

Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte sofern sie existieren.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\ln(x)) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \cos(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{(2x + 1)(x + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2 + \sin(x)}\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\ln(x)) & \quad \text{existiert nicht} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \cos(x) & = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{(2x + 1)(x + 2)} & = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2 + \sin(x)} & = \infty\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^\pi e^{jkt} dt.$$

Hinweis: Um den Term $e^{jk\pi}$ zu vereinfachen, müssen Sie eine Fallunterscheidung machen ob k gerade oder k ungerade ist. Bevor Sie durch k dividieren, müssen Sie eine weitere Fallunterscheidung machen, ob $k = 0$ ist.

Lösung von Aufgabe 2. Für $k = 0$ gilt

$$\int_0^\pi e^{jkt} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{jkt} dt & = \frac{1}{jk} [e^{jkt}]_0^\pi \\ & = \frac{1}{jk} (e^{jk\pi} - 1).\end{aligned}$$

Für gerade k ist $k\pi$ ein Vielfaches von 2π und damit

$$\begin{aligned}e^{jk\pi} & = 1 \\ \int_0^\pi e^{jkt} dt & = 0.\end{aligned}$$

Für ungerade k ist $k\pi$ ein Vielfaches von 2π plus π und damit

$$\begin{aligned} e^{jk\pi} &= -1 \\ \int_0^\pi e^{jkt} dt &= -\frac{2}{jk}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle t und ε gilt

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \cos(u) du = 2 \sin(\varepsilon) \cos(t).$$

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \cos(u) du &= [\sin(u)]_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \\ &= [\operatorname{im}(e^{ju})]_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \\ &= \operatorname{im}(e^{j(t+\varepsilon)}) - \operatorname{im}(e^{j(t-\varepsilon)}) \\ &= \operatorname{im}(e^{j(t+\varepsilon)} - e^{j(t-\varepsilon)}) \\ &= \operatorname{im}(e^{jt}e^{j\varepsilon} - e^{jt}e^{-j\varepsilon}) \\ &= \operatorname{im}(e^{jt}(e^{j\varepsilon} - e^{-j\varepsilon})) \\ &= \operatorname{im}(e^{jt}2j \sin(\varepsilon)) \\ &= 2 \sin(\varepsilon) \operatorname{im}(je^{jt}) \\ &= 2 \sin(\varepsilon) \operatorname{im}(j(\cos(t) + j \sin(t))) \\ &= 2 \sin(\varepsilon) \operatorname{im}(j \cos(t) - \sin(t)) \\ &= 2 \sin(\varepsilon) \cos(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie zwei Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = xe^{(x^2)} + 1.$$

Berechnen Sie dann den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Lösung von Aufgabe 4. Substitution

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ \frac{dg}{dx} &= 2x \\ dx &= \frac{dg}{2x}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int (xe^{(x^2)} + 1)dx &= x + \int (xe^{(x^2)})dx \\ &= x + \int xe^g \frac{dg}{2x} \\ &= x + \frac{1}{2} \int e^g dg \\ &= x + \frac{1}{2} e^g + C \\ &= x + \frac{1}{2} e^{(x^2)} + C.\end{aligned}$$

Zwei Stammfunktionen sind somit

$$\begin{aligned}F_1(x) &= x + \frac{1}{2} e^{(x^2)} \\ F_2(x) &= x + \frac{1}{2} e^{(x^2)} + 1.\end{aligned}$$

Das bestimmte Integral ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \left[x + \frac{1}{2} e^{(x^2)} \right]_{-1}^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} e - \left(-1 + \frac{1}{2} e \right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

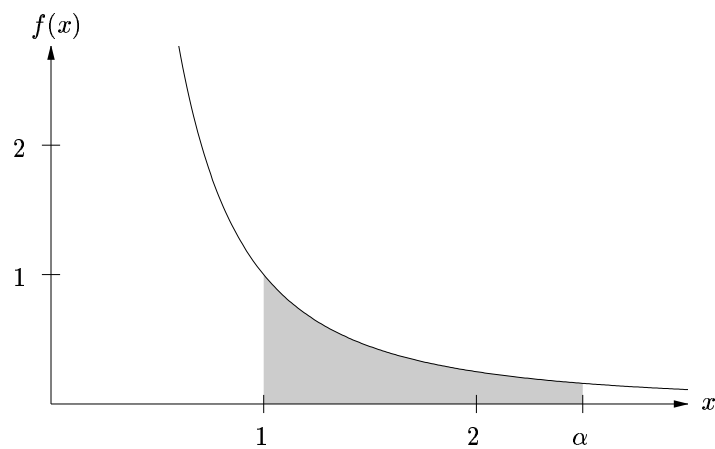
für x zwischen 1 und ∞ . Ist der Flächeninhalt überhaupt endlich? Da $f(\infty)$ nicht definiert ist, muss man wie folgt vorgehen: Man berechnet zunächst für beliebiges $\alpha > 0$

$$F_\alpha = \int_1^\alpha f(x)dx$$

und führt dann den Grenzübergang

$$F = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_\alpha$$

durch.



Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
 F_\alpha &= \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \int_1^\alpha x^{-2} dx \\
 &= -[x^{-1}]_1^\alpha \\
 &= -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\
 F &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_\alpha \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Von einer Funktion $f(x)$ sei eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt.
Berechnen Sie hiermit eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x} f(\ln(x)).$$

Lösung von Aufgabe 6. Substitution

$$\begin{aligned}
 u &= \ln(x) \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \\
 dx &= x du.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} f(\ln(x)) dx &= \int \frac{1}{x} f(u) x du \\
 &= \int f(u) du \\
 &= F(u) + C \\
 &= F(\ln(x)) + C.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (e^x + 1) \sin(e^x + x).$$

- Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$. Hinweis: Versuchen Sie's mit einer geeigneten Substitution.
- Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, für die gilt $F(0) = 0$.

Lösung von Aufgabe 7. Substitution:

$$g(x) = e^x + x.$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} dg/dx &= e^x + 1 \\ dx &= dg/(e^x + 1). \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \int (e^x + 1) \sin(e^x + x) dx &= \int (e^x + 1) \sin(g) dg / (e^x + 1) \\ &= \int \sin(g) dg \\ &= -\cos(g) + C \\ &= -\cos(e^x + x) + C. \end{aligned}$$

Für beliebiges $C \in \mathbb{R}$ ist

$$F(x) = -\cos(e^x + x) + C$$

Stammfunktion von $f(x)$. Aus $F(0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} -\cos(e^0 + 0) + C &= 0 \\ C &= \cos(1). \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion ist daher

$$F(x) = \cos(1) - \cos(e^x + x).$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie

$$\int \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx.$$

Lösung von Aufgabe 8. Substitution.

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{1}{\cos(x)} du. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \int \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx &= \int \cos(x) \sqrt{u} \frac{1}{\cos(x)} du \\
 &= \int \sqrt{u} du \\
 &= \frac{1}{3/2} u^{3/2} + C \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{\sin(x)^3} + C.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Sei f eine T -periodische Funktion, d.h.

$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t.$$

Sei weiterhin

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

eine T -periodische Funktion ist, d.h.

$$g(t+T) = g(t) \text{ für alle } t.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned}
 g(t+T) &= \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau \\
 &= \underbrace{\int_0^T f(\tau) d\tau}_{=0} + \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau \\
 &= \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Um die Grenzen des Integrals um T nach unten zu verschieben, wird substituiert:

$$u = \tau - T, \quad d\tau = du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 g(t+T) &= \int_0^t f(u+T) du \\
 &= \int_0^t f(u) du \quad \text{da } f \text{ eine } T\text{-periodische Funktion ist} \\
 &= g(t).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Berechnung einmal mit der Regel “Zeile mal Spalte” durch und einmal mit der Regel “Linearkombination der Spalten”. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.

Lösung von Aufgabe 10. Zeile mal Spalte:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-3) \times (-2) + 4 \times 3 \\ (-2) \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Linearkombination der Spalten:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Wie viele Multiplikationen von Zahlen sind erforderlich um eine $m \times n$ -Matrix mit einem n -stelligen Vektor zu multiplizieren? Berechnen Sie dies für die Multiplikation mit der Regel “Zeile mal Spalte” und mit der Regel “Linearkombination der Spalten”.

Lösung von Aufgabe 11.

- Zeile mal Spalte. Jede Komponente des Ergebnisvektors erfordert das Skalarprodukt zweier n -stelliger Vektoren. Dies kostet pro Komponente n Multiplikationen. Da der Ergebnisvektor m Komponenten hat, ist der Gesamtaufwand nm Multiplikationen.
- Linearkombination der Spalten. Jede Spalte muss skaliert werden, was pro Spaltenvektor m Multiplikationen kostet. Da es insgesamt n Spaltenvektoren gibt, ist der Gesamtaufwand ebenfalls nm Multiplikationen.

Aufgabe 12. Stellen Sie den Term

$$a \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

als Matrix-Vektor Produkt dar.

Lösung von Aufgabe 12.

$$a \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (7)$$

Aufgabe 15. Beim Zugriff auf den Hauptspeicher (DRAM) eines Rechners wird intern immer eine ganze Speicherzeile (Englisch: page) auf einmal gelesen und im Speicherchip gepuffert, so dass darauffolgende Zugriffe auf diese Zeile sehr schnell sind und in den Cache kopiert werden können. Ein typischer Wert sind etwa 8kB. Daher sind Speicherzugriffe auf konsequente Adressen effizienter als auf weit auseinanderliegende.

Eine Matrix kann auf zwei Weisen im Rechner gespeichert werden:

- *zeilenweise* (die Komponenten einer Zeile liegen im Speicher konsequativ)
- *spaltenweise* (die Komponenten einer Spalte liegen im Speicher konsequativ).

Welche Methode ist bei der Matrix-Vektor Multiplikation besser wenn man die Multiplikation mit der Regel Zeile mal Spalte berechnet bzw. mit der Regel Linearkombination der Spalten?

Bei der Verwendung von Grafikkarten können fast alle arithmetischen Operationen parallel ausgeführt werden. Die Rechenzeit hängt daher im wesentlichen von der Geschwindigkeit der Speicherzugriffe ab!

Lösung von Aufgabe 15. Bei Zeile mal Spalte Multiplikation sollte die Matrix zeilenweise gespeichert werden. Bei der Linearkombination der Spalten hingegen spaltenweise. Beide Verfahren erfordern die gleiche Anzahl an arithmetischen Operationen, der Effizienzunterschied kommt ausschließlich von den Speicherzugriffen.

Aufgabe 16. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen, deren Komponenten Funktionen von t sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer Matrix ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (A')_{ij} &= a'_{ij}(t) \\ (B')_{ij} &= b'_{ij}(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Produktregel der Ableitung für Matrizen gilt, d.h.

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Lösung von Aufgabe 16. Zu zeigen:

$$(AB)'_{ij} = (A'B + AB')_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} (AB)'_{ij} &= \left(\sum_k A_{ik} B_{kj} \right)' \\ &= \sum_k (A_{ik} B_{kj})' \\ &= \sum_k A'_{ik} B_{kj} + A_{ik} B'_{kj} \\ &= \sum_k A'_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} B'_{kj} \\ &= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij}. \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Berechnen Sie das Matrix Produkt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 17.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18. Sei A eine Matrix, in der die i -te Zeile komplett Null ist und B eine beliebige Matrix. Welche Komponenten von AB sind dann mit Sicherheit Null? Sei nun A eine Matrix, in der die j -te Spalte komplett Null ist. Was kann man jetzt über die Matrix AB sagen?

Lösung von Aufgabe 18. Wenn die i -te Zeile von A komplett Null ist, dann ist auch die i -te Zeile von AB komplett Null. Wenn die j -te Spalte von A komplett Null ist, kann man nichts über AB sagen.

Aufgabe 19. Sie haben das Produkt C zweier Matrizen A und B berechnet.

- Nachträglich wird nun die Komponente a_{ij} der Matrix A verändert. Welche Komponenten von C müssen dann neu berechnet werden?
- Nachträglich wird nun die Komponente b_{ij} der Matrix B verändert. Welche Komponenten von C müssen dann neu berechnet werden?

Geben Sie eine kurze Begründung!

Lösung von Aufgabe 19.

- Bei der Berechnung von jeder Komponenten der i -ten Zeile von C wird die gesamte i -te Zeile von A verwendet. Folglich muss die i -te Zeile von C neu berechnet werden wenn a_{ij} verändert wird.
- Bei der Berechnung von jeder Komponenten der j -ten Spalte von C wird die gesamte j -te Spalte von B verwendet. Folglich muss die j -te Spalte von C neu berechnet werden wenn b_{ij} verändert wird.

Aufgabe 20. Finden Sie zwei Matrizen A, B so dass

$$AB = \begin{pmatrix} ab + cf & ad + ch \\ eb + gf & ed + gh \end{pmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 20.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ e & g \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & d \\ f & h \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21. Für zwei Zahlen a, b gilt $ab = 0$ nur wenn $a = 0$ oder $b = 0$. Gilt dies auch für Matrizen? Sei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die 2×2 Nullmatrix. Gibt es zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so dass $A \neq N$, $B \neq N$ aber $AB = N$? Geben Sie eine Begründung.

Lösung von Aufgabe 21. Mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= N. \end{aligned}$$

Aufgabe 22. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix X so dass

$$AX = B.$$

Lösung von Aufgabe 22. Mit den Rechenregeln der Matrix Multiplikation gilt $AX = B$ genau dann wenn

$$\begin{aligned} A\vec{x}_1 &= \vec{b}_1 \\ A\vec{x}_2 &= \vec{b}_2. \end{aligned}$$

Da die beiden linearen Gleichungssysteme die gleiche Koeffizientenmatrix A haben, kann man sie wie bei der Matrix Inversion parallel lösen.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 1 \\ & 3 & 6 & -3 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 1 \\ & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}$$

Die Lösung ist damit

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$