Übungen zu Mathematik 2
mit Musterlösungen
Blatt 4

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}dx.$$

Lösung von Aufgabe 1.

$$\int \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx.$$

Substitution

$$\begin{aligned} g &= \sin(x) \\ \frac{dg}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{1}{\cos(x)}dg \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx &= \int \frac{\cos(x)}{g^2}\frac{1}{\cos(x)}dg \\ &= \int \frac{1}{g^2}dg \\ &= \int g^{-2}dg \\ &= -g^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei f eine beliebige Funktion. Berechnen Sie

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)^2}dt.$$

Lösung von Aufgabe 2. Substitution

$$u = f(t), \quad \frac{du}{dt} = f'(t), \quad dt = \frac{1}{f'(t)}du.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{f'(t)}{f(t)^2} dt &= \int \frac{f'(t)}{u^2} \frac{1}{f'(t)} du \\
&= \int \frac{1}{u^2} du \\
&= \int u^{-2} du \\
&= \frac{u^{-1}}{-1} + C \\
&= -\frac{1}{u} + C \\
&= -\frac{1}{f(t)} + C.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei f eine differenzierbare Funktion und C eine Konstante. Berechnen Sie

$$\int_C^t f'(\tau) d\tau.$$

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned}
\int_C^t f'(\tau) d\tau &= [f(\tau)]_C^t \\
&= f(t) - f(C).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei $f(t)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_C^t f(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $f(t)$ ist für jede Konstante C.

Lösung von Aufgabe 4. Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_C^t f(\tau) d\tau &= [F(\tau)]_C^t \\
&= F(t) - F(C).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\left(\int_C^t f(\tau) d\tau \right)' &= (F(t) - F(C))' \\
&= F'(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_C^t f(\tau) d\tau$$

eine Stammfunktion von $f(t)$.

Aufgabe 5. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal wenn

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

- Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
eine orthogonale Matrix ist.
- Zeigen Sie, dass für jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$
Mit anderen Worten: Multipliziert man einen Vektor mit einer orthogonalen Matrix, bleibt die Länge des Vektors gleich. Hinweis: Nutzen Sie aus, dass
$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \circ \vec{x} = \vec{x}^{\mathrm{T}} \vec{x}.$$

Lösung von Aufgabe 5.

- Sei
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$A^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Damit ist
$$\begin{aligned} AA^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
- Umformen ergibt
$$\begin{aligned} \|A\vec{x}\|^2 &= (A\vec{x}) \circ (A\vec{x}) \\ &= (A\vec{x})^{\mathrm{T}} A\vec{x} \\ &= \vec{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\vec{x} \\ &= \vec{x}^{\mathrm{T}} E\vec{x} \qquad \text{da } A \text{ orthogonal ist, gilt } A^{\mathrm{T}}A = E \\ &= \vec{x}^{\mathrm{T}} \vec{x} \\ &= \vec{x} \circ \vec{x} \\ &= \|\vec{x}\|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei $\vec{x}_b$ eine Lösung des LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Zeigen Sie, dass es dann für jede Lösung $\vec{x}_b'$ dieses LGS einen Vektor $\vec{x}_0$ gibt, der Lösung des zugehörigen homogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

ist, so dass

$$\vec{x}_b' = \vec{x}_b + \vec{x}_0.$$

Lösung von Aufgabe 6. Seien $\vec{x}_b, \vec{x}_b'$ Lösungen von $A\vec{x} = b$, d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{x}_b &= \vec{b} \\ A\vec{x}_b' &= \vec{b}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_b - \vec{x}_b'$$

Lösung des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} A(\vec{x}_b - \vec{x}_b') &= A\vec{x}_b - A\vec{x}_b' \\ &= \vec{b} - \vec{b} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

und

$$\vec{b}' = \vec{x}_b + \vec{x}_0.$$

Aufgabe 7. Statt Linearkombinationen von Vektoren kann man analog auch Linearkombinationen von Funktionen bilden. So ist die Funktion $g(x)$ Linearkombination der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ wenn es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt so dass

$$g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$$

für alle x. Entsprechend ist der Vektorraum, der von $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ erzeugt wird, die Menge

$$L(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \{c_1 f_1(x) + \ldots c_n f_n(x) \,|\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

Was sind die Elemente von

$$L(1, x, x^2, \ldots, x^5)$$

bzw. von

$$L(1, x, x^2, \ldots)?$$

Zeigen Sie, dass

$$L(\cos(\omega x), \sin(\omega x)) = \{r \cos(\omega x + \varphi) \,|\, r, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie komplexe Zahlen!

Lösung von Aufgabe 7. $L(1, x, x^2, \ldots, x^5)$ ist die Menge aller Polynome vom Grad höchstens 5. $L(1, x, x,^2, \ldots)$ ist die Menge aller Polynome.

- Sei
$$f \in L(\cos(\omega x), \sin(\omega x)).$$
Zu zeigen:
$$f \in \{r\cos(\omega x + \varphi) \,|\, r, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$
Aus der Annahme folgt, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so dass
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \\ &= a\frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} + b\frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2j} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega x}(a - jb) + e^{-j\omega x}(a + jb)\right) \\ &= \mathrm{re}\left(e^{j\omega x}(a - jb)\right). \end{aligned}$$
Seien r, φ die Polarkoordinaten von $a - jb$, d.h.
$$a - jb = re^{j\varphi}.$$
Dann ist
$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{re}\left(e^{j\omega x} re^{j\varphi}\right) \\ &= \mathrm{re}\left(re^{j(\omega x + \varphi)}\right) \\ &= r\cos(\omega x + \varphi) \end{aligned}$$
und damit
$$f \in \{r\cos(\omega x + \varphi) \,|\, r, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

- Sei
$$f \in \{r\cos(\omega x + \varphi) \,|\, r, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$
Zu zeigen
$$f \in L(\cos(\omega x), \sin(\omega x)).$$
Aus der Annahme folgt, dass es $r, \varphi \in \mathbb{R}$ gibt so dass
$$\begin{aligned} f(x) &= r\cos(\omega x + \varphi) \\ &= r\mathrm{re}\left(e^{j(\omega x + \varphi)}\right) \\ &= r\mathrm{re}\left(e^{j\omega x} e^{j\varphi}\right) \\ &= r(\cos(\omega x)\cos(\varphi) - \sin(\omega x)\sin(\varphi)) \\ &= r\cos(\varphi)\cos(\omega x) + (-r\sin(\varphi))\sin(\omega x). \end{aligned}$$

Mit

$$a = r\cos(\varphi), \quad b = -r\sin(\varphi)$$

folgt

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

und damit

$$f \in L(\cos(\omega x), \sin(\omega x)).$$

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \in L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

Lösung von Aufgabe 8. Zu zeigen: Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf das LGS

$$\begin{aligned} a + 3b &= -3 \\ a - b &= 5 \\ 2a + 5b &= -4. \end{aligned}$$

Mit dem Gauß Algorithmus erhält man die Lösung

$$a = 3 \text{ und } b = -2.$$

Aufgabe 9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

ist ein Vektorraum. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

Lösung von Aufgabe 9. Das LGS ist bereits in Zeilenstufenform. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x_4 &= \text{beliebig} \\ x_3 &= \text{beliebig} \\ x_2 &= -2x_3 - x_4 \\ x_1 &= -x_2 + x_4 \\ &= 2x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Eine Basis ist somit

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt.

Lösung von Aufgabe 10. Sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor. Zu zeigen: Es existieren x_1, x_2 so dass

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$$

bzw.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

wobei $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ die Spalten der Matrix A sind. Mit dem Gauß Algorithmus berechnet man

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhält damit

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Aufgabe 11. Sei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Vektor $\vec{b}$, für den gilt

$$\vec{b} \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2).$$

Lösung von Aufgabe 11. Da $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ nur eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist, kann man einen zufälligen Vektor $\vec{b}$ wählen und fast sicher sein, dass er nicht im Vektorraum liegt. Nachweisen kann man dies, indem man mit dem Gauß Algorithmus zeigt, dass das LGS

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \quad = \quad \vec{b}$$

keine Lösung hat.

Aufgabe 12. Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \quad = \quad L(\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

Hinweis: Schauen Sie nach wie die Gleichheit von Mengen definiert ist.

Lösung von Aufgabe 12. Sei

$$\begin{aligned} L_1 &= L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ L_2 &= L(\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2). \end{aligned}$$

Zu zeigen: $L_1 = L_2$ bzw.

$$L_1 \subseteq L_2 \text{ und } L_2 \subseteq L_1.$$

- Beweis von $L_1 \subseteq L_2$. Annahme: $\vec{b} \in L_1$. Zu zeigen: $\vec{b} \in L_2$. Aus der Annahme folgt, dass es x_1, x_2 gibt so dass

  $$\vec{b} \quad = \quad x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2.$$

  Zu zeigen ist, dass es y_1, y_2 gibt so dass

  $$\vec{b} \quad = \quad y_1\vec{a}_1 + y_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

  Umformen ergibt

  $$\begin{aligned} x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 &= y_1\vec{a}_1 + y_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\ x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 &= (y_1 + y_2)\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \end{aligned}$$

  Dies führt auf das LGS

  $$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

  mit der Lösung

  $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

  Damit gilt

  $$\vec{b} \quad = \quad y_1\vec{a}_1 + y_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

- Beweis von $L_2 \subseteq L_1$. Annahme: $\vec{b} \in L_2$. Zu zeigen: $\vec{b} \in L_1$. Aus der Annahme folgt, dass es x_1, x_2 gibt so dass

  $$\vec{b} \quad = \quad x_1\vec{a}_1 + x_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

  Zu zeigen ist, dass es y_1, y_2 gibt so dass

  $$\vec{b} \quad = \quad y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2.$$

  Umformen ergibt

  $$x_1\vec{a}_1 + x_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \quad = \quad (x_1 + x_2)\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$$

  Mit

  $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

  gilt somit

  $$\vec{b} \quad = \quad y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2.$$

Aufgabe 13. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in M$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{x} + \vec{y} \in M \quad \text{und} \quad u\vec{x} \in M.$$

Die einfachsten Beispiele für solche Mengen sind Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen. Tatsächlich treten Mengen mit diesen Abschlusseigenschaften nicht nur in der Vektorrechnung sondern in vielen anderen Gebieten auf wie z.B. Polynome, Fourier Reihen, Eigenvektoren und Differentialgleichungen.

- Sei $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ und

  $$M \quad = \quad \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

  Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

  – Annahme: $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h. es gibt $r_1, \ldots, r_n$ und $s_1, \ldots, s_n$ so dass

  $$\begin{aligned} \vec{x} &= r_1\vec{a}_1 + \ldots + r_n\vec{a}_n \\ \vec{y} &= s_1\vec{a}_1 + \ldots + s_n\vec{a}_n. \end{aligned}$$

  – Zu zeigen: $\vec{x} + \vec{y} \in M$, d.h. es gibt $t_1, \ldots, t_n$ so dass

  $$\vec{x} + \vec{y} \quad = \quad t_1\vec{a}_1 + \ldots + t_n\vec{a}_n.$$

  Die Berechnung von $t_1, \ldots, t_n$ ist dann einfach.

- Sei M die Menge aller Polynome. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation, d.h. für alle Polynome $p(x), q(x)$ und alle Skalare u ist auch $p(x)+q(x)$ und $up(x)$ ein Polynom. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

- Annahme: $p(x), q(x)$ sind Polynome, d.h. es gibt $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_n$ so dass

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n. \end{aligned}$$

- Zu zeigen: $p(x) + q(x)$ ist ein Polynom, d.h. es gibt $c_0, \ldots, c_n$ so dass

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

- Eine Funktion $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch, wenn

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle t. Sei M die Menge aller T-periodischer Funktionen, wobei T eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

  - Annahme: $f(t), g(t)$ seien T-periodisch, d.h.

  $$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \\ g(t+T) &= g(t) \end{aligned}$$

  für alle t.
  - Zu zeigen: $(f+g)(t)$ ist T-periodisch, d.h.

  $$(f+g)(t+T) = (f+g)(t).$$

  Ab hier ist der Beweis einfach, da

  $$(f+g)(t+T) = f(t+T) + g(t+T).$$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:

  - Annahme: $\vec{x}, \vec{y} \in M$, d.h.

  $$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{y} &= \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

  - Zu zeigen: $\vec{x} + \vec{y} \in M$, d.h.

  $$A(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{x} + \vec{y}).$$

  Sie benötigen hierfür nur elementare Matrix Arithmetik.

- Sei M die Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt
$$f'(x) + \sin(x) f(x) \quad = \quad 0.$$
Beispiele für Elemente von M sind
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ f(x) & = & e^{\cos(x)}. \end{array}$$
Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist unter Addition und unter skalarer Multiplikation. Gehen Sie für die Addition wie folgt vor:
  - Seien $f, g \in M$, d.h.
$$\begin{array}{rcl} f'(x) + \sin(x) f(x) & = & 0 \\ g'(x) + \sin(x) g(x) & = & 0. \end{array}$$
  - Zu zeigen: $f + g \in M$, d.h.
$$(f+g)'(x) + \sin(x)(f+g)(x) \quad = \quad 0.$$
Hierfür benötigen Sie nur die Summenregel der Ableitung.

Lösung von Aufgabe 13.

- Sei
$$M \quad = \quad \{x_1 \vec{a}_1 + \ldots + x_n \vec{a}_n \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$
Seien $\vec{x}, \vec{y} \in M$. Dann existieren $r_1, \ldots, r_n$ und $s_1, \ldots, s_n$ so dass
$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & r_1 \vec{a}_1 + \ldots + r_n \vec{a}_n \\ \vec{y} & = & s_1 \vec{a}_1 + \ldots + s_n \vec{a}_n. \end{array}$$
Damit ist
$$\begin{array}{rcl} \vec{x} + \vec{y} & = & r_1 \vec{a}_1 + \ldots + r_n \vec{a}_n + s_1 \vec{a}_1 + \ldots + s_n \vec{a}_n \\ & = & (r_1 + s_1)\vec{a}_1 + \ldots + (r_n + s_n)\vec{a}_n \\ u\vec{x} & = & u(r_1 \vec{a}_1 + \ldots + r_n \vec{a}_n) \\ & = & u r_1 \vec{a}_1 + \ldots + u r_n \vec{a}_n \end{array}$$
und somit $\vec{x} + \vec{y} \in M$ und $u\vec{x} \in M$.
- Sei M die Menge aller Polynome und $p(x), q(x) \in M$. Dann existieren $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots b_n$ so dass
$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ q(x) & = & b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n. \end{array}$$
Damit ist
$$\begin{array}{rcl} p(x) + q(x) & = & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \\ & = & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n \\ up(x) & = & u(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \\ & = & u a_0 + u a_1 x + \ldots + u a_n x^n \end{array}$$
und somit ist $p(x) + q(x) \in M$ und $up(x) \in M$.

- Sei M die Menge aller T-periodischer Funktionen. Seien $f, g \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \\ g(t+T) &= g(t) \end{aligned}$$

für alle t. Damit ist

$$\begin{aligned} (f+g)(t+T) &= f(t+T)+g(t+T) \\ &= f(t)+g(t) \\ &= (f+g)(t) \\ (uf)(t+T) &= uf(t+T) \\ &= uf(t) \\ &= (uf)(t) \end{aligned}$$

und somit ist $f+g \in M$ und $uf \in M$.

- Sei

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

und $xvec, \vec{y} \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{y} &= \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y}) &= A\vec{x}+A\vec{y} \\ &= \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y} \\ &= \lambda(\vec{x}+\vec{y}) \\ A(u\vec{x}) &= uA\vec{x} \\ &= u\lambda\vec{x} \\ &= \lambda(u\vec{x}) \end{aligned}$$

und somit ist $\vec{x}+\vec{y} \in M$ und $u\vec{x} \in M$.

- Sei M die Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f'(x)+\sin(x)f(x) = 0.$$

Seien $f, g \in M$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x)+\sin(x)f(x) &= 0 \\ g'(x)+\sin(x)g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &(f+g)'(x)+\sin(x)(f+g)(x) \\ &\quad = f'(x)+g'(x)+\sin(x)f(x)+\sin(x)g(x) \\ &\quad = f'(x)+\sin(x)f(x)+g'(x)+\sin(x)g(x) \\ &\quad = 0 \\ &(uf)'(x)+\sin(x)(uf)(x) \\ &\quad = u(f'(x)+\sin(x)f(x)) \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

und somit ist $f + g \in M$ und $uf \in M$.

Aufgabe 14. Welche der folgenden Mengen bildet einen Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Menge der konvergenten Folgen.
- Menge der unbestimmt divergenten Folgen.
- Menge der Nullfolgen.
- Menge der Folgen mit Grenzwert 1.
- Menge der Folgen mit uneigentlichem Grenzert ∞.

Lösung von Aufgabe 14.

- Die Menge der konvergenten Folgen ist ein Vektorraum, da sie abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Die Summe zweier konvergenter Folgen ist konvergent, das skalare Vielfache einer konvergenten Folgen ist konvergent.
- Die Menge der unbestimmt divergenten Folgen ist kein Vektorraum. Multipliziert man z.B. eine unbestimmt divergente Folge mit 0, ensteht eine konvergente Folge.
- Die Menge der Nullfolgen ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und ist daher ein Vektorraum.
- Die Menge der Folgen mit Grenzwert 1 ist kein Vektorraum. Die Summe zweier solcher Folgen hat Grenzwert 2 und nicht 1.
- Die Menge der Folgen mit uneigentlichem Grenzwert ∞ ist kein Vektorraum. Multipliziert man eine solche Folge z.B. mit -1 ist der Grenzwert $-\infty$, nicht ∞.

Aufgabe 15. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ so dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

nicht leer ist. Zeigen Sie dass $\mathbb{L}$ kein Vektorraum ist.

Lösung von Aufgabe 15. $\mathbb{L}$ ist nicht abgeschlossen unter Addition. Da $\mathbb{L} \neq \emptyset$ existieren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{L}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A\vec{x}_1 &= \vec{b} \\ A\vec{x}_2 &= \vec{b} \\ A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = 2\vec{b} \neq \vec{b} \end{aligned}$$

da $\vec{b} \neq \vec{0}$. Folglich ist $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \notin \mathbb{L}$.

Aufgabe 16. Die Menge aller T-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation und bildet somit einen Vektorraum.

Das komplexe Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

Der erste Faktor wird konjugiert komplex genommen um zu erreichen, dass

$$\vec{x} \circ \vec{x} \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Das komplexe Skalarprodukt ist damit wie das reelle positiv definit, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{x} \circ \vec{x} &\geq 0 \\ \vec{x} \circ \vec{x} &= 0 \text{ gdw. } \vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ähnlich kann man auch auf T-periodischen Funktionen ein Skalarprodukt definieren. Für zwei T-periodische Funktionen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt $f \circ g$ eine Zahl, die definiert ist durch

$$f \circ g = \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass die T-periodischen Funktionen

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ g(t) &= e^{j\ell\omega t} \end{aligned}$$

orthogonal sind für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $k \neq \ell$, d.h.

$$f \circ g = 0.$$

Lösung von Aufgabe 16. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{jk\omega t}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ g(t) &= e^{j\ell\omega t} \end{aligned}$$

$k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $k \neq \ell$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g &= \int_0^T e^{-jk\omega t} e^{j\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{j(\ell-k)\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} \left[e^{j(\ell-k)\omega t} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (e^{j(\ell-k)\omega T} - 1) \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (e^{2\pi j(\ell-k)} - 1) \\ &= \frac{1}{j(\ell-k)\omega} (\cos(2\pi(\ell-k)) + j\sin(2\pi(\ell-k)) - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $\ell - k$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 17. Ist die Menge aller regulärer $n \times n$ Matrizen abgeschlossen unter Addition und unter skalarer Multiplikation? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 17. Keine der Abschlusseigenschaften ist erfüllt. Ist A eine reguläre Matrix, dann ist auch $-A$ regulär. Die Summe $A+(-A)$ und das skalare Vielfache $0A$ ergeben jedoch die Nullmatrix und sind singulär.

Aufgabe 18. Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation. Zeigen Sie, dass dann auch $M_1 \cap M_2$ abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Da Vektorräume genau die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, die unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen sind, ist die Schnittmenge von Vektorräumen wieder ein Vektorraum. Gilt dies auch für die Vereinigungsmenge? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Lösung von Aufgabe 18. Annahme: M_1, M_2 sind abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation. Zu zeigen: $M_1 \cap M_2$ ist abgeschlossen unter Addition und skalarer Multiplikation.

- Abgeschlossenheit unter Addition. Sei
$$\vec{x}, \vec{y} \in M_1 \cap M_2.$$
Zu zeigen:
$$\vec{x} + \vec{y} \in M_1 \cap M_2.$$
Da $\vec{x}, \vec{y} \in M_1 \cap M_2$ gilt
$$\vec{x}, \vec{y} \in M_1 \text{ und } \vec{x}, \vec{y} \in M_2.$$
Da M_1 und M_2 abgeschlossen sind unter Addition, ist auch
$$\vec{x} + \vec{y} \in M_1 \text{ und } \vec{x} + \vec{y} \in M_2.$$
Folglich ist
$$\vec{x} + \vec{y} \in M_1 \cap M_2.$$

- Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation Sei
$$\vec{x} \in M_1 \cap M_2 \text{ und } u \in \mathbb{R}.$$
Zu zeigen:
$$u\vec{x} \in M_1 \cap M_2.$$
Da $\vec{x} \in M_1 \cap M_2$ gilt
$$\vec{x} \in M_1 \text{ und } \vec{x} \in M_2.$$
Da M_1 und M_2 abgeschlossen sind unter skalarer Multiplikation gilt
$$u\vec{x} \in M_1 \text{ und } u\vec{x} \in M_2.$$
Folglich ist
$$u\vec{x} \in M_1 \cap M_2.$$

Die Vereinigungsmenge von Vektorräumen ist i.a. kein Vektorraum. Sei z.B.

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ M_2 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Dann ist $M_1 \cup M_2$ nicht abgeschlossen unter Addition. So ist z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_1 \cup M_2 \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_1 \cup M_2$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin M_1 \cup M_2.$$