tau)} + e^{-jk\omega(t-\tau)})d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau)(e^{jk\omega t} e^{-jk\omega\tau} + e^{-jk\omega t} e^{jk\omega\tau})d\tau \\
 &= e^{jk\omega t} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau}_{z_k} + e^{-jk\omega t} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{jk\omega\tau} d\tau}_{\bar{z}_k} \\
 &= e^{jk\omega t} z_k + e^{-jk\omega t} \bar{z}_k \\
 &= 2\text{re}(z_k e^{jk\omega t}) \\
 &= 2\text{re}\left(\frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t}\right) \\
 &= A_k \text{re}(e^{j(k\omega t + \varphi_k)}) \\
 &= A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 32. Eine Masse m ist an einer Feder mit Federkonstante D befestigt und kann sich reibungsfrei horizontal bewegen. Die Position der Masse zum Zeitpunkt t sei $s(t)$. In der Position $s = 0$ sei die Feder entspannt.



Auf die Masse wirkt nun eine T -periodische Kraft $f(t)$ nach rechts, wobei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < a \\ 0 & \text{falls } a \leq t < T \end{cases}$$

und $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie eine *partikuläre* Lösung $s(t)$ und stellen Sie diese als Fourier Reihe dar. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, dürfen Sie annehmen, dass keine Resonanz auftritt.

Hinweis: Stellen Sie $f(t)$ zunächst als Fourier Reihe dar, lösen Sie die DGL für jeden Summanden $z_k e^{jk\omega t}$ separat und nutzen Sie die Linearität der DGL.

Lösung von Aufgabe 32. Darstellung der Kraft $f(t)$ als Fourier Reihe.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}.$$

Berechnung der Fourier Koeffizienten.

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^a e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-jk\omega T} [e^{-jk\omega t}]_0^a \quad \text{für } k \neq 0 \\ &= \frac{1}{-jk\omega T} (e^{-jk\omega a} - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-jk\omega a}}{2\pi jk} \\ z_0 &= \frac{a}{T}. \end{aligned}$$

Aufstellen der Kräftegleichung.

$$\begin{aligned} -Ds(t) + f(t) &= ma(t) \\ ms'' + Ds &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{jk\omega t}. \end{aligned}$$

Da die DGL linear ist, kann sie für jeden Summand separat gelöst werden. Sei

$$r_k(t) = e^{jk\omega t}.$$

Da Resonanz ausgeschlossen werden darf, ist der Ansatz

$$\begin{aligned} s_k(t) &= ce^{jk\omega t} \\ s'_k(t) &= jk\omega ce^{jk\omega t} \\ s''_k(t) &= -(k\omega)^2 ce^{jk\omega t}. \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} -(k\omega)^2 cm e^{jk\omega t} + Dce^{jk\omega t} &= e^{jk\omega t} \\ -(k\omega)^2 cm + Dc &= 1 \\ c &= \frac{1}{D - m(k\omega)^2} \\ s_k(t) &= \frac{1}{D - m(k\omega)^2} e^{jk\omega t}. \end{aligned}$$

Spezialfall $k = 0$.

$$\begin{aligned} r_0(t) &= \frac{a}{T} \\ ms''_0 + Ds_0 &= \frac{a}{T} \\ s_0(t) &= \frac{a}{DT}. \end{aligned}$$

Damit ist eine partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a}{DT} + \sum_{k \neq 0} z_k \frac{1}{D - m(k\omega)^2} e^{jk\omega t} \\ &= \frac{a}{DT} + \sum_{k \neq 0} \frac{1 - e^{-jk\omega a}}{2\pi jk(D - m(k\omega)^2)} e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

Aufgabe 33. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit Fourier Koeffizienten z_k . Sei

$$\tilde{f}(t) = f(at)$$

für ein $a > 0$. Berechnen Sie hiermit die Periodendauer \tilde{T} und die Fourier Koeffizienten \tilde{z}_k von \tilde{f} .

Lösung von Aufgabe 33. Für die Periodendauer \tilde{T} von \tilde{f} gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t + \tilde{T}) &= \tilde{f}(t) \\ f(a(t + \tilde{T})) &= f(at) \\ f(at + a\tilde{T}) &= f(at) \end{aligned}$$

Da f eine T -periodische Funktion ist, folgt

$$\begin{aligned} T &= a\tilde{T} \\ \tilde{T} &= T/a. \end{aligned}$$

Die Grundfrequenz von \tilde{f} ist damit

$$\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\tilde{T}} = \frac{a2\pi}{T} = a\omega.$$

Für die Fourier Koeffizienten \tilde{z}_k von \tilde{f} gilt

$$\begin{aligned}\tilde{z}_k &= \frac{1}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} \tilde{f}(t) e^{-jk\tilde{\omega}t} dt \\ &= \frac{a}{T} \int_0^{T/a} f(at) e^{-jk\omega at} dt.\end{aligned}$$

Substitution

$$u = at, \quad \frac{du}{dt} = a, \quad dt = \frac{1}{a} du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\tilde{z}_k &= \frac{a}{T} \int_0^T f(u) e^{-jk\omega u} \frac{1}{a} du \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-jk\omega u} du \\ &= z_k.\end{aligned}$$

Die Funktionen f und \tilde{f} haben somit die gleichen Fourier Koeffizienten.

Aufgabe 34. Sei $f(t)$ die 4π -periodische Funktion mit

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{für } 2\pi \leq t < 4\pi \end{cases}$$

und $f(t+4\pi) = f(t)$ für alle t . Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Hinweis: Berücksichtigen Sie den Spezialfall $k = \pm 2$. Unterscheiden Sie die Fälle k gerade bzw. k ungerade. Es gilt

$$e^{\pi jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 34. Sei

$$\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist z_k gleich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) e^{-jkt/2} dt \\
&= \frac{1}{8\pi j} \int_0^{2\pi} (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-jkt/2} dt \\
&= \frac{1}{8\pi j} \int_0^{2\pi} \left(e^{t(j-jk/2)} - e^{t(-j-jk/2)} \right) dt \\
&= \frac{1}{8\pi j} \left(\frac{1}{j-jk/2} \left[e^{t(j-jk/2)} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{-j-jk/2} \left[e^{t(-j-jk/2)} \right]_0^{2\pi} \right), \quad k \neq \pm 2 \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{-1+k/2} \left[e^{tj-tjk/2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{1+k/2} \left[e^{-tj-tjk/2} \right]_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{-1+k/2} \left(e^{2\pi j} e^{-2\pi jk/2} - 1 \right) - \frac{1}{1+k/2} \left(e^{-2\pi j} e^{-2\pi jk/2} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{-1+k/2} (e^{-\pi jk} - 1) - \frac{1}{1+k/2} (e^{-\pi jk} - 1) \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} (e^{-\pi jk} - 1) \left(\frac{1}{-1+k/2} - \frac{1}{1+k/2} \right)
\end{aligned}$$

Falls k gerade ist, gilt

$$z_k = 0.$$

Falls k ungerade ist, gilt

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{-2}{8\pi} \left(\frac{1}{-1+k/2} - \frac{1}{1+k/2} \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{-2+k} - \frac{2}{2+k} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{k-2 - (k+2)}{k^2-4} \\
&= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2-4} \\
&= \frac{2}{\pi(4-k^2)}.
\end{aligned}$$

Für $k = 2$ gilt

$$\begin{aligned}
 z_2 &= \frac{1}{8\pi j} \int_0^{2\pi} \left(e^{t(j-j)} - e^{t(-j-j)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{8\pi j} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2jt}) dt \\
 &= \frac{2\pi}{8\pi j} - \frac{1}{8\pi j} \int_0^{2\pi} e^{-2jt} dt \\
 &= \frac{1}{4j} + \frac{1}{8\pi j} \frac{1}{2j} [e^{-2jt}]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{4j} - \frac{1}{16\pi} (e^{-4\pi j} - 1) \\
 &= -\frac{1}{4}j.
 \end{aligned}$$

Für $k = -2$ gilt entsprechend

$$z_{-2} = \bar{z}_2 = \frac{1}{4}j.$$

Aufgabe 35. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k der T -periodischen Sägezahn Funktion f , die definiert ist durch

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t \quad \text{für } 0 \leq t < T \\
 f(t+T) &= f(t) \quad \text{sonst}
 \end{aligned}$$

Lösen Sie die Integrale ohne Rechner. Sie benötigen hierfür Produktintegration.

Lösung von Aufgabe 35. Sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T t e^{-jk\omega t} dt
 \end{aligned}$$

Produktintegration mit

$$\begin{aligned}
 g(t) &= t \\
 h'(t) &= e^{-jk\omega t} \\
 g'(t) &= 1 \\
 h(t) &= -\frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega}
 \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T t e^{-jk\omega t} dt &= \frac{1}{T} \left(\left[-t \frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega} \right]_0^T + \int_0^T \frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega} dt \right) \\
 &= \frac{1}{Tjk\omega} \left(\left[-te^{-jk\omega t} \right]_0^T + \int_0^T e^{-jk\omega t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi jk} \left(-T \underbrace{e^{-2\pi jk}}_{=1} - \left[\frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega} \right]_0^T \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi k^2 \omega} \left(Tjk\omega + \left[e^{-jk\omega t} \right]_0^T \right) \\
 &= \frac{T}{4\pi^2 k^2} \left(2\pi jk + \underbrace{e^{-2\pi jk}}_{=1} - 1 \right) \\
 &= \frac{jT}{2\pi k}
 \end{aligned}$$

Da man eine Division durch k hat, gilt dies nur für $k \neq 0$. Daher muss man den Koeffizienten z_0 separat berechnen:

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T t dt \\
 &= \frac{1}{2T} [t^2]_0^T \\
 &= \frac{1}{2T} T^2 \\
 &= T/2
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man somit

$$z_k = \begin{cases} T/2 & \text{falls } k = 0 \\ jT/(2\pi k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 36. Von einer unbekanntem T -periodischen Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien die Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ gegeben. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten $z_k^{(g)}$ der Funktion

$$g(t) = f(1-t).$$

Lösung von Aufgabe 36.

$$\begin{aligned}
 z_k^{(g)} &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(1-t) e^{-jk\omega t} dt.
 \end{aligned}$$

Substitution.

$$u = 1 - t, \quad \frac{du}{dt} = -1, \quad dt = -du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z_k^{(g)} &= \frac{1}{T} \int_1^{1-T} f(u) e^{-jk\omega(1-u)} (-du) \\ &= \frac{1}{T} \int_{1-T}^1 f(u) e^{jk\omega u} e^{-jk\omega} du \\ &= e^{-jk\omega} \frac{1}{T} \int_{1-T}^1 f(u) e^{jk\omega u} du. \end{aligned}$$

Da der Integrand T -periodisch ist, kann man auch von 0 bis T integrieren. Die Integrationsvariable kann wieder in t umbenannt werden. Damit ist

$$\begin{aligned} z_k^{(g)} &= e^{-jk\omega} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{e^{-jk\omega t}} dt \\ &= e^{-jk\omega} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= e^{-jk\omega} \overline{z_k^{(f)}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 37. Die 2π -periodische Funktion $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{jt} & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

und $f(t+2\pi) = f(t)$ für alle t . Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$.

Vereinfachen Sie das Ergebnis, indem Sie eine Fallunterscheidung durchführen ob k gerade oder ungerade ist.

Lösung von Aufgabe 37. Für die Grundfrequenz erhält man

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{jt} e^{-jkt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{jt(1-k)} dt. \end{aligned}$$

Für $k = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^0 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für $k \neq 1$ erhält man

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(1-k)} \left[e^{jt(1-k)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2\pi j(1-k)} \left(e^{j\pi(1-k)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Falls k gerade, ist $1-k$ ungerade und

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2\pi j(1-k)} (-2) \\ &= \frac{j}{\pi(1-k)}. \end{aligned}$$

Falls k ungerade, ist $1-k$ gerade und

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2\pi j(1-k)} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$z_k = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } k = 1 \\ \frac{j}{\pi(1-k)} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 38. Für komplexe T -periodische Funktionen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ können Fourier Koeffizienten nach der gleichen Formel berechnet werden wie für reelle, d.h.

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad \omega = 2\pi/T.$$

Allerdings treten bei komplexen Funktionen die Fourier Koeffizienten nicht mehr so wie bei reellen in konjugiert komplexen Paaren auf, d.h. im allgemeinen ist $z_k \neq \overline{z_{-k}}$.

Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine unbekannte T -periodische Funktion mit gegebenen Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$. Berechnen Sie hiermit die Fourier Koeffizienten $z_k^{(g)}$ von

$$g(t) = \overline{f(t)}.$$

Lösung von Aufgabe 38.

$$\begin{aligned} z_k^{(g)} &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \overline{e^{jk\omega t}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t) e^{jk\omega t}} dt \\ &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jk\omega t} dt} \\ &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j(-k)\omega t} dt} \\ &= \overline{z_{-k}^{(f)}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 39. Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ der $T = 2\pi$ -periodischen Funktion

$$f(t) = 3 + 4 \sin(t) + \cos(t).$$

Lösung von Aufgabe 39. In der Funktion tritt nur der Gleichanteil und die Grundschiwingung auf. Die Fourier Reihe reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned} f(t) &= z_0 + z_1 e^{jt} + \overline{z_1} e^{-jt} \\ &= z_0 + 2\operatorname{re}(z_1 e^{jt}). \end{aligned}$$

Für den Gleichanteil erhält man

$$z_0 = 3.$$

Mit $z_1 = a + jb$ gilt

$$\begin{aligned} 2\operatorname{re}(z_1 e^{jt}) &= 2(a \cos(t) - b \sin(t)) \\ &= 4 \sin(t) + \cos(t). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} 2a \cos(t) &= \cos(t) \\ -2b \sin(t) &= 4 \sin(t) \end{aligned}$$

und damit

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -2.$$

Damit ist

$$z_1 = \frac{1}{2} - 2j$$

und

$$z_k = \begin{cases} 3 & \text{falls } k = 0 \\ 1/2 - 2j & \text{falls } k = 1 \\ 1/2 + 2j & \text{falls } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 40. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Versuchen Sie, die Zwischenergebnisse möglichst zu vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 40.

$$\begin{aligned} f(t) &\circ\!\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^1 t^2 e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} [t^2 e^{-j\omega t}]_0^1 + \frac{2}{j\omega} \int_0^1 t e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{2}{j\omega} \left(-\frac{1}{j\omega} [t e^{-j\omega t}]_0^1 + \frac{1}{j\omega} \int_0^1 e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{2}{\omega^2} \left(-[t e^{-j\omega t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{2}{\omega^2} \left(-e^{-j\omega} - \frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_0^1 \right) \\ &= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{2}{\omega^2} \left(-e^{-j\omega} - \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - 1) \right) \\ &= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{2e^{-j\omega}}{j\omega^3} - \frac{2}{j\omega^3} \\ &= \frac{j e^{-j\omega}}{\omega} + \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2} - \frac{2j e^{-j\omega}}{\omega^3} + \frac{2j}{\omega^3} \\ &= \frac{j\omega^2 e^{-j\omega} + 2\omega e^{-j\omega} - 2j e^{-j\omega} + 2j}{\omega^3} \\ &= \frac{e^{-j\omega}(2\omega + j(\omega^2 - 2)) + 2j}{\omega^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 41. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$f(t) \circ\!\!\!\bullet F(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f(-t) \circ\!\!\!\bullet \overline{F(\omega)}$$

und

$$\frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \circ\!\!\!\bullet \operatorname{re}(F(\omega)).$$

Lösung von Aufgabe 41.

$$f(-t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-j\omega t} dt.$$

Mit der Substitution

$$u = -t, \quad \frac{du}{dt} = -1, \quad dt = -du$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{j\omega u}(-du) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{j\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{e^{-j\omega u}} du \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du} \\ &= \overline{F(\omega)}. \end{aligned}$$

Mit der Linearität der Fourier Transformation gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \frac{1}{2}(F(\omega) + \overline{F(\omega)}) \\ = \operatorname{re}(F(\omega)). \end{aligned}$$

Aufgabe 42. Sei $a > 0$ eine Konstante und

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{falls } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $F(\omega)$.
- Berechnen Sie dann den Grenzwert für $a \rightarrow \infty$, d.h. die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t)e^{-t}.$$

Lösung von Aufgabe 42.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^a e^{-t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^a e^{-(1+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{1+j\omega} \left[e^{-(1+j\omega)t} \right]_0^a \\ &= -\frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \left(e^{-(1+j\omega)a} - 1 \right) \\ &= \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \left(1 - e^{-a} e^{-j\omega a} \right). \end{aligned}$$

Für $a \rightarrow \infty$ ist $e^{-a} = 0$. Damit ist

$$F(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

Aufgabe 43. Sei

$$f(t) \circ \bullet F(\omega).$$

Zeigen Sie, dass dann für eine beliebige Konstante a gilt

$$(af)(t) \circ \bullet (aF)(\omega).$$

Lösung von Aufgabe 43.

$$\begin{aligned} (af)(t) \circ \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} (af)(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= aF(\omega) \\ &= (aF)(\omega). \end{aligned}$$

Aufgabe 44. Sei $F(\omega)$ die Fourier Transformierte von $f(t)$. Zeigen Sie, dass $F(0)$ gleich der Fläche unter $f(t)$ ist.

Lösung von Aufgabe 44. Nach Definition der Fourier Transformation gilt

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Setzt man auf beiden Seiten $\omega = 0$, erhält man

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j0t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt. \end{aligned}$$

Dies ist die Fläche unter $f(t)$.

Aufgabe 45. Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie die Sinusfunktion mit komplexen e -Funktionen dar.

Lösung von Aufgabe 45.

$$\begin{aligned}
 f(t) \circ\!\!\!\bullet & \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \sin(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^{\pi} e^{jt}e^{-j\omega t} dt - \int_0^{\pi} e^{-jt}e^{-j\omega t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^{\pi} e^{j(1-\omega)t} dt - \int_0^{\pi} e^{-j(1+\omega)t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{j(1-\omega)} \left[e^{j(1-\omega)t} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{j(1+\omega)} \left[e^{-j(1+\omega)t} \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= -\frac{1}{2-2\omega} \left(e^{j\pi(1-\omega)} - 1 \right) - \frac{1}{2+2\omega} \left(e^{-j\pi(1+\omega)} - 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{2-2\omega} \left(e^{j\pi}e^{-j\pi\omega} - 1 \right) - \frac{1}{2+2\omega} \left(e^{-j\pi}e^{-j\pi\omega} - 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{2-2\omega} \left(-e^{-j\pi\omega} - 1 \right) - \frac{1}{2+2\omega} \left(-e^{-j\pi\omega} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2-2\omega} \left(e^{-j\pi\omega} + 1 \right) + \frac{1}{2+2\omega} \left(e^{-j\pi\omega} + 1 \right) \\
 &= \left(e^{-j\pi\omega} + 1 \right) \left(\frac{1}{2-2\omega} + \frac{1}{2+2\omega} \right) \\
 &= \left(e^{-j\pi\omega} + 1 \right) \frac{2+2\omega+2-2\omega}{4-4\omega^2} \\
 &= \frac{e^{-j\pi\omega} + 1}{1-\omega^2}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 46. Sei

$$\begin{aligned}
 f(t) \circ\!\!\!\bullet & F(\omega) \\
 g(t) \circ\!\!\!\bullet & G(\omega).
 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$(f+g)(t) \circ\!\!\!\bullet (F+G)(\omega).$$

Lösung von Aufgabe 46.

$$\begin{aligned}
 (f+g)(t) \circ\!\!\!\bullet & \int_{-\infty}^{\infty} (f+g)(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)+g(t))e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= F(\omega) + G(\omega) \\
 &= (F+G)(\omega).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 47. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit *reeller* Fourier Transformierter $F(\omega)$. Zeigen Sie, dass dann f gerade ist.

Lösung von Aufgabe 47. Da $F(\omega)$ reell ist, gilt

$$\overline{F(\omega)} = F(\omega).$$

Zu zeigen ist, dass $f(t)$ gerade ist, d.h.

$$f(-t) = f(t).$$

Nach Definition der Fourier Transformation ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ für alle } t.$$

Ersetzt man auf beiden Seiten t durch $-t$ erhält man

$$\begin{aligned} f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(-t)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{e^{j\omega t}} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega) e^{j\omega t}} d\omega \quad \text{da } F(\omega) \text{ reell} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega} \\ &= \overline{f(t)} \\ &= f(t) \quad \text{da } f(t) \text{ reell.} \end{aligned}$$

Aufgabe 48. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Fourier Transformierter

$$F(\omega) = A(\omega) e^{j\omega a}$$

wobei $A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *reelle* Funktion ist und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante.

Zeigen Sie, dass dann $f(t - a)$ eine gerade Funktion ist.

Lösung von Aufgabe 48. Aus

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega a} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(t - a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega a} e^{j\omega(t-a)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Damit ist $f(t-a)$ die inverse Fourier Transformierte der *reellen* Funktion $A(\omega)$ und damit gerade.

Aufgabe 49. Berechnen Sie die Funktion $f(t)$, für deren Fourier Transformierte $F(\omega)$ gilt

$$F(\omega) = \delta(\omega).$$

In der Frequenzzzerlegung von $f(t)$ taucht somit nur eine einzige Schwingungskomponente mit Kreisfrequenz $\omega = 0$ auf und ansonsten keine Schwingungen. Überlegen Sie sich daher zunächst anschaulich, wie $f(t)$ aussehen muss.

Lösung von Aufgabe 49. Da eine Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega = 0$ eine Konstante ist, muss $f(t)$ eine konstante Funktion sein.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j0t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Aufgabe 50. Sei $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$F(\omega) = 2 \operatorname{re} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right)$$

Lösung von Aufgabe 50. Sei $f(t)$ eine gerade Funktion, d.h.

$$f(-t) = f(t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Im ersten Integral führt man eine Substitution durch.

$$\begin{aligned} \tau &= -t \\ \frac{d\tau}{dt} &= -1 \\ dt &= -d\tau. \end{aligned}$$

Damit gilt für das erste Integral

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-j\omega t} dt &= \int_{\infty}^0 f(-\tau)e^{j\omega\tau}(-d\tau) \\
 &= -\int_{\infty}^0 f(\tau)\overline{e^{-j\omega\tau}} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} f(\tau)\overline{e^{-j\omega\tau}} d\tau \\
 &= \overline{\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau} \\
 &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \overline{\int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt} + \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= 2\operatorname{re}\left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt\right)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 51. Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{(1+j)t} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |F(\omega)| = 0.$$

Sie dürfen hierbei die Dreiecksungleichung der Vektorrechnung auf komplexe Zahlen übertragen, d.h.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Lösung von Aufgabe 51.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^1 e^{(1+j)t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^1 e^{(1+j(1-\omega))t} dt \\ &= \frac{1}{1+j(1-\omega)} \left[e^{(1+j(1-\omega))t} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+j(1-\omega)} (e^{1+j(1-\omega)} - 1) \\ |F(\omega)| &= \left| \frac{1}{1+j(1-\omega)} \right| \left| e^{1+j(1-\omega)} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{|1+(1-\omega)^2|} \left| e^{e^{j(1-\omega)}} - 1 \right| \end{aligned}$$

Da mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| e^{e^{j(1-\omega)}} - 1 \right| &\leq \left| e^{e^{j(1-\omega)}} \right| + 1 \\ &= e + 1 \quad \text{für alle } \omega \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+(1-\omega)^2|} = 0$$

folgt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |F(\omega)| = 0.$$

Aufgabe 52. Berechnen Sie die Fourier Transformierte $F(\omega)$ von

$$f(t) = \sigma(t) \sin(t) e^{-t}.$$

Lösung von Aufgabe 52.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-t}e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{jt} - e^{-jt})e^{-t}e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{t(j-j\omega-1)} - e^{t(-j-j\omega-1)}) dt \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{-1+j(1-\omega)} \left[e^{t(j-j\omega-1)} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{-1-j(1+\omega)} \left[e^{t(-j-j\omega-1)} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{-1+j(1-\omega)} (0-1) - \frac{1}{-1-j(1+\omega)} (0-1) \right) \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1-j(1-\omega)} + \frac{1}{-1-j(1+\omega)} \right) \\
&= \frac{1/2}{1-\omega+j} + \frac{1/2}{1+\omega-j} \\
&= \frac{1/2(1+\omega-j) + 1/2(1-\omega+j)}{(1+(\omega-j))(1-(\omega-j))} \\
&= \frac{1}{1-(\omega-j)^2} \\
&= \frac{1}{1-(\omega^2-2j\omega-1)} \\
&= \frac{1}{2-\omega^2+2j\omega}
\end{aligned}$$

Aufgabe 53. Zeigen Sie, dass

$$\delta(t) \circ \bullet 1.$$

Hinweis: Stellen Sie das Fourierintegral auf und nutzen Sie darin die Ausblendeigenschaft des Dirac Impulses.

Lösung von Aufgabe 53.

$$\begin{aligned}
\delta(t) \circ \bullet & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega \cdot 0} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$