Heilbronn, den 26.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

# Übungen zu Mathematik 2
# mit Musterlösungen
*Blatt 3*

---

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{1}{1+j}\right)^{10}.$$

**Lösung von Aufgabe 1.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+j} &= \frac{1-j}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \\
\left(\frac{1}{1+j}\right)^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}^1 0} e^{-j\pi 5/2} \\
&= \frac{1}{2^5} e^{-j\pi(2+1/2)} \\
&= \frac{1}{32} e^{-2\pi j} e^{-j\pi/2} \\
&= \frac{1}{32} e^{-j\pi/2} \\
&= \frac{1}{32}(-j).
\end{aligned}$$

Der Realteil ist somit Null, der Imaginärteil $-1/32$.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie alle Lösungen $z$ der Gleichung

$$e^{z+1} = j.$$

Hinweis: Stellen Sie $z$ in Kartesischen Koordinaten dar.

**Lösung von Aufgabe 2.** Sei $z = a + jb$. Umformen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
e^{z+1} &= j \\
e^{a+1+jb} &= j \\
e^{a+1} e^j b &= e^{j\pi/2} \\
e^{a+1} &= 1 \\
a+1 &= \ln(1) \;=\; 0 \\
a &= -1 \\
b &= {}^{pi}\!/_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$z = -1 + j({}^{\pi}\!/_2 + 2k\pi).$$

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

**Lösung von Aufgabe 3.** Substitution

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ \frac{du}{dx} &= f'(x) \\ dx &= \frac{1}{f'(x)} du \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{f'(x)}{u} \frac{1}{f'(x)} du \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |f(x)| + C. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(x)$ das Integral

$$\int f(x) f'(x) dx.$$

Lösen Sie die Aufgabe einmal mit Substitution und einmal mit partieller Integration.

**Lösung von Aufgabe 4.**

- Lösung mit Substitution.

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ \frac{du}{dx} &= f'(x) \\ dx &= \frac{1}{f'(x)} du. \end{aligned}$$

  Damit ist

$$\begin{aligned} \int f(x) f'(x) dx &= \int u f'(x) \frac{1}{f'(x)} du \\ &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} f(x)^2 + C. \end{aligned}$$

- Lösung mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int f(x)f'(x)dx &= f(x)f(x) - \int f'(x)f(x)dx \\
2\int f(x)f'(x)dx &= f(x)^2 + C \\
\int f(x)f'(x) &= \frac{1}{2}f(x)^2 + C.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^{-1}$ und $AB$.

**Lösung von Aufgabe 5.**

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.** Zeigen Sie, dass für alle quadratischen Matrizen $A, B$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B.$$

**Lösung von Aufgabe 6.** Mit dem Assoziativgesetz der Matrix Multiplikation gilt

$$\begin{aligned}
(AB)^n &= (AB)(AB)\cdots(AB)(AB) \\
&= A(BA)(B\ldots A)(BA)B \\
&= A(BA)^{n-1}B.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Neuronale Netze wie ChatGPT oder Deep Seek berechnen intern eine sog. Query Matrix $Q$ und eine Key Matrix $K$ mit

$$Q, K \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Anschließend wird das Produkt

$$QK^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

berechnet.

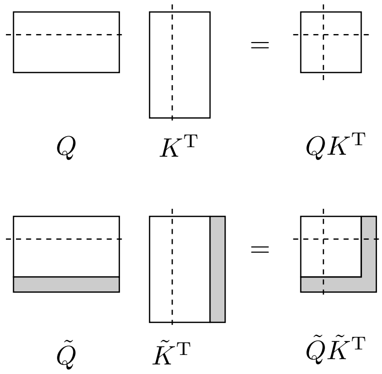
Wenn der Eingabetext um ein Token verlängert wird, führt dies dazu, dass an $Q$ und $K$ jeweils eine Zeile angefügt wird. Man erhält dadurch zwei Matrizen

$$\tilde{Q}, \tilde{K} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}.$$

Wie viele Matrix Elemente muss man für das Produkt $\tilde{Q}\tilde{K}^{\mathrm{T}}$ neu berechnen, wenn man $QK^{\mathrm{T}}$ bereits berechnet hat?

Hinweis: Zeichnen Sie ein Bild!

**Lösung von Aufgabe 7.**




Das Produkt $\tilde{Q}\tilde{K}^{\mathrm{T}}$ hat $m+1$ Zeilen und $m+1$ Spalten. Wie man an den Bild erkennt, muss mit der Zeile mal Spalte Regel der Matrix Multiplilation lediglich die letzte Zeile und die letzte Spalte berechnet werden. Dies sind $2m+1$ Elemente.

**Aufgabe 8.** Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Berechnung einmal mit der Regel "Zeile mal Spalte" durch und einmal spaltenweise mit Matrix - Vektor Multiplikationen. Der Rechenweg muss ersichtlich sein.

**Lösung von Aufgabe 8.** Zeile mal Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Spaltenweise mit Matrix-Vektor Multiplikationen:

- Erste Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zweite Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Dritte Spalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.** Gilt für beliebige quadratische Matrizen $A, B$ und $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(AB)^n \quad = \quad A^n B^n?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung von Aufgabe 9.** Die Formel gilt nicht allgemein, wie man bereits am Beispiel $n = 2$ und beliebigen regulären Matrizen $A, B$ sieht. Wenn sie gelten würde, hätte man

$$(AB)^2 \quad = \quad A^2 B^2.$$

Hieraus würde folgen, dass

$$ABAB \quad = \quad AABB.$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit $A^{-1}$ und von rechts mit $B^{-1}$ erhält man

$$BA \quad = \quad AB.$$

Dies würde bedeuten, dass die Matrix Multiplikation für reguläre, quadratische Matrizen kommutativ ist, was aber nicht stimmt. Mit einem Zahlenbeispiel könnte man ebenfalls zeigen, dass die Formel nicht gilt.

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie, dass die Matrix Multiplikation distributiv über der Matrix Addition ist, d.h.

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Sie dürfen hierbei verwenden, dass

$$A(\vec{b} + \vec{c}) = A\vec{b} + A\vec{c}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie die Matrizen $B$ und $C$ in ihre Spalten und führen Sie die Matrix Multiplikationen spaltenweise durch. Beginnen Sie also mit

$$B + C \quad = \quad (\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n)$$

und

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n) \\ &= \big(A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \dots \quad A(\vec{b}_n + \vec{c}_n)\big) \\ &\vdots \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

**Lösung von Aufgabe 10.**

$$\begin{aligned} A(B + C) &= A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1 \quad \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_n + \vec{c}_n) \\ &= \big(A(\vec{b}_1 + \vec{c}_1) \quad A(\vec{b}_2 + \vec{c}_2) \quad \dots \quad A(\vec{b}_n + \vec{c}_n)\big) \\ &= \big(A\vec{b}_1 + A\vec{c}_1 \quad A\vec{b}_2 + A\vec{c}_2 \quad \dots \quad A\vec{b}_n + A\vec{c}_n\big) \\ &= (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \dots \quad A\vec{b}_n) + (A\vec{c}_1 \quad A\vec{c}_2 \quad \dots \quad A\vec{c}_n) \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.** Berechnen Sie für beliebiges $x$ und $y$ die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung von Aufgabe 11.**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 12.** Sei $\alpha$ beliebig und

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$A^{\mathrm{T}}A = E.$$

**Lösung von Aufgabe 12.**

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}A &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

**Aufgabe 13.** Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine Matrix $T$ gibt, so dass

$$T^{-1}AT = B.$$

Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reguläre Matrizen. Zeigen Sie, dass $AB$ und $BA$ ähnlich sind.

**Lösung von Aufgabe 13.** Gesucht ist eine Matrix $T$, so dass

$$T^{-1}ABT = BA.$$

Multipliziert man beide Gleichungen von links mit $T$, erhält man

$$ABT = TBA.$$

Diese Gleichung wird durch $T = A$ erfüllt.

Eine andere Möglichkeit wäre, beide Seiten von rechts mit $T^{-1}$ zu multiplizieren. Man erhält dann

$$T^{-1}AB = BAT^{-1}.$$

Diese Gleichung wird durch $T^{-1} = B$ bzw. $T = B^{-1}$ erfüllt. Man hat somit zwei Möglichkeiten für die Wahl von $T$.

**Aufgabe 14.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A^{\mathrm{T}} = A$. Seien $A, B$ symmetrische Matrizen.

- Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dann $AB$ nicht notwendig symmetrisch ist.
- Zeigen Sie, dass

$$AB = (BA)^{\mathrm{T}}.$$

**Lösung von Aufgabe 14.** Gegenbeispiel dass $AB$ nicht notwendig symmetrisch ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 19 & 14 \end{pmatrix}.$$

Beweis, dass $AB = (BA)^{\mathrm{T}}$. Seien $A, B$ symmetrisch, d.h. $A^{\mathrm{T}} = A$ und $B^{\mathrm{T}} = B$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(BA)^{\mathrm{T}} &= A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \\ &= AB.\end{aligned}$$

**Aufgabe 15.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1}.$$

Hierbei ist

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{mal}}.$$

**Lösung von Aufgabe 15.** Zu zeigen:

$$A^n\left(A^{-1}\right)^n = E.$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned}A^n\left(A^{-1}\right)^n &= \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{mal}}\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\text{mal}} \\ &= \underbrace{AA\cdots A}_{n-1\text{mal}}\ AA^{-1}\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n-1\text{mal}} \\ &= \underbrace{AA\cdots A}_{n-1\text{mal}}\ E\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n-1\text{mal}} \\ &= \underbrace{AA\cdots A}_{n-1\text{mal}}\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n-1\text{mal}} \\ &= \\ &\vdots \\ &= AA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

**Aufgabe 16.** Zeigen Sie, dass

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} \quad = \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Sie dürfen in der Herleitung verwenden, dass

$$(AB)^{\mathrm{T}} \quad = \quad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

**Lösung von Aufgabe 16.** Ausgehend von

$$A^{-1}A \quad = \quad E$$

erhält man durch Transposition auf beiden Seiten

$$(A^{-1}A)^{\mathrm{T}} \quad = \quad E.$$

Unter Verwendung der Rechenregel für Transposition von Matrixprodukten erhält man

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} \quad = \quad E.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ erhält man

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}} \quad = \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

**Aufgabe 17.** Sei $\vec{x}_b$ eine Lösung des LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

und $\vec{x}_0$ eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\vec{x}_b + \vec{x}_0$ ebenfalls Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist.

**Lösung von Aufgabe 17.**

$$\begin{aligned} A(\vec{x}_b + \vec{x}_0) &= A\vec{x}_b + A\vec{x}_0 \\ &= \vec{b} + \vec{0} \\ &= \vec{b}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 18.** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei Matrizen, deren Komponenten Funktionen von $t$ sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer Matrix ist komponentenweise definiert, d.h.

$$\begin{aligned} (A')_{ij} &= a'_{ij}(t) \\ (B')_{ij} &= b'_{ij}(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Produktregel der Ableitung für Matrizen gilt, d.h.

$$(AB)' \quad = \quad A'B + AB'.$$

**Lösung von Aufgabe 18.** Zu zeigen:

$$(AB)'_{ij} \quad = \quad (A'B + AB')_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
(AB)'_{ij} &= \left(\sum_k A_{ik}B_{kj}\right)' \\
&= \sum_k (A_{ik}B_{kj})' \\
&= \sum_k A'_{ik}B_{kj} + A_{ik}B'_{kj} \\
&= \sum_k A'_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}B'_{kj} \\
&= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 19.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $AB$ und $BA$.

**Lösung von Aufgabe 19.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$